MP 2 **Samedi 7 Janvier 2023**

Devoir surveillé 4 :CC(IN)P PC 2012, solutions

Partie I : le polylogarithme

1) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = 1$. Ainsi, d'après le test de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière L_α vaut 1 .
2) Par prop. du cours, l'application L_α, application somme d'une série entière, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur] - 1, 1[, sur son intervalle ouvert de convergence.
3) Soit $x \in]-1,1[$. Par sommes de séries convergentes :

$$\begin{aligned} L_\alpha(-x)+L_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}((-1)^n+1)\frac{x^n}{n^\alpha}, \quad \text{on ne garde que les termes d'indice } n=2p \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} 2\frac{x^{2p}}{(2p)^\alpha} \\ &= 2^{1-\alpha}L_\alpha\left(x^2\right) \end{aligned}$$

4) Soit $x \in]-1,1[$. Le théorème de dérivation terme à terme « automatique » des séries entières à l'intérieur de l'intervalle de convergence permet d'écrire :

$$xL'_{\alpha+1}(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^{\alpha+1}}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha} = L_\alpha(x).$$

Notons alors que la fonction $x \mapsto \dfrac{L_\alpha(x)}{x}$ se prolonge par continuité en 0, ce prolongement est même $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'elle coïncide avec $L'_{\alpha+1}$.
En ce sens, comme $L_{\alpha+1}(0) = 0$, on peut écrire :

$$L_{\alpha+1}(x) = \int_0^x L'_{\alpha+1}(t)dt = \int_0^x \frac{L_\alpha(t)}{t}dt.$$

5) Soit $x \in]-1,1[$. Alors (en utilisant pour L_{-1} le théorème de dérivation terme à terme pour les séries entières) :

$$L_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$
$$L_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$
$$L_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

6) Soient $\alpha \leq 1$ et $x \in]0,1[$. En minorant comme conseillé par l'énoncé :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = L_1(x) = -\ln(1-x)$$

Or on sait que $\lim\limits_{x\to1} -\ln(1-x) = +\infty$. D'où, par minoration, $\lim\limits_{x\to1} L_\alpha(x) = +\infty$.

7) **(M1)** Les séries $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent (d'apès Riemann), et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{n^\alpha}$ vaut 1 . Le théorème radial d'Abel affirme donc que la fonction L_α est continue sur $[-1,1]$.
(M2) En posant $u_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$, on a $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ donc la série de fonctions $\sum_{n\geq1}\frac{x^n}{n^\alpha}$ converge normalement sur $[-1,1]$ en particulier uniformément, et les $x \mapsto u_n(x)$ sont continues sur $[-1,1]$, d'où le résultat par le théorème de continuité d'une limite uniforme.

8) **(M1)** Pour $x \in]0,1[$ on a

$$L_2'(x) = \frac{1}{x} L_1(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, appliqué à $L_2 \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, telle que $L_2' \in \mathcal{D}(]-1,1[,\mathbb{R})$, dans le cas d'une limite infinie, on conclut que L_2 n'est *pas dérivable en* 1 et que la limite des taux de variations en 1 est infini : le graphe de L_2 a une tangente verticale au point d'abscisse 1.

(M2) On peut aussi considérer directement les taux de variations :

$$\frac{L_2(x)-L_2(1)}{x-1} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n-1}{n^2}}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{x} \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} +\infty.$$

ce qui montre encore que la fonction L_2 n'est pas dérivable en 1 et que le graphe de L_2 a une tangente verticale au point d'abscisse 1.

9) La fonction φ vérifie :
   i) $\varphi \in \mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ en particulier φ est continue par morceaux sur cet intervalle,
   ii) $\varphi(u) \underset{u\to 0}{\sim} u^{\alpha-2}$ et $2-\alpha<1$ donc avec (i), φ est intégrable sur $]0,1]$, par théorème de comparaison (exple de Riemann),
   iii) $\varphi(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc avec (i), φ est intégrable sur $[1,+\infty[$

   Au total, on a bien montré que $\varphi \in \mathscr{L}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

10) Déjà $u \mapsto f(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc en particulier c.p.m.
D'autre part, par majoration, pour $x \leq 1$,

$$\forall\, u \in]0,+\infty[,\ 0 \leq \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} \leq \varphi(u).$$

Comme φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on conclut que $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-x}$, est aussi intégrable, par majoration, ce qui donne l'existence de l'intégrale : $K_\alpha(x)$.

11) On vérifie les hypothèses du théorème de continuité sous le signe $\int$ de Lebesgue :

   - pour chaque u de $]0,+\infty[$, l'application $x \longmapsto f(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-x}$ est continue sur $]-\infty,1]$
   - pour tout $(u,x) \in]0,+\infty[\times]-\infty,1]$, $0 \leq \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-x} \leq \varphi(u)$ majoration par une fonction intégrable indépendante de x,

   sans oublier bien sûr qu'on a déjà montré à la question précédente que $u \mapsto f(x,u)$ était intégrable, donc par le théorème cité, $x \mapsto K_\alpha(x)$ est continue sur l'intervalle $]-\infty,1]$

12) Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$. On vérifie les hypothèses du théorème de caractère $\mathcal{C}^1$ sous le signe $\int$ de Lebesgue :

   - pour chaque u de $]0,+\infty[$, l'application $x \longmapsto f(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1]$
   - pour tout $(x,u) \in]-\infty,1]\times]0,+\infty[$, $0 \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u-x)^2} \leq \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u-1)^2} = \psi(u)$. et on vérifie ci-dessous que ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Avec ces deux hypothèses clefs et sans oublier le fait que $u \mapsto f(x,u)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ comme on l'a déjà demontré plus haut et que $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est continue donc en particulier c.p.m., on conclut que : la fonction K_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-\infty,1]$

   Vérification que la fonction ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$:
   i) ψ est continue donc en particulier c.p.m. sur $]0,+\infty[$
   ii) $\frac{u^{\alpha-1}}{(e^u-1)^2} \underset{u\to 0}{\sim} u^{\alpha-3}$ et $3-\alpha<1$ donc avec (i), par comparaison, ψ est intégrable sur $]0,1]$.

iii) $\frac{u^{\alpha-1}}{(e^u-1)^2} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc avec (i), par comparaison, ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

13) Il suffit de montrer que K_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les segments $[a,b]$ avec $1<a<b$.
Or pour tout $x\in[a,b]$ et pour tout $u\in]0,+\infty[$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u-x)^2} \leq \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u-b)^2} =: \psi_b(u)$$

La fonction ψ_b est bien intégrable sur $]0,+\infty[$, indép. de x car elle est continue sur $[0,+\infty[$ et $o(1/t^2)$ en $+\infty$.
Le reste de l'argument est identique à la question précédente.

14) Comme $\alpha>1$, $t\longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. D'où l'existence de $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.
Et, comme de plus, $t\longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est positive non identiquement nulle, alors $\Gamma(\alpha)>0$.
N.B. On sait qu'en fait Γ est définie sur $]0,+\infty[$, mais ce n'est pas utile ici.

15) A titre de travail préparatoire remarquons que pour tout $x\in[-1,1]$ et pour tout $u>0$, on a :

$$|xe^{-u}|<1 \text{ et } \frac{1}{e^u-x} = e^{-u}\frac{1}{1-xe^{-u}} = e^{-u}\sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-ku} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k e^{-(k+1)u}.$$

En partant du membre de droite de l'égalité à montrer :

$$\begin{aligned}
L_\alpha(x)\Gamma(\alpha) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^\alpha}\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}du \quad \text{en posant } u=\frac{t}{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{k+1}u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}du\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1}u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}\right)du \quad \text{par théorème d'I.T.T. justifié ci-dessous}(\dagger)\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{xu^{\alpha-1}}{e^u-x}du\\
&= xK_\alpha(x)
\end{aligned}$$

Justification de l'I.T.T. (†) : ici on considère $v_k(u)=x^{k+1}u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}$,

- chaque fonction $u\mapsto v_k(u)$ est **positive**, intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et $o(1/u^2)$ en $+\infty$,
- la fonction somme $u\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1}u^{\alpha-1}e^{-(k+1)u}$ est une fonction continue par morceaux car c'est $u\mapsto \frac{xu^{\alpha-1}}{e^u-x}$

donc par le théorème d'I.T.T. du programme pour les fonctions positives (Beppo-Levi), la ligne (†) est bien justifiée.

16) Dans cette définition, on a :

$$\forall x\leq 1,\ L_\alpha(x) = \frac{x.K_\alpha(x)}{\Gamma(\alpha)}$$

Par la question 11) et 12), K_α continue sur $]-\infty,1]$ et dérivable sur $]-\infty,1[$, donc L_α aussi.

17) Comme la question n'est « qu'un » changement de variable,

$\boxed{\text{on met le paquet en citant le théorème complet}}$

On considérant $\varphi :\quad u \mapsto e^{-u}$ qui est C^1 bijective de dans, par théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées, on a, en posant $t = e^{-u}$ et donc $u = -\ln(t)$, $du = -\dfrac{dt}{t}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} du = \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{(\frac{1}{t} - x)t} dt$$

ce qui donne bien la formule annoncée :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt}\ \mathrm{d}t.$$

18) La question peut sembler un peu vague : « on peut prolonger ». Elle veut dire en fait deux choses :

   i) La formule donnée a du sens (l'intégrale converge) pour tous les $z \in \mathbb{C} \setminus]1, +\infty[$

   ii) La restriction de la fonction ainsi définie à $]-\infty, 1]$ coïncide avec la fonction L_α considérée jusqu'ici.

Le point (ii) est évident par la formule de la question précédente.
Pour le point (i) : Pour z complexe non réel, l'application $u \longmapsto \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z} \underset{u\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Donc $u \longmapsto \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui montre (i).
D'où la « validité » du prolongement.
Deuxième partie de la question : soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Par somme d'intégrales convergentes :

$$\begin{aligned}
L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) &= \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z} - \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u + z} \right) du \\
&= \frac{2z^2}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{2u} - z^2} du \\
&= \frac{2^{1-\alpha} z^2}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - z^2} dt \quad \text{en posant } t = 2u \\
&= 2^{1-\alpha} L_\alpha\left(z^2\right). \quad (*)
\end{aligned}$$

Remarque : En fait le prolongement ainsi défini a une légitimité beaucoup plus profonde. On peut montrer qu'il est D.S.E. au voisinage de tout point, et on peut montrer que tel prolongement est *unique* (rigidité des fonctions D.S.E.). Les fonctions D.S.E. en tout point s'appellent aussi fonctions *analytique*, il s'agit donc ici du *prolongement analytique* de L_α à $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. La rigidité des fonctions analytiques dit aussi que si une formule comme $(*)$ est vraie sur $]-\infty, 1]$ alors elle sera vraie sur tout le domaine complexe sur lequel est défini L_α.

19) Comme f est impaire et cos est paire, la fonction $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est impaire et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$$

comme intégrale d'une fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$.
D'autre part, $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire et donc par parité :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t)(\sin(nt))dt$$

On peut alors calculer $b_n(f)$ par I.P.P. en prenant $\begin{cases} u(t) = \pi - t \Rightarrow u'(t) = -1 \\ v'(t) = \sin(nt) \Leftarrow v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{cases}$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(\pi - t)}{n} \cos(nt) \right]_0^\pi - \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nt)dt = \frac{1}{n}.$$

Culturel : Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceau, le théorème de Dirichlet dit que sur $]-0, 2\pi[$, f est somme de sa série de Fourier i.e.

$$\forall\, x \in]0, 2\pi[, \quad \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

On peut faire la représentation graphique de f et des premières sommes partielles de sa série de Fourier :

20) La formule de Parseval de l'énoncé appliquée à la fonction f de la question précédente donne que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2.$$

C'est-à-dire, avec $b_n = 1/n$, que

$$\frac{1}{12}\pi^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} L_2(1).$$

Ainsi

$$\boxed{L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}}$$

Par ailleurs, on a

$$L_2(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Par la question REF, on sait que $K_2(1) = \Gamma(2) L_2(1) = \frac{\pi^2}{2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \frac{\pi^2}{6} \times 1! = \dfrac{\pi^2}{6}$.

21) On sait depuis la question 2) que L_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$, en particulier sur $]0, 1[$ et donc aussi $x \mapsto L_2(1-x)$ puisque $1 - x \in]0, 1[$ aussi. Par somme, on a le caractère $\mathcal{C}^1$ de Φ. Soit $x \in]0, 1[$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= L_2'(x) - L_2'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\
&= \frac{L_1(x)}{x} - \frac{L_1(1-x)}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \quad \text{d'après la question 4)} \\
&= 0 \quad \text{puisqu'on sait que } L_1(x) = -\ln(1-x).
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction Φ est constante sur l'intervalle $]0, 1[$

On considère la limite de chaque terme quand $x \to 0$, on sait que $\ln(x).\ln(1-x) \underset{x \to 0}{\sim} -x\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\Phi(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} L_2(0) + L_2(1) + 0 = L_2(1)$.

Donc comme Φ est constante, on a montré que :

$$\forall\, x \in]0, 1[, \ \Phi(x) = L_2(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

22) Avec la question précédente, on a $\Phi(1/2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Or par déf. de Φ, $\Phi(1/2) = 2L(1/2) + \ln^2(1/2)$. D'où

$$\boxed{L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln(2))^2.}$$

23) On reprend l'idée proposée à la question 21 : on note

$$x \in [-\frac{1}{2}, 1],\ \Psi(x) = L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{2}(\ln(1-x))^2.$$

Par calcul de dérivée comme à la question citée :

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= L_2'(x) - \frac{1}{(x-1)^2} L_2'(\frac{x}{x-1}) - \frac{1}{1-x}\ln(1-x) \\ &= \frac{-\ln(1-x)}{x} - \frac{1}{(x-1)^2}\frac{\ln(1-\frac{x}{x-1})}{\frac{x}{x-1}}) - \frac{1}{1-x}\ln(1-x)\end{aligned}$$

BEURK mais ça doit marcher !

Ainsi Ψ est constante sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, 1]$ et comme $\Psi(0) = L_2(0) + L_2(0) + 0 = 0$, on a :

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right], L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2.$$

24) Soit $x < 0$. En effectuant le changement de variable $t = xs$, on a :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}dt$$

En intégrant par parties (on intègre la fraction et dérive le logarithme), on a aussi :

$$-\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}dt.$$

D'où le résultat.

25) Soit $x < 0$. En intégrant par parties on a

$$g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}dt = \left[(\ln(1-t))^2\right]_x^0 - \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}dt = -(\ln(1-x))^2 - g(x).$$

D'où $g(x) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$. On en déduit que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.}$

26) L'application $t \longmapsto \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}$ est prolongeable par continuité sur $]-\infty, 0]$ et $\frac{\ln(1-t)}{t(t-1)} \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{(-t)^{\frac{3}{2}}}\right)$.

D'où l'existence de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}dt$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = I \in \mathbb{R}.}$

27) De manière assez naturelle vu ce qui précède,

$$(L_2(x) - g(x)) = -\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}dt \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}dt = -I \in \mathbb{R}$$

Comme on a montré aussi que $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, on en déduit que :

$$L_2(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} g(x) = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$$

Comme $\ln(1-x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \ln(-x)$, on peut simplifier un peu ;

$$\boxed{L_2(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\ \ln^2(|x|).}$$

Remarque : avec tout ce qui précède vous avez assez d'éléments pour tracer le graphe de L_2 sur $]-\infty, 1]$, avec ses valeurs particuilières.