D.M. 9 : Révisions réduction des endomorphismes, solutions

Mines-Ponts PSI 2017

1) La trace est un invariant de similitude donc si u vérifie (C3) alors $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(-u)$.
D'autre part la trace est linéaire donc $\mathrm{Tr}(-u) = -\mathrm{Tr}(u)$.
Avec ces deux équations, on a $\mathrm{Tr}(u) = -\mathrm{Tr}(u)$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(u) = 0.}$

2) Comme E est de dimension 2, on sait que le polynôme caractéristique χ_u de u s'écrit :

$$\chi_u(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X + \det(u) \overset{\text{ici}}{=} X^2 - \delta^2$$

D'après Cayley-Hamilton $\chi_u(u) = 0$ donc :

$$\boxed{u^2 - \delta^2\,\mathrm{id} = 0}$$

ce qui est le premier résultat demandé.
On sait ensuite que $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble $Z(\chi_u)$ des zéros du polynôme caractéristique. Or ici $\chi_u = (X-\delta).(X+\delta)$ donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \{\delta, -\delta\}}$$

Comme E est de dim. 2, et que u a deux valeurs propres distinctes, chacun des s.e.v. propre associé est de dimension 1.

3) A titre préliminaire :

> Il est bon de se rappeler qu'une droite D qui vérifie $u(D) \subset D$ est une droite formée de vecteurs propres, donc il suffit de prendre pour D n'importe quelle droite de E différente des deux droites propres.

Vu la question, notons e_1 un vecteur propre pour δ et e_2 un vecteur propre pour $-\delta$. Ces vecteurs sont indépendants et on a :

$$u\left(e_1 + e_2\right) = \delta\left(e_1 - e_2\right)$$

Prenons $D \coloneqq \mathrm{Vect}\left(e_1 + e_2\right)$, c'est une droite (car $e_1 + e_2 \neq 0$), et $u(D) \notin D$ car $e_1 - e_2 \notin D$ car $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$ est libre car (e_1, e_2)l'est). On a donc $u(D) \notin D$.
Posons $F = D$ et $G = u(D)$. Ce sont des droites (car u est inversible et conserve donc la dimension) non égales et donc en somme directe (intersection réduite à $\{0\}$). Par dimension, on a ;

$$E = F \oplus G$$

Par définition, $u(F) = G$. De plus $u(G) = u^2(F) = \delta^2 F = F$. Ainsi, $\boxed{u \text{ est échangeur}}$

4) Par propriété du produit par bloc, on a immédiatement :

$$\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$$

Si on décompose :

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} =: M_1 + M_2$$

on vient de montrer que $M_2^2 = 0$ mais encore par produit par blocs on a aussi $M_1^2 = 0$.
On conclut bien que M est somme de deux matrices de carré nul.

5) La matrice D est une matrice diagonale, dont toutes les entrées diagonales sont non nulles, elle est donc $\boxed{\text{inversible}}$ et son inverse s'obtient en inversant toutes les entrées diagonales ce qui ici donne simplement ;

$$\boxed{D^{-1} = D}$$

Par propriété du calcul par bloc, (ou bien par propriété du produit par une matrice diagonale) on a :

$$DMD^{-1} = DMD = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -B \\ -A & 0_p \end{pmatrix} = -M$$

On a montré que :

$$\boxed{DMD^{-1} = -M \text{ donc } M \text{ est bien semblable à } -M.}$$

6) Par déf. de la représentation matricielle, l'inclusion $u(F) \subset G$ indique qu'il y a un bloc de 0 en haut à gauche dans $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $u(G) \subset F$ indique qu'il y a un bloc de 0 en bas à droite. Finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix} = M$$

7) **Dans le cas les deux s.e.v. F et G sont non nuls**, alors on peut appliquer la question 4) (qui suppose que les dimensions p et n des blocs sont toutes les deux non nulles).
D'après cette question 4), $M = M_1 + M_2$ avec $M_1^2 = M_2^2 = 0$ donc en posant u_1, u_2 les deux endomorphismes tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) = M_i$, on a

$$\boxed{u = u_1 + u_2 \quad \text{avec} \quad u_1^2 = u_2^2 = 0 \text{ autrement dit (C2)}}$$

Avec les question 5), en posant $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = D$, on a :

$$\boxed{d \circ u \circ d^{-1} = -u \text{ autrement dit (C3).}}$$

Dans le cas particulier où F ou G est nul mentionné par l'énoncé ; si $G = \{0\}$ on a $F = E$ et $u(F) = \{0\}$ donc u est l'application nulle qui vérifie trivialement (C2) et (C3). De même si $F = \{0\}$, $G = E$ et $u(G) = \{0\}$ même conclusion.

8) Comme $f^2 = 0$, on a $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)}$ (mieux vaut même détailler la justification vu la question posée : Si $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe y tel que $x = f(y)$ et donc $f(x) = f^2(y) = 0$. Ainsi $x \in \ker(f)$).
En particulier : $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim \ker(f)$.
Avec le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 2\dim(\ker(f))$$

On a donc bien l'inégalité demandée.

9) Soit $x \in \ker(a) \cap \ker(b)$. On a $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et comme u est injective $x = 0$. Ceci montre que

$$\ker(a) \cap \ker(b) = \{0\}. \tag{1}$$

Donc on sait que la somme de $\ker(a)$ et $\ker(b)$ est *directe*, on la note $\ker(a) \oplus \ker(b)$ et donc que

$$\dim(\ker(a)) + \dim(\ker(b)) = \dim(\ker(a) + \ker(b)) \leq \dim(E) \tag{2}$$

Mais d'après la question précédente $\dim(\ker(a)) \geq \dim(E)/2$ et $\dim(\ker(b)) \geq \dim(E)/2$ car $a^2 = b^2 = 0$. Ceci avec (2) donne à la fois l'égalité :

$$\dim(\ker(a) \oplus \ker(b)) = \dim(E)$$

et donc l'égalité d'ensemble :

$$\boxed{\ker(a) \oplus \ker(b) = E.} \tag{3}$$

Mais on a aussi $\dim(\ker(a)) = \dim(E)/2$ et $\dim(\ker(b)) = \dim(E)/2$. Par théorème du rang, on a alors aussi $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \dim(E)/2$ et avec l'inclusion $\mathrm{Im}(a) \subset \ker(a)$ de la Q8, on a l'égalité :

$$\ker(a) = \mathrm{Im}(a)$$

(M2) Sans argument de dimension, donc valable en dim. infinie :
on a toujours :

$$\mathrm{Im}(a+b) \subset \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$$

Ici $\mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Im}\, u = E$ donc a fortiori :

$$\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b) = E \tag{4}$$

Avec la question précédente, qui s'applique à a et b puisque $a^2 = b^2 = 0$, on a : $\mathrm{Im}(a) \subset \ker(a)$ et $\mathrm{Im}(b) \subset \ker(b)$ donc encore a fortiori :

$$\ker(a) + \ker(b) = E \tag{5}$$

Avec (1) et (5), on a bien

$$\boxed{\ker(a) \oplus \ker(b) = E.} \tag{6}$$

Notons qu'on a aussi, avec (4) et $\mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Im}(b) \subset \ker(a) \cap \ker(b) = \{0\}$ l'égalité :

$$\mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Im}(b) = E. \tag{7}$$

On en déduit encore avec la Q8 les égalités :

$$\boxed{\mathrm{Im}(a) = \ker(a) \text{ et } \mathrm{Im}(b) = \ker(b).}$$

10) Posons $F = \ker(a)$ et $G = \ker(b)$. Comme $a_{|\ker(a)} = 0$, on a, pour $u = a + b$:

$$u(F) = b(\ker(a)) \subset \mathrm{Im}(b) \subset \ker(b) = G$$

De même en échangeant les rôles de a et b, on a :

$$u(G) = F$$

et par la question précédente, $F \oplus G = E$ donc $\boxed{u \text{ est échangeur.}}$

Intermède : la décomposition de Fitting

11) Soit $k \in N$. Si $x \in \ker\left(v^k\right)$ alors $v^{k+1}(x) = v\left(v^k(x)\right) = v(0) = 0$ et donc $x \in \ker\left(v^{k+1}\right)$. Ainsi $\ker\left(v^k\right) \subset \ker\left(v^{k+1}\right)$ et donc

$$\boxed{(\ker\left(v^k\right))_{k\in\mathbb{N}} \text{ croît pour l'inclusion}}$$

12) La suite de terme général $d_k = \dim\left(\ker\left(v^k\right)\right)$ est donc aussi croissante. Or, elle est majorée (par $\dim(E)$). Elle est donc convergente.
Comme elle est constituée d'entiers, elle finit par stationner (puisque pour des indices grands, deux termes consécutifs de la suite sont des entiers distants de moins de $1/2$). En notant p le rang à partir duquel la suite stationne, par inclusion et égalité des dimensions, on peut conclure que

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{N},\ \forall k \geq p, \ker\left(v^k\right) = \ker\left(v^p\right) \quad (\dagger)}$$

Pour tout $k \leq p$, $\ker v^k \subset \ker v^p$ par 11), et pour tout $k \geq p$, $\ker v^k = \ker v^p$ donc :

$$\boxed{\ker(v^p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker\left(v^k\right)}$$

Enfin, on peut choisir pour p un entier pair, parce que si l'entier p donné dans (†) est impair, on prend $p+1$ qui convient tout aussi bien.

13) On a dit que pour tout $k \geq p$ $\ker v^k = \ker v^p$ donc en particulier :

$$\ker(v^{2p}) = \ker(v^p) = E_\lambda^c(f)$$

Soit $x \in \ker(v^p) \cap \mathrm{Im}(v^p)$. Comme $x \in \mathrm{Im}(v^p)$, on a un $y \in E$ tel que $x = v^p(y)$. Comme $x \in \ker(v^p)$, on y a $v^p(x) = 0$ donc $v^{2p}(y) = 0$.
Mais alors $y \in \ker(v^{2p}) = \ker v^p$ donc $v^p(y) = 0$ donc $x = 0$.
On a donc montré que :

$$\ker(v^p) \cap \mathrm{Im}(v^p) = \{0\}.$$

D'autre part, avec le théorème du rang, on a l'égalité $\dim \ker v^p + \dim \mathrm{Im}\, v^p = \dim E$ et avec ces deux arguments, on conclut :

$$\boxed{\ker(v^p) \oplus \mathrm{Im}(v^p) = E}$$

Si $x \in \mathrm{Im}\,(v^p)$, il s'écrit $x = v^p(y)$ et $v(x) = v^p(v(y)) \in \mathrm{Im}\,(v^p)$.
Si $x \in \ker(v^p)$ alors $v^p(v(x)) = v\left(v^p(x)\right) = v(0) = 0$ et donc $v(x) \in \ker(v^p)$.
On a bien montré que $\ker(v^p)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont stables par v.

14) Montrer que λ n'est pas v.p. de $f_{\mathrm{Im}(v^p)}$ revient à montrer que $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(v^p) = \{0\}$ i.e. $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(v^p) = \{0\}$ ce qui est évident puisque $\ker(v) \subset \ker(v^p)$ et qu'on a montré que $\ker(v^p) \cap \mathrm{Im}(v^p) = \{0\}$. On a bien montré que :

$$\boxed{\lambda \text{ n'est pas v.p. de } f_{\mathrm{Im}(v^p)}}$$

Par déf. $E_\lambda^c(f) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id})^p$ donc $(X - \lambda)^p$ annule l'endomorphisme induit $f_{E_\lambda^c(f)}$. Les v.p. de cet endomorphismes induits sont parmi les racines de ce polynôme annulateur, et visiblement ce polynôme $(X-\lambda)^p$ admet λ pour seule racine donc le spectre est inclus dans $\{\lambda\}$. Comme d'autre part, comme le corps de base est $\mathbb{C}$, on sait que cet endormorphisme admet au moins une valeur propre, on conclut que :

$$\boxed{\text{le spectre de } f_{E_\lambda^c(f)} \text{ est exactement égal à } \{\lambda\}.}$$

15) **Excursion, pour gagner en profondeur et faire le lien avec le cours sur les s.e.v. caractéristiques :**
Soit E un e.v. de dim. finie.
En cours, pour $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\chi_f = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{c_i}$, avec $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ deux à deux distinctes, on a défini les s.e.v. caractéristiques comme les $\Gamma_i(f) = \ker(f-\lambda_i)^{c_i}$.
Par Théorème des noyaux et Cayley-Hamilton, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} \Gamma_i$$

Pour faire le lien avec le point de vue introduit ici, donnons la :

Propriété :
pour λ une v.p. de $f \in \mathscr{L}(E)$, la limite de la suite (constante A.P.C.R.) des $(\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est exactement le s.e.v. caractéristique $\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^c$.

Dém. (qui contient essentiellement l'argument demandé dans la question du Pb du concours)
Par l'absurde s'il existait un $k > c$ tel que $\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^k$ contienne *strictement* le s.e.v. caractéristique $\Gamma_\lambda = \ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^c$.
Notons $\Delta = \underset{\mu\neq\lambda}{\oplus}\Gamma_\mu$.
On sait que $E = \Gamma_\lambda \oplus \Delta$. Donc Grassmann, comme $\dim\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^k > \dim(\Gamma_\lambda) = n-\dim(\Delta)$, on en déduit que :

$$\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^k \cap\ \Delta \neq \{0\}$$

Or par le même argument qu'à la question 14, comme $\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})\cap\Delta = \{0\}$ on sait que $(f-\lambda\,\mathrm{id})_{|\Delta}$ est inversible, donc aussi $(f-\lambda\,\mathrm{id})^k_{|\Delta}$, d'où la *contradiction* □

Retour au problème de concours :

Conséquence de la prop. précédente : Le s.e.v. noté $E^c_\lambda(f)$ est bien le s.e.v. caractéristique pour la v.p. λ.

Application à la Q15 :
L'hypothèse de l'énoncé donne que $\chi_f(X) = (X-\lambda)^\alpha.(X-\mu)^\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$, $\alpha+\beta = n$.
La propriété précédente dit qu'avec les notations de l'énoncé $E^c_\lambda(f) = \ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^\alpha$ et $E^c_\mu(f) = \ker(f-\mu\,\mathrm{id})^\beta$.
Par Cayley-Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \ker(f-\lambda\,\mathrm{id})^\alpha \oplus \ker(f-\mu\,\mathrm{id})^\beta$$

et la conclusion demandée : $E = E^c_\lambda(f)\oplus E^c_\mu(f)$.

Application au cas non bijectif

Théorème admis :

tout endomorphisme nilpotent est échangeur.

Comment montrer ce résultat ? Avec le résultat ultime pour les nilpotents : la réduction de Jordan, évidemment hors-programme. Mais avec celle-ci il suffit de prouver ce résultat pour un bloc de Jordan.

Or si u s'écrit dans une base $(e_1,\dots,e_n)$ comme un bloc de Jordan, on a $u(e_1) = 0$ et pour tout $i\geq 2$, $u(e_i) = e_{i-1}$.

Si n est impair, on prend $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_3,\dots,e_{n-2},e_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2,e_4,\dots,e_{n-1})$, les s.e.v F et G vérifent bien les propriétés voulues.

Si n est pair, on prend $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_3,\dots,e_{n-1})$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2,e_4,\dots,e_n)$ et même conclusion. □

16) On calcule $u^2 = a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2 = a \circ b + b \circ a$. En n'oubliant pas que $a^2 = 0$, on en déduit que, d'un côté :

$$u^2 \circ a = a \circ b \circ a + b \circ a^2 = a \circ b \circ a$$

de l'autre côté :

$$a \circ u^2 = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$$

On a bien montré que :

$$\boxed{a \circ u^2 = u^2 \circ a}$$

De même en échangeant les rôles de a et b, pour montrer que $b \circ u^2 = u^2 \circ b$.

17) Comme a commute avec u^2, il commute avec toutes les itérées de u^2 et donc avec u^p puisque p est pair. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(u^p)$ est donc stable par a et de même il est stable par b.
Par déf. $a_G^2 = \left(a^2\right)_G = 0$ (idem pour b).

18) La notation G choisie à la question précédente est trompeuse, on va en changer
Notons $N = E_0^c(u)$ et $C = \mathrm{Im}\, u^p$ comme à la question précédente. Alors les s.e.v. N et C sont stables par u, et la restriction u_N de u à N est nilpotente (0 est la seule valeur propre avec la question 14) et la restriction u_C de u à C est inversible (0 n'est pas seule valeur propre avec la question 14).

Culturel : la décomposition $E = N \oplus C$ en deux s.e.v. stables avec u_N nilpotent et u_C inversible s'appelle *décomposition de Fitting de u* . On peut l'obtenir rapidement avec le T.D.N. en écrivant $\chi_u = X^p Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$ avec $N = \ker u^p$ et $C = \ker Q(u)$.
Elle permet de ramener comme ici, un certain nombre de questions seulement au cas inversible ou nilpotent.

Application ici : d'après le théorème admis dans le cas nilpotent, il existe une décomposition $N = F_1 \oplus G_1$ avec $u(F_1) \subset G_1$ et $u(G_1) \subset F_1$.
D'après le résultat de la question 10,appliqué à u_C (les hypothèses étant vérifiées par 17)), il existe une décomposition $C = F_2 \oplus G_2$ telle que $u(F_2) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset F_2$.
Au total en prenant $F = F_1 \oplus F_2$ et $G = G_1 \oplus G_2$, on a la conclusion.

Partie F : la condition (C3) entraîne la condition (C1)

19) Notons $(*)$ la relation $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ de l'énoncé, qui donne aussi $-\varphi^{-1} \circ u \circ \varphi = u$ qu'on note $(**)$
D'un côté :

$$\begin{aligned} \varphi^2 \circ u &= \varphi \circ \varphi \circ u \circ \varphi^{-1} \circ \varphi, \\ &= \varphi \circ (\varphi \circ u \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi \\ &= \varphi \circ (-u) \circ \varphi \quad \text{par } (*) \end{aligned}$$

De l'autre :

$$\begin{aligned} u \circ \varphi^2 &= \varphi \circ \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi \circ \varphi, \\ &= \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ u \circ \varphi) \circ \varphi \\ &= \varphi \circ (-u) \circ \varphi \quad \text{par } (**) \end{aligned}$$

En comparant les deux résultats, on a $\varphi^2 \circ u = u \circ \varphi^2$.

20) Comme on est dans un $\mathbb{C}$-e.v. de dim. finie, φ^2 possède une valeur propre λ.
La question 13 donne qu'il existe un entier p tel que $E = E_\lambda^c\left(\varphi^2\right) \oplus \mathrm{Im}\,(v^p)$ où $v = \varphi^2 - \lambda \mathrm{I}_E$.

Le but de ce qui suit est de montrer que $\mathrm{Im}\, v^p = \{0\}$ ce qui donnera l'unicité de la v.p.

Alors les deux s.e.v. $F := E^c_\lambda\left(\varphi^2\right)$ et $G := \mathrm{Im}\left(v^p\ \right)$ sont supplémentaires dans E et stables par φ^2.
Comme u commute avec φ^2, il commute avec les polynômes en φ^2, et donc les noyaux et image de ces polynômes sont stables par u et donc F et G sont stables par u. Ils sont stables par φ aussi car φ commute avec φ^2 ;
La relation $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ et donc valable en restriction à F et G donc u_F et u_G vérifient la condition (C3).
Par indécomposabilité de u, on en déduit que G est nul donc $E = E^c_\lambda(\varphi^2) = \ker(\varphi^2 - \lambda\,\mathrm{id})^p$ et donc

$$\boxed{\varphi^2 \text{ ne possède que } \lambda \text{ comme v.p.}}$$

Le polynôme minimal de φ^2 est donc de la forme $P(X) = (X - \lambda)^r$.
Comme φ est un automorphisme, $\lambda \neq 0$. Soit αet $-\alpha$ les deux racines carrées de λ dans $\mathbb{C}$.
Considérons $Q(X) = (X^2 - \lambda)^r = (X^2 - \alpha^2)^r = (X - \alpha)^r.(X + \alpha)^r$
Alors $Q(\varphi) = P(\varphi^2) = 0$.
Comme Q annule φ

$$\boxed{\text{les v.p de } \varphi \text{ sont parmi les racines de } Q \text{ donc ici } \alpha \text{ et } -\alpha.}$$

21) φ admettant au plus deux valeurs propres, on peut lui appliquer la question 15 et obtenir

$$E = E^c_\alpha(\varphi) \oplus E^c_{-\alpha}(\varphi)$$

Notons que l'hypothèse (C3) donne $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$ et donc

$$\forall x, (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)(u(x)) = -(\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)(u(x))$$

puis par récurrence assez simple (en particulier car $\varphi - \alpha\mathrm{I}_E$ et $\varphi + \alpha\mathrm{I}_E$ commutent)

$$\forall x, (\varphi - \alpha \mathrm{I}_E)^k (u(x)) = (-1)^k (\varphi + \alpha \mathrm{I}_E)^k (u(x))$$

Soit $x \in E^c_\alpha(\varphi)$, c'est à dire que $(\varphi - \alpha\mathrm{I}_E)^p(x) = 0$. On a alors $(\varphi + \alpha\mathrm{I}_E)^p(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in E^c_{-\alpha}(\varphi)$. Ainsi $u\left(E^c_\alpha(\varphi)\right) \subset E^c_{-\alpha}(\varphi)$ et de même $u\left(E^c_{-\alpha}(\varphi)\right) \subset E^c_\alpha(\varphi)$. En conclusion,

$$u \text{ est échangeur}$$

22) On procède par récurrence forte sur la dimension de l'espace.
- Initialisation : on suppose que u est un endomorphisme d'un espace de dimension 1 qui vérifie (C3). En dim. 1, les endomorphismes sont tous des homothéties donc $u = \lambda\,\mathrm{id}$, et dire que u et $-u$ sont semblable signifie ici que $\lambda\,\mathrm{id} = -\lambda\,\mathrm{id}$ donc $\lambda = 0$ et $u = 0$ donc u vérifie (C1).
- Hérédité : supposons le résultat vrai jusqu'au rang n. Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension $n+1$ et qui vérifie (C3).
Si u est indécomposable, il est échangeur comme on l'a démontré à la question 21.
Sinon, il existe une décomposition $E = F \oplus G$ avec F et G non nuls stables par u et tels que u_F et u_G vérifient (C3). L'hypothèse de récurrence s'applique à u_F et u_G et permet de décomposer F et G. Comme en question 18, on en déduit une décomposition de E qui montre que u est échangeur.