D.M. 11 : Approximation uniforme en var complexe et polynômes orthogonaux

Partie I : Approximation uniforme en variable complexe

1) La fonction f est continue sur D_f puisque les f_n le sont et que f est une limite uniforme sur D_f de fonctions continues sur D_f. Comme D_f est compact, f et les f_n sont bornées.
Ainsi dire que (f_n) CVU vers f signifie que la suite (f_n) converge vers f dans $(\mathcal{C}(D_f, \mathbb{C}), \| \|_\infty)$
Mais alors par continuité de la norme infinie (pour la topologie qu'elle définit elle-même), on a $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|$.
(En fait c'est l'I.T. $|\|f_n\|_\infty - \|f\|_\infty| \le \|f_n - f\|_\infty$).
Mais alors la suite réelle $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est en particulier bornée, donc :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \le M$$

2) a) Par déf. si on pose $u_k(t) = a_{n,k} r^k e^{i(k-p)t}$ alors :

$$\int_0^{2\pi} e^{-ipt} f_n(re^{it})\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) \right) dt, .$$

Comme $|u_k(t)| = |a_{n,k}| r^k$ est le terme général d'une série convergente indépendante de t, on sait donc $\sum u_k$ converge normalement par rapport à $t \in [0, 2\pi]$, ce qui permet d'intégrer terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ipt} f_n(re^{it})\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_{n,k} r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t}\, dt \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} r^k\, 2\pi\, \delta_{k,p} = 2\pi a_{n,p} r^p.$$

b) Selon a), $2\pi |a_{n,p}|\, r^p = \left| \int_0^{2\pi} e^{-ipt} f_n(re^{it})\, dt \right| \le \int_0^{2\pi} |f_n(re^{it})|\, dt \le 2\pi M.$

Cette inégalité est valable pour tout $r \in]0,1[$; en passant à la limite pour r tendant vers 1, on obtient

$$\boxed{|a_{n,p}| \le M}$$

c) Fixons $p \in \mathbb{N}$ et $r \in]0,1[$. Selon a), $a_{n,p} = \dfrac{1}{2\pi r^p} \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi_n(t)\, dt$, où $\varphi_n(t) = e^{-ipt} f_n(re^{it})$.
Comme (f_n) converge uniformément vers f sur D_f, (φ_n) converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-ipt} f(re^{it})$.
En effet, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| = |f_n(re^{it}) - f(re^{it})| \le \|f_n - f\|_\infty$, qui tend vers 0 et ne dépend pas de t.
Par intégration, sur un segment, d'une limite uniforme, on en déduit que

$$a_{n,p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} e^{-ipt} f(re^{it})\, dt.$$

Alternative : invoquer seulement la CVS et le T.C.D. avec la domination par la fonction constante égale à M.
Moralité : on a montré que la CVU de (f_n) vers f donnait la CV des suites de ses coeff. de Fourier complexe vers ceux de f.

3) D'une part, selon 2.b), $|u_p(n)| \le M|z|^p$, qui est le terme général d'une série convergente indépendante de n, donc $\sum u_p$ converge normalement sur $\mathbb{N}$.
D' autre part, selon 2.c), pour p fixé, $u_p(n)$ tend vers $\ell_p z^p$ quand n tend vers $+\infty$.
On peut donc appliquer le théorème de sommation des limites qui dit que $\sum \ell_p z^p$ converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p z^p.$$

Mais par définition, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} u_p(n) = f_n(z)$, qui tend vers $f(z)$ quand n tend vers $+\infty$.

On en conclut que $f(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \ell_p z^p$, ce qui montre bien que $f \in \mathbb{A}$ (on sait déjà que f est continue sur D_f).

4) Les polynômes sont évidemment dans $\mathbb{A}$ et donc par le c), une suite de polynômes qui CVU dans $\mathbb{A}$ aura sa limite dans $\mathbb{A}$.
Donc si on prend une fonction continue sur D_f qui n'est pas dans $\mathbb{A}$, elle ne sera donc pas limite uniforme de polynômes sur D_f.
Par exemple : $f : z \mapsto |z|$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ n'est pas dérivable en 0.

5) a) Pour $z \in D_f$, $rz \in D_{f,r} \subset D$, donc $f_{r,n}(z)$ et $f_r(z)$ sont bien définis.
La fonction $f_{r,n}$ est continue sur D_f par composition car g_n est continue sur $D_{f,r} \subset D$.
En notant pour $z \in D$, $g_n(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} z^p$, il vient $f_{r,n}(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} r^p z^p$, donc $f_{r,n}$ est développable en série entière sur D, et finalement $f_{r,n} \in \mathbb{A}$.
La variable rz décrit $D_{f,r}$ quand z décrit D_f donc $\|f_{r,n} - f_r\|_\infty = \left\|(g_n - g)_{|D_{f,r}}\right\|_\infty$, qui tend vers 0 par hypothèse.
On conclut bien que $(f_{r,n})$ converge donc bien uniformément vers f_r sur D_f.
b) Grâce au a), on peut appliquer le résultat du 3) qui nous dit ici que f_r appartient à $\mathbb{A}$.
On peut donc écrire, pour $z \in D$, $f_r(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{r,n} z^n$.
En notant D_r le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon r, cela se réécrit :

$$\forall z \in D_r,\ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n} a_{r,n} z^n.$$

Considérons maintenant r et s dans $]0,1[$ tels que $r \le s$.
Pour $z \in D_r$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n} a_{r,n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s^{-n} a_{s,n} z^n$. Par unicité du développement en série entière, $r^{-n} a_{r,n} = s^{-n} a_{s,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Autrement dit, $r^{-n} a_{r,n}$ ne dépend en fait pas de r et on peut le noter simplement a_n.
On obtient alors : $\forall r \in]0,1[$, $\forall z \in D_r$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, ce qui signifie simplement :

$$\forall z \in D,\ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On a bien montré que g est développable en série entière sur D.

Partie II : densité pour les polynômes de Laguerre

1. a) Soient $(f,g) \in H^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, les fonctions $f_1 : t \mapsto f(t)\,e^{-t/2}$ et $g_1 : t \mapsto g(t)\,e^{-t/2}$ appartiennent à $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

N.B. Le fait que $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ n'est PAS clairement écrit dans le programme donc ;

$$\boxed{\text{reprendre la démonstration du cours : inégalité } |f_1(t)g_1(t)| \le \frac{f_1(t)^2}{2} + \frac{g_1(t)^2}{2}.}$$

Par conséquent, $\alpha f_1 + \beta g_1 \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, ce qui signifie que $\alpha f + \beta g \in H$. Ainsi H est donc bien un sous-e.v. de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

b) Toujours d'après le cours, la fonction $f_1 g_1 : t \mapsto f(t)g(t)\,e^{-t}$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donc $(f \mid g)$ est bien défini.

Il est alors clair que l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est bilinéaire, symétrique et définie positive (stricte positivité de l'intégrale pour les fonctions continues). C'est donc un produit scalaire sur H.

2. À l'aide de la formule de Leibniz, on obtient facilement $L_n(t) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\dbinom{n}{k} t^k$.

En particulier, L_n est bien un polynôme de degré n.

3. a) On raisonne par récurrence finie sur k.

- $k = 0$: l'égalité demandée est la définition de $(L_m \mid L_n)$.

- $k \to k+1$: $\pi_n^{(n-k-1)}$ est de la forme $t \mapsto t^{k+1} Q_n(t)\,e^{-t}$, où Q_n est un polynôme, donc $L_m^{(k)} \pi_n^{(n-k-1)}$ s'annule en 0 et tend vers 0 en $+\infty$. L'égalité au rang $k+1$ s'obtient alors par intégration par parties « à crochet nul ».

b) - Appliquons le a) avec $m < n$ et $k = n$. Comme $L_m^{(n)} = 0$ selon 2, on obtient $(L_m \mid L_n) = 0$.

- Prenons maintenant $m = n = k$. Il vient $\|L_n\|^2 = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t)\,\pi_n(t)\,dt$.

Mais selon 2., L_n est de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{1}{n!}$, donc $L_n^{(n)} = 1$ et $\|L_n\|^2 = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,dt = 1$.

Ainsi, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}[X]$, et c'en est aussi une base puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(L_n) = n$.

4. a) De façon évidente, $e_\alpha \in H \Leftrightarrow \alpha > -1/2$.

b) $(L_n \mid e_\alpha) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\pi_n^{(n)}(t)\,dt$. n intégrations par parties "à crochet nul" donnent :

$$\begin{aligned}(L_n \mid e_\alpha) &= \frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\pi_n(t)\,dt \\ &= \frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-(1+\alpha)t}\,dt = \frac{(-1)^n\alpha^n}{n!\,(1+\alpha)^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\,du = \frac{(-1)^n\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}}.\end{aligned}$$

$\alpha > -\dfrac{1}{2}$, donc $-1 \le \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \le 1$ et $0 \le \dfrac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \le 1$, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n \mid e_\alpha)^2 = \frac{1}{(1+\alpha)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}} = \frac{1}{1+2\alpha}$.

c) Remarquons d'abord que $\dfrac{1}{1+2\alpha} = \|e_\alpha\|^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ notons p_n le projecteur orthogonal de H sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Comme $(L_k)_{0\le k\le n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$, $p_n(e_\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(L_k \mid e_\alpha)\,L_k$ et $\|p_n(e_\alpha)\|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(L_k \mid e_\alpha)^2$.

D'autre part, d'après le théorème de Pythagore, $\|e_\alpha\|^2 = \|p_n(e_\alpha)\|^2 + \|e_\alpha - p_n(e_\alpha)\|^2$.

Finalement, $\|e_\alpha - p_n(e_\alpha)\|^2 = \dfrac{1}{1+2\alpha} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(L_k \mid e_\alpha)^2$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini d'après b).

La suite $\big(p_n(e_\alpha)\big)$ converge donc vers e_α. Comme $p_n(e_\alpha) \in \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$, cela prouve que $e_\alpha \in \overline{\mathbb{R}[X]}$.

5. a) Soient $f \in H$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Fixons $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\,dt \le \varepsilon^2$ puis définissons g sur $\mathbb{R}_+$ par :

$g(t) = f(t)$ sur $[0, A]$, $g(t) = (A+1-t)\,f(t)$ sur $[A, A+1]$, $g(t) = 0$ sur $[A+1, +\infty[$.

Par construction, g appartient à K ; de plus :

$\|f-g\|^2 = \displaystyle\int_A^{A+1}(t-A)^2 f(t)^2 e^{-t}\,dt + \int_{A+1}^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\,dt \le \int_A^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\,dt \le \varepsilon^2$, donc $\|f-g\| \le \varepsilon$.

Cela prouve que $f \in \overline{K}$ et donc que K est dense dans H.

b) Comme $f \in K$, il existe $\eta \in]0,1]$ tel que F est nulle sur $]0,\eta]$.
F peut donc se prolonger en une fonction continue sur $[0,1]$ (que l'on note encore F).
Par le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $\left|F(x) - P(x)\right| \leq \varepsilon$.
Posons alors, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = P(e^{-t})$.
Par construction, $g \in V$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|f(t) - g(t)\right| = \left|F(e^{-t}) - P(e^{-t})\right| \leq \varepsilon$.
Enfin, $\|f - g\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(t) - g(t)\big)^2 e^{-t}\, dt \leq \varepsilon^2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \varepsilon^2$, donc $\|f - g\| \leq \varepsilon$.

c) On sait que $\mathrm{Vect}\big((L_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \mathbb{R}[X]$, donc il s'agit de démontrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans H.

Soit $(f,\varepsilon) \in H \times \mathbb{R}_+^*$. Selon a) et b), on peut trouver $g \in K$ puis $h \in V$ telles que $\|f - g\| \leq \varepsilon$ et $\|g - h\| \leq \varepsilon$.

On peut écrire $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$ pour un entier n et des réels λ_k convenables.

Selon 4.c), chaque e_k appartient à $\overline{\mathbb{R}[X]}$ et il est facile de montrer par le critère séquentiel que l'adhérence d'un sous-e.v. est aussi un sous-e.v. ; par conséquent, $h \in \overline{\mathbb{R}[X]}$ et il existe donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|h - P\| \leq \varepsilon$.

L'inégalité triangulaire donne $\|f - P\| \leq 3\varepsilon$, donc $f \in \overline{\mathbb{R}[X]}$ et $\mathbb{R}[X]$ est bien dense dans H.