D.M. 11 : Approximation uniforme en var complexe et approximation de Laguerre

Pour le lundi 23 janvier 2023

Les deux parties sont indépendantes. La seconde est sûrement plus facile mais correspond à la seconde partie du cours du chapitre T4 d'où l'ordre choisi.

Partie I : Approximation uniforme en variable complexe

On note D (resp. D_f) le disque unité ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions continues de D_f dans $\mathbb{C}$ qui sont développables en série entière sur D ce qui signifie qu'il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, z \in D,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

(La lettre $\mathbb{A}$ signifie *analytiques* qui est une façon d'appeler de telles fonctions mais ici on demande en plus que ces fonctions soient continues au bord du disque).

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathbb{A}$ qui converge uniformément sur D_f vers une fonction f.

1) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in D_f,\ |f_n(z)| \leq M$.

   (On dit que la suite (f_n) est uniformément bornée sur D_f.)

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in D$ on écrit $f_n(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} z^p$.

   a) Pour $r \in]0,1[$ et $p \in \mathbb{N}$ exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ipt} f_n(re^{it})\, dt$ en fonction de r et $a_{n,p}$.

   Il s'agit à un facteur $1/(2\pi)$ près du p-ième coefficient de Fourier complexe de $t \mapsto f_n(re^{it})$ cf. théorème de Liouville pl. S3

   b) Montrer : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ |a_{n,p}| \leq M$.

   c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $(a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ_p sa limite.

3) Montrer que $f \in \mathbb{A}$.

   Indication : z étant fixé dans D, envisager la série de fonctions $\sum u_p$, où $u_p : \mathbb{N} \to \mathbb{C},\ n \mapsto a_{n,p}\, z^p$. Le fait que la variable de ces fonctions soit dans $\mathbb{N}$ ne change rien aux théorèmes du cours du chapitre S2.

4) L'analogue du théorème d'approximation de Weierstrass du cours pour l'approximation uniforme en variable réelle de toutes les $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ par des polynômes est-il vrai dans $\mathcal{C}(D_f,\mathbb{C})$? Autrement dit : est-ce que toute $f \in \mathcal{C}(D_f,\mathbb{C})$ est limite uniforme de polynômes sur D_f ?

5) **Application du résultat précédent, en enlevant la continuité au bord :** pour $r \in]0,1[$ on note $D_{f,r}$ le disque fermé de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon r.

   Soit (g_n) une suite de fonctions de D dans $\mathbb{C}$, toutes développables en série entière sur D. On suppose que (g_n) converge simplement sur D vers une fonction g et que pour tout $r \in]0,1[$ la convergence est uniforme sur $(D_f)_r$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $r \in]0,1[$ et $z \in D_f$ on pose $f_{r,n}(z) = g_n(rz)$ et $f_r(z) = g(rz)$.

   a) Justifier ces définitions. Montrer que $f_{r,n} \in \mathbb{A}$ et que la suite $(f_{r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f_r sur D_f.

   b) Montrer que g est développable en série entière sur D.

   Remarque : on vient de montrer qu'une suite (g_n) de fonctions D.S.E. sur le disque ouvert D qui CVU sur tout compact de D a sa limite qui est aussi D.S.E. sur D. Ce théorème est à ranger dans la famille des théorèmes de « régularité » d'une limite ! Il est beaucoup plus pratique que le théorème sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ pour ce qui est de l'hypothèse à vérifier !

Partie II : Polynômes de Laguerre : un résultat de densité

On note H l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que la fonction $t \mapsto f(t)^2\,e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $(f,g) \in H^2$ on pose $(f\,|\,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,e^{-t}\,dt$.

1) Montrer que H est un sous-e.v. de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, que l'application $(\cdot|\cdot)$ est bien définie sur H^2 et que c'est un produit scalaire.

   On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

   Dans toute la suite, on confondra un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynomiale de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est associée.
   Avec cette convention, il est clair que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de H.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on pose $\pi_n(t) = t^n e^{-t}$ et $L_n(t) = \dfrac{(-1)^n e^t \pi_n^{(n)}(t)}{n!}$.

2) Montrer que L_n est un polynôme de degré n et expliciter ses coefficients

3) a) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer : $\forall k \in [[0,n]],\ (L_m\,|\,L_n) = \dfrac{(-1)^{n+k}}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_m^{(k)}(t)\,\pi_n^{(n-k)}(t)\,dt$.

   b) En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}[X]$

4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on pose $e_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$.

   a) Pour quelles valeurs de α la fonction e_α appartient-elle à H ?

   b) On suppose désormais cette condition remplie.

   c) Calculer $(L_n\,|\,e_\alpha)$, puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(L_n\,|\,e_\alpha)^2$.

   d) En déduire que e_α appartient à l'adhérence de $\mathbb{R}[X]$ dans H.

5) On note $K = \{f \in H\,;\,\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in [A,+\infty[,\ f(t) = 0\}$ et $V = \mathrm{Vect}\big((e_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$.

   a) Montrer que K est dense dans $\big(H, \|\cdot\|\big)$.

   b) Soient $f \in K$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $g \in V$ telle que $\|f-g\| \le \varepsilon$.
   Indication – envisager la fonction $F :]0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(-\ln x)$.

   c) Conclure que $\mathrm{Vect}(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\big(H, \|\cdot\|\big)$.