D.M. 10 : Inversion de Fourier, solutions

1)a) (i) Soit $f \in \mathscr{L}^1$ et $F(x,t) = f(t)e^{-2i\pi xt}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}, t \mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|F(x,t)| = |f(t)|$ et $f \in \mathcal{L}^1$.

• Pour tout $t \in \mathbb{R}, x \mapsto F(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale de Lebesgue, $\boxed{\widehat{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}, |\widehat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|.|e^{-2i\pi tx}|dt$ par inégalité triangulaire sur les intégrales, et donc comme $|e^{-2i\pi tx}| = 1$,

$$\forall\, x \ \in \ \mathbb{R},\ |\widehat{f}(x)| \leqslant \|f\|_1$$

Donc

$$\boxed{\widehat{f} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } \|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \quad (*).}$$

Par linéarité de l'intégration, $\mathcal{F}$ est linéaire entre $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{C}_\mathcal{B}$ et l'inégalité $(*)$ montre que

$$\boxed{\mathcal{F}\ :\ (\mathscr{L}^1, \|\ \|_1) \to (\mathcal{C}_\mathcal{B}, \|\ \|_\infty) \text{ est continue.}}$$

1) b) Soit $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_a^b e^{-2i\pi tx} dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\mathcal{F}(f)(x) = -\frac{1}{2i\pi x}\left[e^{-2i\pi tx}\right]_a^b = \frac{1}{2i\pi x}\ (e^{-2i\pi ax} - e^{-2i\pi bx})$$

Dans le cas particulier où $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$, la formule précédente devient :

$$\boxed{\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-a,a]})(x) = \frac{1}{\pi x}\sin(2\pi ax) = 2a.\text{sinc}(2\pi ax)}$$

où sinc $(u) := \sin(u)/u$ pour $u \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$.

Si $x = 0$ et $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ alors :

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_a^b 1 = b - a,$$

et dans le cas de $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ alors :

$$\mathcal{F}(f)(0) = 2a = 2a\text{sinc}(0)$$

Donc dans ce cas on a donc $\boxed{\mathcal{F}(f) : x \mapsto 2a\ \text{sinc}(2\pi ax)}$, sur $\mathbb{R}$ entier.

1) c) Soit $a = 1/(2\pi)$. Par ce qui précède $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-a,a]})\ :\ \ x \mapsto \frac{1}{2}\text{sinc}(x)$.

Montrons que la fonction sinc n'est *pas* intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de montrer que $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin(x)}{x}|dx = +\infty$.

Notons $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin(x)}{x}|dx$ on va montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Pour $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$, $|\frac{\sin(t)}{t}| \geq \frac{1}{n\pi}|\sin(t)|$ donc $u_n \geq \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt = \frac{2}{n\pi}$ TGSD

Donc $\sum |u_n|$ DIV et la conclusion : $\mathcal{F}(f)$ n'est pas intégrable pour $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$).

1) d) On a vu à l'inégalité $(*)$ du 1) a) que :

$$\boxed{\forall\, f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}),\ \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1}$$

On sait donc déjà que la norme d'opérateur de $\mathcal{F}$ vérifie :

$$|||\mathcal{F}||| \le 1 \tag{1}$$

D'autre part, si on fixe un $a > 0$ et qu'on considère $f = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ alors d'une part

$$\|f\|_1 = \int_{-a}^{a} 1dt = 2a \tag{2}$$

et d'autre part, par le calcul du 1, b) on sait que :

$$\forall\, x \ne 0,\ |\mathcal{F}(f)(x)| = |\frac{1}{\pi x}\sin(2\pi a x)| \le 2a = \mathcal{F}(f)(0)$$

donc

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = 2a \tag{3}$$

Avec (1), (2), (3), on conclut que :

$$\boxed{|||\mathcal{F}||| = 1}$$

2) a) f_1 est continue par morceaux, $f_1(t) = 0$ si $t < 0$ et si $t > 0$, $|f_1(t)| = e^{-\operatorname{Re}(a)t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{-2}\right)$.
Donc $f_1 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\widehat{f_1}$ est bien défnie.

$$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R},\ \widehat{f_1}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i x t} e^{-at}dt = \left[-\frac{e^{-t(a+2i\pi x)}}{a+2ix\pi}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2i\pi x}$$

2) b) On montre de même qu'au a) que f_2 et f_3 sont intégrables au sens de Lebesgue.
On calcule de même

$$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R},\ \widehat{f_2}(x) = \frac{1}{a-2i\pi x},$$

et comme $f_3 = f_1 + f_2$, on en déduit par linéarité de $\mathcal{F}$ que :

$$\widehat{f_3} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2} : x \mapsto \frac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}.$$

3) a) Avec les notations de 1.a.
• $x \mapsto F(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t) = (-2i\pi t)^k F(x,t) \quad \text{donc } \left|\frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)\right| = 2\pi\left|t^k f(t)\right|$$

.

• On déduit de l'égalité précédente, et de l'hyp. de l'énoncé que toutes les $t \mapsto \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(x,t)$ sont majorées, indépendamment de x, par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ qui est $t \mapsto 2\pi\left|t^k f(t)\right|$ On en déduit par théorème de dérivation des intégrales à paramètres (dérivation sous le signe intégrale) que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t x}(-2it\pi)^k f(t)dt.$$

Ainsi

$$\boxed{\widehat{f}^{(n)} = \mathcal{F}(g_n) \text{ où } g_n\ :\ t \mapsto (-2it\pi)^n f(t).}$$

3) b) Soit n comme dans l'énoncé, montrons par récurrence finie sur $k \in [\![0,n]\!]$ que la propriété $H(k)$ suivante est vraie :

$$H(k)\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k\ \widehat{f}(x).$$

• Initialisation pour $k = 0$ triviale.
• Hérédité : supposons $H(k)$ vraie pour un $k \leq n-1$, montrons que $H(k+1)$ est vraie.

Remarque préliminaire : Comme $f^{(k+1)} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ par hyp., on a $\displaystyle\int_a^x f^{(k+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire, d'après le lien intégrales primitives pour les fonctions continues $f^{(k)}(x) - f^{(k)}(a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. De même pour $x \to -\infty$.

Donc $f^{(k)}$ a une limite finie en $\pm\infty$, mais comme elle est intégrable cette limite est forcément nulle.

On peut alors dans $\widehat{f^{(k+1)}}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k+1)}(t)e^{-2i\pi tx}dt$ effectuer une I.P.P. avec

$$\begin{cases} u'(t) = f^{(k+1)}(t) \Leftarrow u(t) = f^{(k)}(t) \\ v(t) = e^{-2i\pi tx} \Rightarrow v'(t) = -2i\pi x e^{-2i\pi tx} \end{cases}$$

I.P.P. possible directement dans l'intégrale généralisée puisque le terme de bord $u(t).v(t) = f^{(k)}(t)e^{-2i\pi tx}$ admet une limite finie en $\pm\infty$, qui est nulle.

Par I.P.P., on obtient donc :

$$\widehat{f^{(k+1)}}(x) = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi x) f^{(k)}(t)e^{-2i\pi tx}dt = (2i\pi x)\widehat{f^{(k)}}(x).$$

et par application de $H(k)$, on obtient alors $H(k+1)$, ce qui donne l'hérédité.

La récurrence est établie, la propriété $H(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

3) c) On remarque que $\forall\ t \in \mathbb{R},\ f_4(t) = \frac{1}{k!(-2i\pi)^k}(-2i\pi t)^k f_1(t)$. De la question 3) a) on déduit que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \widehat{f_4}(x) = \frac{1}{k!(-2i\pi)^k}\left(\widehat{f_1}\right)^{(k)}(x)$$

et avec le calcul de $\widehat{f_1}$ fait à la question 2.a) on conclut que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \widehat{f_4}(x) = \frac{1}{(a + 2ix\pi)^{k+1}}$$

4) On a vu au 1. a) que pour $f \in \mathscr{L}^1$ on a $\widehat{f} \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$. Or le produit d'une fonction dans $\mathscr{L}^1$ par une fonction c.p.m bornée est dans $\mathscr{L}^1$ car elle est c.p.m. et avec les notations ici

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)\widehat{g}(t)| \leq M.|f(t)|$$

où $M = \|\widehat{g}\|_\infty$ et $t \mapsto M.|f(t)|$ est intégrable.

Ainsi $f.\widehat{g}$ est $\mathscr{L}^1$ et de même pour $g.\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$ pour les mêmes raisons en échangeant les rôles de f et g.

La formule d'échange admise repose sur le théorème de Fubini pour les intégrales doubles, qui n'est pas au programme, qui dit qu'on peut sous certaines hypothèses raisonnables d'intégrabilité, échanger l'ordre d'intégration et écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} g(x)\widehat{g}(x)dx \quad &\overset{def}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2i\pi tx}dt)dx = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t)e^{-2i\pi tx}dt)dx \\ &\overset{Fubini}{=} \quad \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t)e^{-2i\pi tx}dx)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi tx}dx)dt \\ &\overset{def}{=} \quad \int_{\mathbb{R}} g\widehat{f}. \end{aligned}$$

5) a) D'après le 2) b) avec $a = \frac{2\pi}{n}$ dans f_3, on a :

$$\widehat{g_n}(x) = \frac{n}{\pi\,(1 + n^2x^2)}.$$

On fixe un $t \in \mathbb{R}$. Comme g_n est intégrable, c'est aussi le cas de $G_n : x \mapsto g_n(x)e^{2\pi itx}$ qui a même module que g_n et on déduit de 4) appliqué à f et G_n :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g_n(x)e^{2i\pi tx}dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{G_n}(y)dy. \tag{4}$$

Or par définition de la tranformée de Fourier et de G_n :

$$\widehat{G_n}(y) = \int_{\mathbb{R}} G_n(x)e^{-2i\pi xy}dx = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)e^{-2ix\pi(y-t)}dx = \widehat{g_n}(y-t). \tag{5}$$

5) b) On fixe $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\varphi_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{f}(x)g_n(x)e^{2i\pi tx}$.

- la suite de fonctions (φ_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\varphi : x \mapsto \widehat{f}(x)e^{2i\pi tx}$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\widehat{f}(x)g_n(x)e^{2i\pi tx}\right| \leqslant |\widehat{f}(x)|$, majorant indépendant de n, et $\mathscr{L}^1$ par hypothèse.

Donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g_n(x)e^{2i\pi tx}dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(t).$$

5) c) (i) Avec le résultat du a), on calcule $\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}$ via le changement de variable $u = nx$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{g_n} = \frac{1}{\pi}[\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = 1$.

(ii) Suivant l'énoncé, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-t)dy - f(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-t)dy - f(t)\int_{\mathbb{R}}\widehat{g_n}(y)dy \quad \text{par (i)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y+u)\widehat{g_n}(u)du - f(t)\int_{\mathbb{R}}\widehat{g_n}(u)du \quad \text{par chgt de var.}\\
&= \int_{\mathbb{R}}(f(u+t)-f(t))\widehat{g_n}(u)du \qquad (6)
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en t, il existe un $\eta > 0$ tel que :

$$\text{si } |u| \le \eta \quad \text{alors} \quad |f(t+u) - f(t)| < \varepsilon. \tag{7}$$

On décompose alors le second membre de (6) en :

$$\int_{\mathbb{R}}(f(u+t)-f(t))\widehat{g_n}(u)du = \int_{|u|\le\eta}(f(u+t)-f(t))\widehat{g_n}(u)du + \int_{|u|>\eta}(f(u+t)-f(t))\widehat{g_n}(u)du \tag{8}$$

Par (7), et positivité de $\widehat{g_n}$ (cf. calcul du 5)a) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{|u|\le\eta}|f(u+t)-f(t)|.|\widehat{g_n}(u)|du \le \varepsilon\int_{|u|\le\eta}\widehat{g_n}(u)du \le \varepsilon\int_{\mathbb{R}}\widehat{g_n}(u)du = \varepsilon \tag{9}$$

D'autre part,

$$|f(t)\int_{|u|>\eta}\widehat{g_n}(u)du| = |f(t)|(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n\eta)) \tag{10}$$

par le calcul explicite de primitive de $\widehat{g_n}$, et enfin par positivité, parité de $\widehat{g_n}$ et décroissance sur $\mathbb{R}^+$:

$$|\int_{|u|>\eta}f(t+u)\widehat{g_n}(u)du| \le \int_{|u|>\eta}|f(t+u)||\widehat{g_n}(u) \le \widehat{g_n}(\eta)\int_{|u|>\eta}|f(t+u)|du \ \le \widehat{g_n}(\eta)\|f\|_1. \tag{11}$$

Or dans (10) et (11) les deux majorants tendent vers zéro quand $n \to +\infty$, donc par inégalité triangulaire, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\ n \ge n_0,\ |\int_{|u|>\eta}(f(u+t)-f(t))\widehat{g_n}(u)du| \le \varepsilon \tag{12}$$

Par (8), (9), (12), on a bien montré que :

$$\forall\, n \geq n_0,\ |\int_{\mathbb{R}} (f(u+t) - f(t))\widehat{g_n}(u)du| < 2\varepsilon$$

c'est-à-dire par (6) que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-t)dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

Par a), b) et l'unicité de la limite, on conclut bien que $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(t) = f(t)$ ouf !

7)a) Par linéarité de la transformée de Fourier, $\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ donc ici :

$$\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t}) - \mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0 \tag{13}$$

Or pour chaque $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, par 3) b) à t fixé :

$$\mathcal{F}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(t,y) = (2i\pi y)^2 \mathcal{F}(u)(t,y) = -4\pi^2 y^2 \mathcal{F}(u)(t,y) \tag{14}$$

D'autre part, par définition : $\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(t,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-2i\pi xy}dx$.

En admettant que les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale soient vérifiées (essentiellement que $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \in \mathscr{L}^1$), on obtient :

$$\mathcal{F}(\frac{\partial u}{\partial t})(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-2i\pi xy}dx = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,y) \tag{15}$$

Avec (13), (14), (15), on obtient :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(t,y) + 4\pi^2 y^2 \mathcal{F}(u)(t,y) = 0 \tag{16}$$

Pour chaque y fixé, ceci donne un E.D. du premier ordre en la variable t que l'on sait résoudre en :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \widehat{u}(t,y) = \widehat{u}(0,y)e^{-4\pi^2 y^2 t}$$

Pour obtenir la formule de l'énoncé, reste à remarquer que $\widehat{u}(0,y) = \widehat{u_0}(y)$ puisque la T.F. se fait à t fixé, ce qui donne bien :

$$\widehat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y)e^{-4\pi^2 y^2 t} \quad (\dagger)$$

7) b) En partant du second membre de $(\dagger)$:

$$\begin{aligned} \widehat{u_0}(y)e^{-4\pi^2 y^2 t} &= \widehat{u_0}(y).\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(x \mapsto e^{-4\pi^2 x^2 t}))(y) \\ &= \Big(\mathcal{F}(u_0 * \overline{\mathcal{F}}(x \mapsto e^{-4\pi^2 x^2 t})\Big)(y) \quad \text{par la prop. admise au 6)} \end{aligned}$$

et par injectivité de $\mathcal{F}$ (avec le théorème d'inversion), on conclut bien avec $(\dagger)$ que

$$u(t,x) = u_0 * \overline{\mathcal{F}}(y \mapsto e^{-4\pi^2 y^2 t})(x).$$

En écrivant $u = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{u})$, on obtient :

$$u(x,t) = (\overline{\mathcal{F}}(\widehat{u_0}) * \overline{\mathcal{F}}(y \mapsto e^{-4\pi^2 y^2 t}))(x). \tag{17}$$

. D'autre part, l'exercice de la planche sur la transformée de Fourier d'une Gaussienne se généralise facilement pour montrer que :

si $a > 0$ et $g(x) = \exp(-ax^2)$ alors $\mathcal{F}(g)(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2}{a}y^2}$.

Donc en sens inverse si $h(y) = e^{-\frac{\pi^2}{a}y^2}$ alors $\overline{\mathcal{F}}(h)(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\exp(-ax^2)$.

Ici avec $a = 1/(4t)$ dans la formule précédente, on obtient dans (17) :

$$u(x,t) = (u_0 * g_t)(x)$$

avec $g_t : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp(-x^2/(4t)))$ autrement dit, par déf. de. la convolution :

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x-y)e^{-y^2/(4t)}dy$$