D.M. 10 : Inversion de Fourier

Pour le lundi 9 janvier

Notation :

- L'espace vectoriel $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est muni de la norme infinie : $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$
- $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est muni de la norme 1 définie par $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f|$.

Pour tout $f \in \mathscr{L}^1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt \quad (\dagger)$$

On notera au moins de 1) à 3), la variable dans f avec la lettre t et la variable dans $\widehat{f}$ avec la lettre x

Par exemple en traitement du signal t est un temps et x une fréquence.

1) **L'opérateur transformée de Fourier de $\mathscr{L}^1$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$**
   a) Montrer que l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$ envoie tous les éléments de $\mathscr{L}^1$ sur des éléments de $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ et que $\mathcal{F} : \quad (\mathscr{L}^1, \|\ \|_1) \to (\mathcal{C}_{\mathcal{B}}, \|\ \|_\infty)$ est linéaire continue.
   b) Soient $a < b$ deux réels et $f = \mathbf{1}_{[[a,b]}$ la fonction indicatrice du segment $[a,b]$ qui vaut 0 en dehors de $[a,b]$ et 1 sur $[a,b]$. Calculer $\mathcal{F}(f)$. En déduire en particulier $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-a,a]})$
   c) Justifier qu'il existe des éléments $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{F}(f) \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.
   d) Déterminer la norme d'opérateur de $\mathcal{F} : \quad (\mathscr{L}^1, \|\ \|_1) \to (\mathcal{C}_{\mathcal{B}}, \|\ \|_\infty)$
2) **Quelques calculs élémentaires :**
   a) Si on note $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction échelon de Heaviside, on note $f_1 \ : \ t \mapsto e^{-at} H(t)$ où $a \in \mathbb{C}$ est tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$; calculer $\widehat{f_1}$.
   b) Calculer de même $\widehat{f_2}$ et $\widehat{f_3}$ où $f_2 \ : \ t \mapsto e^{at} H(-t)$ et $f_3 \ : \ t \mapsto \exp(-a|t|)$.
3) **Formules pour $\mathcal{F} \circ D$ et $D \circ \mathcal{F}$ où D est l'opérateur de dérivation :**
   a) Montrer que si, pour tout $k \in [\![0,n]\!], t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et exprimer $\widehat{f}^{(n)}$ comme la transformée de Fourier d'une fonction à préciser.
   b) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C}) \bigcap \mathscr{L}^1$ et si pour tout $k \in [\![0,n]\!], f^{(k)} \in \mathscr{L}^1$, alors, pour tout $k \in [\![0,n]\!], \widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k \widehat{f}(x)$.
   c) Déduire du a) le calcul de $\widehat{f_4}$ si $f_4 : t \mapsto \frac{t^k}{k!} f_1(t)$.
4) **Un lemme admis pour la formule d'inversion de $\mathcal{F}$ à venir : la « formule d'échange »**
   Si f et g sont éléments de $\mathscr{L}^1$, montrer qu'alors $f.\,\widehat{g}$ et $\widehat{f}.\,g$ sont éléments de $\mathscr{L}^1$.
   De quel genre de résultat aurait-on besoin pour prouver la formule suivante, *admise ici* :
   $$\int_{\mathbb{R}} f.\,\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}.\,g$$
5) **L'opérateur $\overline{\mathcal{F}}$ et le théorème d'inversion de Fourier dans $\mathscr{L}^1$**
   Pour $f \in \mathscr{L}^1$, on définit :
   $$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi i t x} dt.$$
   On veut prouver le :

   Théorème : si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est telle que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors en tout point t où f est continue, on a l'égalité :
   $$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(t) = f(t).$$
   On dira : $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$ sauf aux points de discontinuité de f.

   Dans ce qui suit, on suppose que f vérifie les hypothèses du théorème.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, et tout $t \in \mathbb{R}$ on pose $g_n(t) = \exp\left(-\frac{2\pi}{n}|t|\right)$. Déterminer $\widehat{g_n}$.
Montrer que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-t)dy$$

b) Montrer que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g_n(x) e^{2i\pi tx} dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(t).$$

c) On va montrer que si f est continue au point t alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-t)dy$, qui est le membre de droite de l'égalité du a), converge vers $f(t)$.

(i) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n}$.

(ii) Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que f est continue en t. En écrivant :

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\widehat{g_n}(y-t)dy - f(t) = \int_{\mathbb{R}} (f(t+u) - f(t))\widehat{g_n}(u)du$$

montrer le résultat annoncé au début de ce c) et conclure la démonstration du théorème d'inversion de Fourier $\mathscr{L}^1$ (attention question plus longue).

6) **Paragraphe « avec les mains » : on admet tout [1] pas de questions !**
Dans ce qui suit, on admet des résultats pour arriver à une application concrète et significative de la transformation de Fourier au 7) !
Pour $f, g \in \mathscr{L}^1$, on admet [2] qu'on peut définir leur *produit de convolution* $f * g$ en posant :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) = g * f(x),$$

et que $f * g$ est aussi $\mathscr{L}^1$.
Cette opération de convolution est fondamentale dans toute la théorie du filtrage aussi bien que de l'approximation des fonctions (cf. chapitre T4). Dans ce cadre, une propriété fondamentale de la transformation de Fourier est qu'elle transforme la convolution en produit usuel et inversement :

$$\text{si } f, g \in \mathscr{L}^1, \quad \text{alors} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \widehat{f*g}(x) = \widehat{f}(x).\widehat{g}(x), \tag{1}$$

$$\text{si } f, g \in \mathscr{L}^1 \text{ et } \widehat{f}, \widehat{g} \in \mathscr{L}^1 \quad \text{alors} \quad \widehat{f.g} = \widehat{f} * \widehat{g}. \tag{2}$$

On comprend bien qu'on peut passer de (1) à (2) par le théorème d'inversion de Fourier qu'on a démontré ci-dessus.

7) **Résolution de l'équation de la chaleur sur une barre bi-infinie :**
On fixe une fonction $u_0 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\widehat{u} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
On cherche les fonctions $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto u(t,x)$, vérifiant l'équation aux dérivées partielles avec une répartition initiale au temps 0 fixée : $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$

a) On note $\widehat{u}$ la transformée de Fourier partielle à t fixé :

$$\widehat{u} : (t,y) \mapsto \int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-i2\pi xy}dx$$

A l'aide des résultats du 3), sans s'occuper des hypothèses de régularité pour ces formules, ni des hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale, montrer que $\widehat{u}$ vérifie une équation différentielle très simple et obtenir la formule :

$$\widehat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y)e^{-4\pi^2y^2t}$$

b) En déduire que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $u(t,x) = u_0 * \overline{\mathcal{F}}(y \mapsto e^{-4\pi^2y^2t})(x)$.
A l'aide d'un exercice de la planche I3, conclure que :

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(x-y)e^{-y^2/(4t)}dy$$

ce qui donne belle description de ces solutions comme convoluées de u_0 avec une Gaussienne.

1. *Better a house without roof than a house without view :* cette fin de DM ne suit pas les standard de rigueur d'un écrit de maths de prépa. mais le but est de voir une application à un problème extérieur à la théorie !
2. c'est en fait vrai « pour presque tous les x »