Banque CCINP : Ex 1, 5 (cf. ex. ci-dessous) et Ex. 6,7.

Séries à t.g. de signe constant ou ACV

Exercice 1 (Séries de Bertrand)**.** a) Banque CCINP Ex 5 : Etudier la série de t.g. $1/(n\ln^{\beta}(n))$ par comparaison avec une intégrale.

b) Généralisation : Nature, suivant $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$.

Exercice 2. Nature de $\sum u_n$ pour :

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$,

b) $u_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$.

Exercice 3. Nature de la série de terme général : $u_n = n^{-\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$.

Exercice 4. Etudier les séries de termes généraux :

a) $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n+a}\right)^{n}$, ou $a>0$.

b) $w_n = \left(\arccos(\dfrac{n}{n+1})\right)^{\alpha}$ où $\alpha>0$.

Exercice 5. a) A savoir faire comme du cours :

Soit $\alpha>1$. Déterminer un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$. a) Soit $\alpha>1$. Donner un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^{\alpha}}$ quand $n\to+\infty$ (série de Riemann).

b) Obtenir un deuxième terme pour le D.A. de R_n.

Exercice 6. Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\sin(\theta/k)$, où $\theta\in\mathbb{R}^+$ est fixé.

Exercice 7. Soit $a>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $u_n = a^{1+1/2+\cdots+1/n}$.
Etudier la nature de la série de terme général u_n

Exercice 8. Nature suivant $\alpha>0$ de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)$.

Exercice 9 (Série convergeant vite : Mines-Ponts 2021)**.**

Soit $f : [1,+\infty[\to\mathbb{R}_*^+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$.

a) Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.

b) Donner un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1}f(k)$ quand $n\to+\infty$.

Séries à t.g. de signe variable

Exercice 10 (CCINP MP 2017)**.** Pour tout $n\geq 2$, on pose $U_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

L'énoncé faisait admettre que $|\ln(U_{2k+1})|-|\ln(U_{2k})| = -\ln(1+\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}})$. Vérifiez-le.

a) La série $\sum\ln(U_n)$ est-elle à signe alternée ?

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq 1/2$. En déduire que :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ |\ln(U_{2k+1})|-|\ln(U_{2k})|>0$$

c) La série $\sum\ln(U_n)$ vérifie-t-elle les conditions du théorème de convergence des séries alternées ?

d) Etudier la convergence de $\sum\ln(U_n)$ à l'aide d'un D.L. à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$.

Exercice 11. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Etudier la suite (u_n) quand $n\to+\infty$.

b)Soit $\alpha>0$ et $k\in\mathbb{R}^*$. Etudier la nature de la série de t.g. $u_n = \sin(\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}+\dfrac{k}{n^{5\alpha}})$.

Lien suite/série

Exercice 12. a) Etudier la convergence de la *suite* (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \exp\Big(\frac{1}{n+k}\Big) - n$$

Indication – On pourra considérer $u_{n+1} - u_n$.

b) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2} e^x$.

c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 13. Soit $\alpha > 0$ et (u_n) définie par $u_1 > 0$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

CNS sur α pour que (u_n) CV.

Exercice 14 (Suites récurrentes, équivalent en un point fixe attractif)**.** Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ ayant un D.L. en 0 de la forme $f(x) = \alpha x + \beta x^r + o(x^r)$ avec $|\alpha| \in]0,1[$, $\beta \neq 0$ et $r > 1$ (on suppose ici r entier puisqu'il s'agit d'un D.L.).

a) Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 inclus dans V, stable par f et tel que si on prend $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on ait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $\alpha_1 > |\alpha|$, $u_n = O(\alpha_1^n)$.

b) Montrer, avec les notations du a), qu'on a, mieux, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma\alpha^n$ où $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Indication – Pour montrer la convergence de (u_n/α^n) vers une limite finie non nulle, on gagnera à considérer celle de son logarithmique (ou plutôt de $\ln(|v_n|$ en justifiant d'abord que (v_n) est de signe constant A.P.C.R) , et on utilisera le lien suite/série.

Calculs de sommes :

Exercice 15. Soit $u_n = \dfrac{2n-1}{n^3 - 4n}$. Calculer $S = \sum_{n=3}^{+\infty} u_n$.

Exercice 16. a) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Calculer la limite quand $n \to +\infty$, de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 18 (Avec le D.A. de H_n)**.** a) Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ où γ est une constante réelle.

b) Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 19. Convergence et somme de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n}(\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$. Indication : si n et $n+1$ sont dans le même intervalle $[\![\ldots[\![$ alors $u_n = \ldots$.

Problèmes de sommations par paquets

Exercice 20 (Sommation par paquets tendant vers zéro pour un série convergente de signe qcq)**.** Soit $\sum u_n$ une série et $q_0 < q_1 < \cdots < q_n < \ldots$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \sum_{k=q_n}^{q_{n+1}-1} u_k$ le n-ième *paquet* de $\sum u_n$ associé.

a) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors la série des paquets, $\sum w_n$ est convergente.

b) Montrer sur un exemple que la récip. est fausse.

c) Montrer en revanche que la récip. est vraie si on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que l'effectif des paquets est majorée indépendamment de n, i.e. $\exists\, M > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} - q_n < M$.

N.B. En particulier le résultat du c) s'applique avec des paquets d'effectif fixe (paquets de deux, de trois etc), l'hyp. clef étant alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 21 (Des paquets de deux pour se ramener à des S.T.P. : très fréquent Mines-Ponts)**.** Montrer que la série de terme général $R_n = \sum_{k\geq n+1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

CV non commutative et commutatives

Exercice 22. A partir de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on forme une nouvelle série, en écrivant les termes dans l'ordre suivant : p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs, etc, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ fixés, l'ordre relatif des termes positifs n'est pas changé, ni celui des termes négatifs. Montrer que la série obtenue converge alors vers $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Exercice 23. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ est convergente.

Suites doubles (familles sommables)

Exercice 24. A quelle condition nécessaire et suffisante sur le réel α la série double $\sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$ converge-t-elle ?

Exercice 25. Montrer la convergence et la somme de la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exercice 26. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = e\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}.$$

I.P.P. discrète pour les séries semi-convergentes

Exercice 27 (Séries semi-convergentes dont on montre la CV grâce à une IPP discrète, comparer au I1)**.** On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et une suite complexe $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})V_k + u_n V_n$$

(formule d'I.P.P. discrète, appelée transformation d'Abel : pourquoi parle-t-on d'I.P.P. discrète ?)

Indication – Pour aller de gauche à droite, on pourra remarquer qu'en posant $V_{-1} = 0$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = V_k - V_{k-1}$.

b) En déduire le théorème d'Abel (H.P.) suivant : si (V_n) est bornée, et la suite (u_n) est décroissante, tendant vers 0, alors $\sum u_k v_k$ converge.

c) A l'aide du b) démontrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$ et $\sum \frac{\cos(kx)}{k}$ convergent. ou encore pour que pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ $\sum \frac{z^n}{n}$ converge.

Quel résultat retrouve-t-on si $z = -1$?

Lien avec la physique : les fonctions $f : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\omega t)}{k}$ et $g : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\omega t)}{k}$ sont écrites sous forme des *développements en série trigonométrique*.

On peut montrer que $f(t) = \frac{\pi - \omega t}{2}$ et $g(t) = -\ln(2\sin(\omega t/2))$ et que les séries précédentes sont les *développement de Fourier* de f et g.

Solution 1 a) Cf Banque CCINP., on montre que la série CV ssi $\beta > 1$.

b) (i) Si $\alpha = 1$, le a) donne que $\sum u_n$ CV ssi $\beta > 1$.

(ii) Si $\alpha < 1$ alors $\dfrac{1}{n} = o(\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)})$ par croissance comparée.

Par comparaison pour les S.T.P. , comme $\sum 1/n$ diverge, on a $\sum u_n$ divergente.

(iii) Si $\alpha > 1$ on intercale un $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} = o(1/n^\gamma)$ par croissance comparée.

Par comparaison pour les S.T.P. , comme $\sum 1/n^\gamma$ converge, on a $\sum u_n$ convergente.

Conclusion – jolie Formulation *La série de Bertrand CV ssi* $(\alpha, \beta) >_{lex} (1, 1)$.

Solution 2 La première $\sum u_n$ est convergence car $o(\frac{1}{n^2})$.

La seconde $\sum u_n$ est divergente car $u_n \geq e^{-\ln(n)} = \frac{1}{n}$ et la série harm. diverge.

Solution 3 On note $u_n = \exp(v_n)$ où $v_n = -\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\ln(n)$. Or

$$\begin{aligned}\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}) &= \frac{1+\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)} = \frac{1+1/n+O(1/n^2)}{1-1/n+O(1/n^2)} = (1+1/n+O(1/n^2))(1+1/n+O(1/n^2)) \\ &= 1 + \frac{2}{n} + O(1/n^2)\end{aligned}$$

Donc $v_n = -\ln(n) - \dfrac{2\ln(n)}{n} + O(\dfrac{\ln(n)}{n^2})$.

En fait, on est allé un peu plus loin que nécessaire en précision. Ce qui nous intéresse pour avoir l'équivalent de l'exp. c'est de savoir que $v_n = -\ln(n) + o(1)$. On en déduit que $u_n = \exp(-\ln(n) + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Donc par théorème sur les équivalents pour les STP, comme $1/n$ est TG d'une série DIV, on conclut que $\sum u_n$ DIV.

Solution 4 A chaque fois, on fait un D.L.

a) Pour $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n+a}\right)^n$, on fait un D.L à la précision $O(1/n^2)$ (TGSC).

Avec $v_n = \exp(2n\ln(1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}))) - \exp(n\ln(1 + \dfrac{2}{n} - \dfrac{2a}{n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$ on obtient :

$v_n = e^2\left(\dfrac{2a-1}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$

Donc si $a \neq 1/2$, $\sum v_n$ DIV, et si $a = 1/2$ elle CV.

b) Pour $w_n = \arccos(\dfrac{n}{n+1})^\alpha$ où $\alpha > 0$. Comme $n/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, l'exercice se ramène à trouver un équivalent de arccos en 1.

Méthode standard pour les fonctions réciproques : on considère $\cos(\arccos(x)) = x$ et comme $\arccos(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$, on peut écrire :

$$\cos(\arccos(x)) = 1 - \frac{\arccos^2(x)}{2} + o(\arccos^2(x)).$$

Autrement dit

$$x = 1 - \frac{\arccos^2(x)}{2} + o(\arccos^2(x)),$$

donc

$$\arccos^2(x) = 2(1-x) + o(\arccos^2(x)) \underset{x\to1}{\sim} 2(1-x).$$

Et comme arccos est *positif*, on conclut que ;

$$\arccos(x) \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}.$$

Une méthode plus rapide un peu astucieuse. *en habillant l'arccos d'un sinus* (alors que d'habitude, pour les équivalents, on déshabille les fonctions)

En effet comme $\arccos(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$, on sait que $\arccos(x) \underset{x\to1}{\sim} \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

Ainsi ici $\arccos(\dfrac{n}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{(n+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{(n+1)^2 - n^2}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.

En prenant la puissance α, on conclut que $\sum w_n$ converge ssi $\alpha > 2$.

Solution 5 a) Par comparaison avec une intégrale $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b)

On considère $R_n - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ et pour avoir une écriture uniforme, on l'écrit :

$R_n - \frac{1}{\alpha-1}\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\Big) = \sum_{k\geq n+1}\Big(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\alpha-1}\big(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\big)\Big)$.

On cherche alors un équivalent simple pour $w_k = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\alpha-1}\big(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\big)$.

$w_k = \frac{1}{k^{\alpha-1}}\Big(\frac{1}{k} + \frac{1}{\alpha-1}\big(1 - \frac{1}{(1-\frac{1}{k})^{\alpha-1}}\big)\Big) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2k^{\alpha+1}}$ après un D.L.

On en déduit par sommation des ~ appliquées aux restes que :

$R_n - \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geq n+1}\frac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^\alpha}$.

D'où $R_n = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})$.

Solution 6 Série à terme positifs, le t.g. est équivalent à $k\theta$ donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \theta\sum_{k=1}^{n} k = \theta n(n+1)/2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\theta/2$.

Solution 7 On sait que $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $u_n = a^{\ln(n)}a^\gamma a^{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^{\ln(n)}a^\gamma$.

Mais $a^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln(a)} = n^{\ln(a)}$.

Donc $u_n \sim \lambda n^{\ln(a)}$ t.g. d'une série de Riemann, qui CV ssi $\ln(a) < -1$ i.e. ssi $a < e^{-1}$.

Solution 8 **(M1)** Par encadrement par des intégrales, on obtient sans peine que $\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_2^n \ln^2(t)dt$.

Par I.P.P., en posant $u(t) = \ln^2(t)$ et $v'(t) = 1$, on a $u'(t) = \frac{2}{t}\ln(t)$ et $v(t) = t$ qui donne que $\int_1^x \ln^2(t)dt = [t\ln^2(t)]_1^x - 2\int_1^x \ln(t)dt$.

On obtient comme primitive $x + x(\ln(x)-1)^2$.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln^2(n)$ et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{n^{\alpha-1}}$.

Ensuite, on est ramené aux séries de Bertrand (cas facile) et on a CV ssi $\alpha > 2$.

(M2) par simples encadrements de la somme $\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)$

Ainsi en majorant simplement cette somme par $n\ln^2(n)$, on a $u_n \leq \frac{n\ln^2(n)}{n^\alpha}$ et donc (Bertrand expliquer), si $\alpha > 2$, la série de t.g. u_n CV

Inversement, en minorant la somme par $n\ln^2(2)$, on minore u_n par $\frac{n\ln^2(2)}{n^\alpha}$ et donc si $\alpha \leq 2$, minoration par un t.g. de série de Riemann DIV, donc la série de t.g. u_n DIV.

Remarque : l'avantage de cette méthode est qu'elle s'applique de même en remplaçant $\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)$ par $\sum_{k=2}^{n}\ln^\beta(k)$ avec $\beta > 0$ quelconque.

Solution 9 a) Soit $A < 0$ fixé.

Par déf. de la limite, il existe un $B > 0$ tel que pour tout $x \geq B$, $f'(x)/f(x) < A$ et donc, par intégration de cette inégalité :

$$\forall\, x \geq B, \ln(f(x)) - \ln(f(B)) \leq A(x-B).$$

Donc, en prenant l'exponentielle de l'inégalité précédente :

$$\forall\, x\ \geq B, 0 \leq f(x) \leq f(B)e^{A(x-B)}.$$

Comme $A < 0$, on a donc majoré pour tout $n \geq B$, $f(n)$ par $f(B)e^{A(n-B)}$ t.g. d'une série CV. Donc (série à termes positifs, thm. de comparaison), $\sum f(n)$ CV.

b) On utilise la majoration qu'on vient de prouver au a) mais en changeant les bornes : on fixe toujours $A < 0$, on a toujours un $B > 0$ tel que :

$$\forall\, x \geq B,\ f'(x)/f(x) < A \quad (*),$$

mais cette fois on considère $n > B$ et on intègre $(*)$ entre n et $n+p$ on obtient :

$$\ln(f(n+p)) - \ln(f(n)) \leq Ap$$

et donc :

$$f(n+p) \leq f(n)e^{Ap}$$

L'avantage de ces inégalité, c'est maintenant on peut les sommer pour $p = 1, \ldots, +\infty$:

$$R_n := \sum_{p=1}^{+\infty} f(n+p) \leq f(n) \sum_{p=1}^{+\infty} e^{Ap} = f(n)\frac{e^A}{1-e^A}$$

Comme $e^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a montré que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ 0 \leq R_n \leq \varepsilon f(n) = \varepsilon u_n$$

Autrement dit, on a montré que $R_n = o(u_n)$.
Mais alors comme $R_{n-1} = u_n + R_n$, cela montre que

$$\boxed{R_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

N.B. On est dans une situation typique de convergence très rapide en $O(e^{-An})$ où l'équivalent du reste est donné par son premier terme.

Solution 10 N.B. Vérification de l'égalité admise : compte tenu des signes de $\ln(U_{2k+1}) < 0$ et $\ln(U_{2k} > 0)$, on a :

$$\begin{aligned}
|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| &= \ln\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}\Big) + \ln\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2k}}}\Big) \\
&= \ln\Big(\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+1}-1}\Big) + \ln\Big(\frac{\sqrt{2k}}{1+\sqrt{2k}}\Big) \\
&= -\ln\Big(\frac{(\sqrt{2k+1}-1)(\sqrt{2k}+1)}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k}}\Big) \\
&= -\ln\Big(\frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k}}\Big) \\
&= = -\ln\Big(1+\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\Big).
\end{aligned}$$

a) La suite est bien à signe alerné car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_{2k} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2k}} > 1$ et $\ln(U_{2k}) > 0$ et $U_{2k+1} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2k+1}} < 1$ donc $\ln(U_{2k+1}) < 0$.

b) Pour l'inégalité demandée, avec l'expression conjuguée :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

puisque au dénominateur $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \geq 1$. Dans l'égalité admise, on a alors $\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k} - 1 \leq 1/2 - 1 = -1/2 < 0$.

Ceci montre que $\ln\Big(1+\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}}\Big) < 0$ et donc par l'égalité admise :

$$|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0$$

c) Le résultat du b) montre que la suite $|\ln(U_n)|$ n'est PAS décroissante. Donc le T.S.A. ne s'applique pas.

d) Avec $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$, on a

$$\ln(U_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big). \quad (*)$$

Les deux derniers termes peuvent d'ailleurs s'écrire $O(\frac{1}{n^{3/2}}$ ce qui est un O d'un terme général de série ACV donc ACV.

Dans la somme $(*)$, dans le membre de droite, on a alors trois termes $(-1)^n/\sqrt{n}$ qui est TGSC par T.S.A., le terme en $O()$ qui est TGSC et un seul terme de série DIV le $1/2n$.

Ceci suffit pour montrer que $\sum \ln(U_n)$ DIV.

Solution 11 a) a) $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big)$.

On ne peut pas utiliser d'équivalent (série à termes de signes non constant) donc on fait un D.L.

Ainsi : $\ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3k^{3/2}} + o(\frac{1}{k^{3/2}})$.

Or $a_n = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ est T.G. d'une serie CV par T.S.A. Par ailleurs $b_n = \frac{(-1)^{k-1}}{3k^{3/2}} + o(\frac{1}{k^{3/2}}) = O(\frac{1}{k^{3/2}})$ est T.G. d'une série ACV par comparaison aux séries de Riemann.

En revanche la série harmonique est divergente, donc $\sum_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. b) *L'essentiel : pourquoi faut-il faire un D.L. à l'ordre* 5 *du sinus ? Pour tenir compte du terme en* $1/n^{5\alpha}$ *dans le D.L.*

Ainsi, avec un D.L. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{5\alpha}} - \frac{(-1)^{3n}}{6n^{3\alpha}} + \frac{(-1)^{5n}}{120n^{5\alpha}} + o(\frac{1}{n^{5\alpha}})$.

On peut décomposer : $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + -\frac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}} + \frac{(-1)^n}{120n^{5\alpha}}$ et $b_n = \frac{k}{n^{5\alpha}} + o(\frac{1}{n^{5\alpha}})$.

La série de t.g. (a_n) est convergente comme somme de série CV par T.S.A.

Comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^{5\alpha}}$, la série de t.g. (b_n) est à termes de signes constant A.P.C.R. (*argument important*).

Ainsi par théorème sur les équivalent $\sum b_n$ et $\sum \frac{k}{n^{5\alpha}}$ ont même nature.

Donc $\sum b_n$ converge si, et seulement si, $5\alpha > 1$, ssi $\alpha > 1/5$.

Par théorème d'addition, comme $\sum a_n$ CV, on a $\sum u_n$ CV ssi $\alpha > 1/5$. □

Solution 12 a)

$$\boxed{\text{Idée : avec } u_{n+1} - u_n \text{ on enlève de } \sum}$$

Ici :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \exp(\frac{1}{2n+2}) + \exp(\frac{1}{2n+1}) - (n+1) - \exp(\frac{1}{n+1}) + n, \\ &= 1 + \frac{1}{2n+2} + 1 + \frac{1}{2n+1} - 1 - 1 - \frac{1}{n+1} + O(1/n^2) \\ &= O(1/n^2) \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n = O(1/n^2)$ est T.G.S.C (absolument même). Donc la suite (u_n) converge.

b) Inégalité de droite : inégalité de Taylor Lagrange.

c) Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \le \exp(\frac{1}{n+k}) - 1 - \frac{1}{n+k} \le \frac{1}{2(n+k)^2} e^{1/(n+k)} \le \frac{e}{2n^2}$

Donc, en sommant : $0 \le u_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \le \frac{e}{2n}$.

Comme $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$ comme somme de Riemann, on a la conclusion.

Solution 13 La suite est visiblement à termes positifs. Immédiatement l'hyp. est plus sympathiquement écrite : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n}$, ce qui donne la croissance de la suite (u_n). Donc par théorème ou bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ou bien (u_n) converge vers un $l \ge u_1 > 0$.

Dans les deux cas, $1/u_n$ est bornée, donc $u_{n+1} - u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$.

- Si $\alpha > 1$ la série de t.g. $u_{n+1} - u_n$ est alors convergente, ce qui signifie que la suite (u_n) converge.
- Réciproquement si (u_n) converge, vers un $\ell \ge u_1 > 0$, on a alors $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$ et $\sum u_{n+1} - u_n$ convergente, donc $\alpha > 1$.

Donc la CNS cherchée est $\alpha > 1$.

Solution 14 a) Comme $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, on sait que $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} |\alpha\,| < 1$.

Donc si on fixe un $\alpha_1 \in]|\alpha|, 1[$ quelconque, par la définition de la limite, il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $x \in V$, $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq \alpha_1$ donc $|f(x)| \leq \alpha_1 |x| \quad (1)$ et donc $|f(x)| < |x| \quad (2)$ si $x \neq 0$.

L'inégalité (2) assure déjà que V est stable par f et par l'inégalité (1) et récurrence immédiate, si $u_0 \in V$, $I u_n| \leq \alpha_1^n |u_0|$ ce qui montre bien que (u_n) converge vers 0 en $O(\alpha_1^n)$.

b) On note $v_n = u_n/\alpha^n$. Il s'agit de montrer que (v_n) converge vers une limite finie non nulle. Pour prendre le logarithme, remarquons d'abord que (v_n) est de signe constant A.P.C.R. : en effet, $v_{n+1}/v_n = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Or comme $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta u_n^r + o(u_n^r)$, on sait que $u_{n+1}/u_n = \alpha + \beta u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Donc $1/\alpha u_{n+1}/u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc v_{n+1}/v_n est positive A.P.C.R, et donc (v_n) est bien de signe constant A.P.C.R.

Ainsi pour montrer la CV de (v_n), il suffit de montrer celle de $(|v_n|)$ et pour la CV vers une limite finie non nulle, il est équivalent de considérer la convergence de $\ln(|v_n|)$.

Pour cette convergence, il est équivalent de montrer que la série de t.g $w_n = \ln|v_{n+1}| - \ln|v_n|$ converge.

Or, $w_n = \ln\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| = -\ln|\alpha| + \ln\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = -\ln|\alpha| + \ln|\alpha + \beta u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})|$.

Donc $w_n = \ln|1 + \beta_1 u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})|$ où $\beta_1 = \beta/\alpha$.

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_1 u_n^{r-1}$.

Comme on a vu au a), que $u_n = O(\alpha_1^n)$ avec $0 < \alpha_1 < 1$, et α_1^n est T.G. d'une série géométrique convergente, on obtient que $|u_n|^{r-1} = O((\alpha_1^{r-1})^n)$ est encore dominée par un T.G. de série géométrique convergente, donc $\sum |u_n|^{r-1}$ converge, et par théorème de comparaisons pour les S.T.P., $\sum w_n$ est absolument convergente donc convergente, ce qui nous donne la conclusion recherchée pour (u_n). □

Solution 15 On calcule la D.E.S. : $u_n = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{1}{n-2} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{1}{n+2}$. Ensuite somme télescopique par réindexation (pôles entiers) Précisément :

$$S = \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{5}{8}\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Donc $S = \dfrac{3}{8}(1 + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{5}{8}(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}) = \dfrac{89}{96}$.

Solution 16 a) Soit $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$: en effet, si on note $U_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2}$, on a $U_N = P_N + I_N$ où $P_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2}$ et $I_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et on peut passer aux limites (qui existent) dans cette égalité.

Donc $S = \dfrac{1}{4}S + S_1$ Donc $S_1 = \dfrac{3}{4}S = \dfrac{\pi^2}{8}$.

b) On note $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en séparant la somme entre termes pairs et impairs. Là encore, comme au a), c'est possible car on le fait pour les sommes finies et on passe à la limite.

Donc $S_2 = \dfrac{1}{4}S - S_1 = \dfrac{\pi^2}{24} - \dfrac{\pi^2}{8} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Solution 17 *Brave somme telescopique*

En effet $u_n = 2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)$.

Donc $S_n = 2\ln(n+2) + \ln(2) - \ln(n+1) - \ln(n+2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Solution 18 Il faut d'abord savoir montrer que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ avec la méthode des sommes telescopiques.

Cela donne immédiatement que $u_n \sim \frac{3}{n^3}$ et donc la convergence (série positive).

Pour la somme, avec D.E.S. : $u_n = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} = 6v_n$ avec $v_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$.

On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

On va utiliser $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad (*)$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= 2H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - 4[H_{2n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 1], \\
&= 2H_n + \frac{1}{n+1} + 3 - 4H_{2n+1} + 2H_n, \\
&= 4H_n - 4H_{2n+1} + \frac{1}{n+1} + 3, \\
&= 4\ln(n) - 4\ln(2n+1) + 3 + o(1) \quad \text{par} \quad (*) \\
&= -4\ln(2) + 3 + o(1).
\end{aligned}$$

Donc la somme cherchée est $6(3 - 4\ln(2))$.

Solution 19 Avec si n et $n+1$ sont dans le même intervalle $[\![p^2, (p+1)^2+1[\![$, on a $p \le \sqrt{n+1} < p+1$ et $p \le \sqrt{n} < p+1$. donc $(\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{n} = p$ et $u_n = 0$.

Donc u_n peut être non nul seulement si n est de la forme $n = (p+1)^2 - 1 = p^2 + 2p$ et donc $n+1 = (p+1)^2$.

Dans ce cas $u_n = \frac{1}{p^2+2p}((p+1) - p) = \frac{1}{p^2+2p}$.

Donc $S_N = \sum_{p, p^2 \le N} \frac{1}{p^2+2p}$. Comme il s'agit d'une S.T.P., on va considérer plutôt des sommes partielles plus simples :

$S_{N^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2+2p}$ et par D.E.S.. $S_{N^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2})$.

En réindexant, on a $S_{N^2} = 3/4 - \frac{1}{2}(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 3/4$.

Solution 20 a) On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note $S'_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.

On a $S'_n = S_{q_{n+1}-1}$. Donc la CV de (S_n) entraîne celle de (S'_n), qui est une suite extraite.

b) Il suffit de prendre $u_n = (-1)^n$. La série $\sum(-1)^n$ est divergente (ses S.P. valent alternativement 1 et -1). En revanche si on regroupe par paquet de deux, $q_0 = 0, q_1 = 2, q_2 = 4$ etc, les $w_n = 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. et $k(n)$ tel que $q_{k(n)} \le n < q_{k(n)+1}$.

Alors $|S_n - S_{q_{k(n)}}| = |u_{q_{k(n)}+1} + \cdots + u_n| \le |u_{q_{k(n)}+1}| + \cdots + |u_n|$ or quand $n \to +\infty$, $q(n) \to +\infty$ et donc chaque terme de cette somme tend vers zéro, or le nombre de termes est majoré par M fini, donc la somme tend vers zéro.

Comme $(S_{q_{k(n)}})$ CV, on conclut que (S_n) CV. □

d) *Ce qui suit généralise le c) donc le rend inutile car si l'effectif des paquets est borné et si chaque terme tend vers zéro, les paquets tendent vers zéro. La démonstration est essentiellement la même que celle du c).*

Soit $n \in \mathbb{N}$. et $k(n)$ tel que $q_{k(n)} \le n < q_{k(n)+1}$.

Alors $|S_n - S_{q_{k(n)}}| = |u_{q_{k(n)}+1} + \cdots + u_n| \le |u_{q_{k(n)}+1}| + \cdots + |u_n| \le \sum_{i=q_{k(n)}}^{q_{k(n)+1}-1} |u_i|$

Par hyp. ce majorant tend vers zéro quand $n \to +\infty$, donc $(S_n - S_{q_{k(n)}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc (S_n) CV. □

Solution 21 On va montrer que $\sum R_n$ CV en montrant qu'elle vérifie les hyp. du T.S.A.

Il s'agit bien d'une série à signe alterné car le signe du reste R_n est celui du premier terme de ce reste : preuve sans paquets simplement $S_{2p+1} \le S \le S_{2p}$, (les deux suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes, c'est l'essentiel de la preuve du T.S.A).

Reste à voir que $|R_n|$ est décroissante (car on sait qu'elle tend vers zéro).

Or $|R_n| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots = \frac{1}{c_{n+1}^2} + \frac{1}{c_{n+3}^2} + \cdots$ par T.A.F. avec $c_k \in]k, k+1[$.

De même $|R_{n+1}| = \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) + \cdots = \frac{1}{c_{n+2}^2} + \frac{1}{c_{n+4}^2} + \cdots$

et par comparaison terme à terme, on en déduit bien que $(|R_n|)$ est décroissante. □

N.B. – La même preuve donne la CV de $\sum R_n$ pour $R_n = \sum_{k\ge n+1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ pour tout $\alpha > 0$. (Alors que le 1), avec l'équivalent donne la CV absolue ssi $\alpha > 1$).

Solution 22 Notons (w_n) la suite ainsi obtenue. Les sommes partielles commodes de la série $\sum w_n$ sont celles d'ordre $n(p+q)$. Dans ces sommes partielles, il y a aura np termes positifs, et nq termes négatifs.

$$\sum_{k=1}^{n(p+q)} w_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} \quad (1)$$

Or dans cette somme :

$$\sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} H_{nq} = \frac{1}{2}(\ln(n) + \ln(q) + \gamma + o(1)) \quad (2)$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k-1} &= H_{2np} - \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k} = H_{2np} - \frac{1}{2} H_{np} \\
&= (\ln(2np) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(n) + \ln(p) + \gamma + o(1) \\
&= \ln(2) + \frac{1}{2}(\ln(n) + \ln(p) + \gamma + o(1)) \quad (3)
\end{aligned}$$

Avec (2) et (3) on obtient dans (1) que

$$\sum_{k=1}^{n(p+q)} w_k = \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(\frac{p}{q}) + o(1)$$

Ainsi ces sommes partielles particulières de $\sum w_n$ convergent vers $\ln(2) + \frac{1}{2} \ln(p/q)$.

Reste à justifier que *toutes* les sommes partielles de $\sum w_n$ convergent vers cette même valeur : même méthode qu' à l'exercice précédent.

Solution 23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n\sigma(n)} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2})$ (on peut penser à la somme comme un p.s. dans l^2).

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV et $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ CV aussi par théorème de permutation des termes.

Donc par majoration pour les S.T.P., $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ CV.

Solution 24 $\boxed{\text{Méthode qui explose tout : la partition à max constant, on encadre et c'est gagné!!!}}$

(M1) La meilleure : *Partition à* $\max(p,q)$ *constant*

On note pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \max(p,q) = n\}$.

Pour $(p,q) \in I_n$, $\frac{1}{2n^\alpha} \leq \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Comme I_n est formé de $2n-1$ couples : $(n,1),(n,2),\ldots,(n,n-1)$ d'une part, $(1,n),\ldots,(n-1,n)$ d'autre epart et (n,n) tout seul on en déduit que :

$$\frac{2n-1}{2n^\alpha} \leq \underbrace{\sum_{p,q \in I_n} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}}_{\sigma_n} \leq \frac{2n-1}{n^\alpha}$$

Comme les deux gendarmes sont équivalent à $\frac{c}{n^{\alpha-1}}$, de cet encadrement on déduit que $\sum \sigma_n$ a la même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ donc la famille est sommable ssi $\alpha > 2$.

(M2) Fubini rectangulaire de base : Par théorème la série double converge si, et seulement, on a les deux propriétés suivantes :

(i) pour tout p, la série $\sum_q \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$ converge, on note alors S_p sa somme et,

(ii) la série $\sum_p S_p$ converge.

Ici, pour le point (i) : pour chaque p fixé, $u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \underset{q \to +\infty}{\sim} \frac{1}{q^\alpha}$ et donc (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs), la série de t.g. $(u_{p,q})_{q \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Pour le point (ii) : on suppose donc désormais que $\alpha > 1$, on note $S_p = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^\alpha + p^\alpha}$.

On cherche un équivalent de S_p, méthode standard d'encadrement par des intégrales, qui donne que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{p^\alpha + t^\alpha} \leq S_p \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{p^\alpha + t^\alpha}.$$

Par changement de variable :

$$\frac{1}{p^{\alpha-1}} \int_{1/p}^{+\infty} \frac{du}{1+u^\alpha} \leq S_p \leq \frac{1}{p^{\alpha-1}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^\alpha}$$

En notant $I_\alpha = \frac{du}{1+u^\alpha}$, on en déduit que $S_p \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{I_\alpha}{p^{\alpha-1}}$.

Donc $\sum S_p$ converge si, et seulement si, $\alpha \geq 2$.

(M3) Une méthode qui peut paraître astucieuse mais dont on détaille l'idée dans l'exercice : ??

L'idée : la partition « naturelle » de $\mathbb{N}^2$ pour calculer cette somme serait celles par les $I_\mu = \{(p,q), p^\alpha + q^\alpha = m\}$ mais on connait très mal pour μ réels, la taille de ces ensembles. L'idée va être de remplacer cette parittion par celle, simple des $\{(p,q) | p+q = m\}$ grâce à l'équivalence des normes.

Utiliser l'équivalence des normes pour encadrer $p^\alpha + q^\alpha = N_\alpha(p,q)^\alpha$ avec la norme 1 et pour la norme 1 on peut regrouper les termes à $p+q$ constant, et donc utiliser le regroupement diagonal.

Ceci est détaillé dans l'exercice **??**

Solution 25 On pose $u_k = \frac{1}{k^2}$ si $k > 0$, $u_0 = 0$ et $v_k = \frac{1}{2^k}$ alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est le t.g. du produit de Cauchy de deux séries Acv donc est ACV et $w_0 = 0$ donc :
$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n = (\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2})(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}) = \frac{\pi^2}{3}$

Solution 26 Notons $u_n(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$.

Notons d'abord que $\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{1}{(z+n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par d'Alembert, $\sum u_n(z)$ converge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Par D.E.S. $u_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{z+k}$.

Donc en notant $S(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$, on a :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{z+k}.$$

Or la famille des :

$$\left(\frac{1}{k!(n-k)!|z+k|}\right)_{n\in\mathbb{N}, k\in[\![0,n]\!]}$$

est sommable par le résultat de CV absolue, par d'Alembert de $\sum |u_n(z)|$.

On peut donc permuter les deux sommes et

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{1}{z+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} = e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}.$$

Solution 27 a) Suivant l'indication, cela marche tout seul : on pose donc $V_{-1} = 0$, on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = V_k - V_{k-1}$ et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n} u_k V_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=-1}^{n-1} u_{k+1} V_k \quad \text{en réindexant la dernière somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} V_k \quad \text{car} \quad V_{-1} = 0 \\
&= u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue en sortant le dernier terme de la première somme et rassemblant les sommes restantes.

b) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (V_n) est bornée, on sait déjà que :

$$u_n V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (1)$$

D'autre part, si on note M un majorant de $(|V_n|)$ on peut écrire $\sum_{k=0}^{n} |(u_k - u_{k+1})V_k| \leq M \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1})$ grâce à la décroissance de (u_k).

Donc $\sum_{k=0}^{n} |(u_k - u_{k+1})V_k| \leq M(u_0 - u_{n+1})$ par télescopage. Donc la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} |(u_k - u_{k+1})V_k|)$ est majorée par Mu_0 donc converge (S.T.P.).

Ainsi $\sum (u_k - u_{k+1})V_k$ CVA donc CV ce qui avec (1) et l'égalité du a) donne la CV de $\sum u_n v_n$.

c) En fait pour montrer simultanément la CV de $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$ et $\sum \frac{\cos(kx)}{k}$, il est équivalent de montrer celle de $\sum \frac{e^{ikx}}{k}$.

Pour cela, avec les notations du a), en posant pour tout $k > 0$, $u_k = 1/k$ qui définit bien une suite décroissante tendant vers 0, il suffit de montrer qu'en notant $v_k = e^{ikx}$ la suite (V_k) est bornée.

Or $|V_n| = |\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}| = |\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}|$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

Donc $|V_n| \leq \frac{2}{2|\sin(x/2)|}$ par I.T. au numérateur et formule d'Euler au dénom. Ce majorant est indépendant de n d'où la conclusion.