Banque CCINP : Ex. 2, 20, 21, 22, 23, 24.

Rayon de convergence

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n+n} z^n$
b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^n$
c) $\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n$
d) $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) z^n$
e) $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$
f) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^n$
g) $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{d}(n) z^n$ où $\mathrm{d}(n)$ est le nombre de diviseurs $\geqslant 1$ de n
h) $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$, où a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π

Exercice 2 (Lacunes 1)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de CV R_a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$.

Rayon de CV de $\sum b_n z^n$?

Exercice 3 (Lacunes 2)**.** Quel est le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n} z^{n^2}$?

Exercice 4 (Les pôles limitent l'intervalle de validité du D.S.E.)**.** On admet ici que si f est D.S.E. sur un voisinage de 0 et si $f(0) \neq 0$ alors $1/f$ est aussi D.S.E. sur un voisinage de 0.

a) Par le résultat admis on a un $R > 0$ tel que $\forall\, x \in]-R, R[,\ \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Donner un majorant de R.

b) De même on a un $R' > 0$ tel que $\forall\, x \in]-R', R'[,\ \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Montrer qu'on a la même majoration pour R'.

Exercice 5 (Séries entières disjointes)**.** On dit que deux série entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des ensembles d'indices disjoints ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ou $b_n = 0$. On note R_a (resp. R_b) le rayon de CV de la première (resp. de la seconde).

Montrer que la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de CV $\min(R_a, R_b)$.

Exercice 6. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ sachant que : $\left|\frac{a_{3n+1}}{a_{3n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$, $\left|\frac{a_{3n+2}}{a_{3n+1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$, $\left|\frac{a_{3n+3}}{a_{3n+2}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_3$ où l_1, l_2, l_3 sont trois nombres réels tous non nuls.

Exercice 7 (CCINP MP 2021)**.** On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right) \quad , \quad b_n = \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$$

a) Montrer que $\sum b_n$ converge.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel pair.
c) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum b_n x^n, \sum a_n b_n x^n, \sum (a_n + b_n) x^n$$

Commentaire : Voici un dicton utile : « Whenever one sees $a+b\sqrt{d}$, its partner $a-b\sqrt{d}$ is lurking in the background. » Un exercice beaucoup plus méchant aurait été de donner à étudier $\sum a_n x^n$ toute seule !

Calcul de sommes de séries entières

Exercice 8. a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ pour $n \geq 2$. b) Pour tout $x \in]-R, R[$, calculer la somme $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 9. Soient $(a,x)\in\mathbb{R}^2$. Etudier la convergence et calculer la somme $f_a(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(na)x^n/n!$.

Exercice 10 (A l'aide d'une E.D.)**.** a) Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$. Préciser l'ensemble de déf. de f et trouver une E.D. vérifiée par f.

b) Trouver l'ensemble des solutions complexes à cette E.D. en utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

c) En déduire une forme explicite simple pour f et pour $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n)!}$

Exercice 11. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}W_nx^n$ où $W_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt$, après avoir justifié que le rayon de convergence de cette série était non nul.

Développement de fonctions en séries entières

Exercice 12. a) Montrer que $f:\ x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est D.S.E. sur l'intervalle $]-1,1[$ et expliciter ce développement.

b) En déduire que la fonction arcsin est D.S.E. sur l'intervalle $]-1,1[$ et expliciter son développement.

c) En déduire la formule :

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}.$$

Exercice 13 (Fonctions trigo. linéarisation...)**.** a) D.S.E. de $f(x)=\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2$.

b) D.S.E. de $f(x)=\dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$.

Exercice 14 (CCINP 2021 : D.S.E. avec une E.D.)**.** On considère la fonction f définie par $f(x)=(\arcsin x)^2$.

a) Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b) Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $\left(1-x^2\right)y'-xy=2$.

c) En déduire son développement en série entière.

Exercice 15 (Cas où il faut d'abord dériver avant d'avoir une fraction rationnelle)**.** Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose $f(x)=\ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)$. Développer f en série entière autour de 0.

Fonctions sommes de séries entières, étude au bord

Exercice 16. Soit $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_{n+1}-a_n$ tende vers 0 en décroissant.

a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum(-1)^na_nx^n$ est au moins égal à 1. On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^na_nx^n$ pour $|x|<1$.

b) En étudiant $(x+1)f(x)$ montrer que $f(x)$ a une limite finie l quand $x\to1$. On exprimera l sous forme d'une série.

c) Exemple : $a_0=0$ et $a_n=\ln(n)$. Déterminer l.

Exercice 17 (Cas des coefficients positifs $a_n\sim b_n$ donne pour $R=1$, $f(x)\underset{x\to1}{\sim}g(x)$)**.** Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ avec $b_n\geq0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\sum b_n$ divergente, le rayon de convergence de $\sum b_nx^n$ étant $R=1$.

a) Montrer que $g(x)\underset{x\to1}{\longrightarrow}+\infty$.

b) Montrer que si $a_n=o(b_n)$ alors $f(x)=o(g(x))$ pour $x\to1$.

c) Montrer que si $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}b_n$ alors $f(x)\underset{x\to1}{\sim}g(x)$.

Exercice 18 (Mines Ponts 2021 ex. 2 sans prép (étude au bord pour une série génératrice exp.))**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ pour les x tels que la série converge. Montrer que $S(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Variable complexe

Exercice 19 (Formule et Inégalité de Cauchy)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de CV R et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme définie au moins sur $D(0,R)$.

a) Montrer que pour tout $r \in]0,R[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$.

b) Pour tout $r \in]0,R[$, on note $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que $|a_n| \leq \dfrac{M(r)}{r^n}$.

c) En déduire que si $R = +\infty$, (on dit que f est alors une *fonction entière*) et si f est bornée, alors f est constante (théorème de Liouville).

Abel radial et transformation d'Abel

Exercice 20 (Application au produit de Cauchy de deux séries numériques cf D.M.1)**.** a) Soit $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ deux séries numériques convergentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Montrer en considérant $a_n = b_n = \binom{-1/2}{n}$, que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ converge mais que la série $\sum c_n$ n'est pas convergente.

b) on suppose que $\sum c_n$ est convergente et que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent mais pas forcément absolument.

Montrer qu'alors on a nécessairement $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$

Indication : on utilisera le théorème de convergence radiale d'Abel

Exercice 21 (Transformation d'Abel et démonstration de CVU radiale, et donc du théorème radial d'Abel)**.**

1) **Théorème de convergence uniforme radiale :** On considère $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n z^n$ soit de rayon de convergence $R > 0$.

On suppose que la série numérique $\sum a_n R^n$ converge (pas forcément absolument !).
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : [0,R] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto a_n x^n$. On sait que $\sum u_n$ CVS sur $[0,R]$.
On va démontrer que $\sum u_n$ CVU sur $[0,R]$.

Question : Justifier qu'il suffit de démontrer ce théorème dans le cas où $R = 1$.

2) **Démonstration dans le cas** $R = 1$ On se place donc dans les hypothèse du 1) avec $R = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ on pose $\rho_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$ et $r_n = \rho_n(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

a) La transformation d'Abel (I.P.P. discrète) : justifier que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = r_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k (x^{k+1} - x^k).$$

Indication – Pour vraiment comprendre le processus d'I.P.P. discrète et prouver cette égalité de gauche à droite, penser à écrire $a_k = r_{k-1} - r_k$.

b) En déduire que si on note $\varepsilon_n := \sup_{k\geq n} |r_k|$, on a :

$$\forall\, x \in [0,1],\ |\sum_{k=n+1} a_k x^k| \leq 2\varepsilon_n$$

c) Conclure pour la convergence uniforme annoncée.

3) Déduire du théorème du 1) le théorème de continuité du cours.