Exemples de suites de fonctions

Exercice 1. Etudier la CVS et la CVU sur $\mathbb{R}$ pour la suite de fonctions (f_n) définies par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$. S'il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}$, y-a-t-il convergence uniforme sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Soit $f_n\ :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{Arctan}(\dfrac{x+n}{1+nx})$.
Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3. On pose pour tout $n \in\ \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.
Etudier la suite de fonctions (f_n) : CVS, CVU sur $[0,1]$?

Exemples de séries de fonctions

Exercice 4. Etudier la CVS, CVN, CVU sur $[0,+\infty[$ et sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$ de $\sum f_n$ avec $f_n(x) = nx^2\exp(-x\sqrt{n})$.

Exercice 5. Soit $f\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Arctan}(\frac{x}{n^2+x^2})$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
c) On pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{Arctan}(\frac{x}{k^2+x^2})$.
Montrer qu'il existe un $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(2n) \geq C$.
Qu'en déduire pour la CVU de $\sum \mathrm{Arctan}(\dfrac{x}{n^2+x^2})$ sur $\mathbb{R}$?

Deux incontournables en variable complexe

Exercice 6 (Incontournable)**.** a) (i) Montrer à l'aide de l'I.T.Lagrange que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ CV vers $\exp(x)$.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $S_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.
Justifier que (S_n) converge uniformément sur tout disque fermé $D_f(0,R)$ de $\mathbb{C}$.
On admet ici que la somme de cette série est encore $\exp(z)$.
b)) On note $f_n(z) = (1+\frac{z}{n})^n$.
En majorant la différence $f_n - S_n$ à l'aide de la formule du binôme, montrer que $f_n - S_n$ CVU vers 0 sur tous les disques fermés $D_f(0,R)$, puis que f_n CV vers exp uniformément sur ces mêmes disques. .

Exercice 7 (Incontournable)**.**

a) Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Démontrer que $\sum_n n^{-s}$ converge. On note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.
b) Montrer que la fonction ζ est continue sur $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
c) Démontrer que $\zeta(s)$ a une limite lorsque $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$.
d) Démontrer plus précisément qu'on a le D.A. à deux termes significatifs suivant pour $\zeta(s)$ lorsque $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + o\left(\frac{1}{2^s}\right).$$

Quel serait le terme significatif suivant d'un tel D.A. ?
e) Démontrer que la restriction de ζ à $]1,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

f) Démontrer que pour $s \to 1^+$, la fonction ζ (restreinte à $]1, +\infty[$) admet le développement asymptotique suivant :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

Indication – On pourra montrer qu'en notant $f(n) = n^{-s}$, et $w_n(s) = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$, la série $\sum w_n(s)$ converge pour tout $s > 0$ et que $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Limites ou équivalents de sommes de séries de fonctions

Exercice 8. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{x}{n^2}) \underset{x \to +\infty}{\sim} \pi\sqrt{x}$.

Exercice 9. On considère pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n(x))$ définie par $u_n(x) = \frac{a^n}{x+n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| \leq 1$ et $a \neq 1$.

a) Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série $\sum u_n(x)$.

b) Notons $S(x)$ la somme de cette série.

  i) Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

  ii) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x(1-a)}$.

Exercice 10 (Dérivée en un point du bord)**.** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Calculer f''. En déduire f'.

c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

d) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1 - e^{-t})dt$.

Exercice 11 (Cas d'une série ne vérifiant pas le T.S.A. mais s'y ramenant)**.**

a) Justifier qu'on peut poser, pour tout $x > 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}$.

b) Montrer que la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$.

c) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.