

Banque CCINP : Ex. 29,30.

Calcul de fonctions définies par une intégrale à paramètre via dérivation (\pm E.D.)

Exercice 1. Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$

- a) Montrer que g est bien définie.
- b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 . Calculer g' , puis g .

Exercice 2 (L'intégrale de la Gaussienne, comme valeur particulière d'une intégrale à paramètre). On note $G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

- a) Préciser l'ensemble de déf. de F , puis montrer qu'elle vérifie (sur un ensemble à préciser) une E.D. dont le second membre fait intervenir G .
- b) Résoudre cette E.D. et en remarquant que F est bornée, retrouver ainsi la valeur de G .
- c) **Bonus :** A l'aide d'une expression trouvée pour F grâce à l'E.D. obtenir un D.A. à deux termes significatifs de $F(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 (Calcul incontournable de la transformée de Fourier de la gaussienne). Soit $g : t \mapsto e^{-t^2/2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx} dt$.

Calculer h en trouvant une E.D. vérifiée par h .

Exercice 4. Soit $C(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt) dt$ et $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt$.

- a) Montrer la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R} de C et S .
- b) Soit $U = C + iS$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par U .
- c) Déterminer la forme explicite de U , C et S .

Quelques propriétés de la convolution

Exercice 5. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on choisit g dans $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

- a) **Définition :** Montrer que, si $f \in \mathcal{L}^1$, pour tout réel x , la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur \mathbb{R} . : on pose $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.
- b) **Commutativité :** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)f(t) dt = (g * f)(x)$.
- c) **Continuité et bornitude de la convolée** Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, $f * g \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$
- d) **Continuité de l'opérateur :** Montrer que $f \mapsto f * g$ est une application linéaire entre \mathcal{L}^1 et $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ vérifiant

$$\forall f \in \mathcal{L}^1, N_{\infty}^{\mathbb{R}}(f * g) \leq N_1(f)N_{\infty}^{\mathbb{R}}(g).$$

- e) **Caractère \mathcal{C}^{∞} si on convole par une fonction \mathcal{C}^{∞} :** On suppose $f \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, g de classe \mathcal{C}^{∞} avec toutes ses dérivées bornées, montrer que $f * g$ est de classe \mathcal{C}^{∞} avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$

Etude d'équivalents

Exercice 6 (Un résultat plus précis que le théorème de la valeur initiale pour un exemple particulier).

On considère la transformée de Laplace de Arctan. Autrement dit, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \text{Arctan}(t) dt$.

Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x)$.

Transformée de Laplace du sinus cardinal : que faire hors du cadre Lebesgue intégrable ?

Exercice 7. En étudiant $L(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin(t)}{t} dt$, obtenir la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Indication - On montrera que L est dérivable sur $]0, +\infty[$, on calculera L' , qu'on primitivera, puis on montrera la continuité de L en 0 pour obtenir la valeur de $L(0)$.