Banque CCINP : Ex. 25,26,27.

Deux suites d'intégrales sur un segment... exercices de premières années... ?...

Exercice 1. Soit $I_n = \int_0^1 [\ln(1+x)]^n dx$.
a) Déterminer la limite de (I_n) avec et sans le T.C.D.
b) Déterminant un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$

Exercice 2. Etudier la limite quand $n \to +\infty$ de $I_n = \int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n} dx$ avec et sans le T.C.D.

Convergence dominée

Exercice 3. Soit $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$. Existence de I_n et limite de la suite (I_n).

Exercice 4. Soit $I_n = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^n)dt$.
a) Justifier que I_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Etudier la limite de (I_n) quand $n \to +\infty$.
c) Déterminer un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

Situations d'intégration terme à terme

Exercice 5. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n} dt$.
a) Trouver la limite ℓ de I_n.
b) Trouver un équivalent de $\ell - I_n$.
c) Justifier à l'aide du développement en série entière de $\ln(1+x)$ vu en cours que :
$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.
d) En déduire un D.A. à trois termes de I_n.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} dx$.
a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(np+1).(np+2)}$.

Exercice 7. Justifier que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8. On note $I =]0,+\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

a) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Que vaut alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)$?

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx$?

c) Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx\right)$.

Exercice 9. Soit (a_n) une suite croissante de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}.$$

Exercice 10. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^2t^2}$, montrer que $f \in \mathscr{L}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et calculer $\int_0^{+\infty} f$.