

Banque CCINP : Ex. 25. 1), 28, 29.1 et 29.2),

Intégrabilité, convergence, calcul d'intégrale de fonctions concrètes

Exercice 1. Etudier l'intégrabilité de f sur I dans les cas suivants :

- a) $f(t) = \frac{e^t \sin(t)}{1+t^2 e^t}$ avec $I = \mathbb{R}$,
- b) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ avec $I =]0, +\infty[$,
- c) $f(t) = \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$ avec $I =]0, 1[$.
- d) $f(t) = \frac{\ln(t)}{t + e^t}$ avec $I =]0, +\infty[$,
- e) $f(t) = \ln(t)^{-\ln(t)}$ avec $I =]1, +\infty[$.

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

- a) $\int_0^{+\infty} \cos^2(t) dt.$
- b) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ pour $\alpha > 0.$
- c) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \cdot \left(1 + \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\right) dt$
- d) $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt.$

Exercice 3 (Avec des calculs d'intégrale en plus). Existence et calcul de :

- a) $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}} dt$
- b) $I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)} \right) dx$
- c) **Mines Ponts Nicolas Leenhardt 2022.**
Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{ch}^2(t)} dt.$

Voir davantage pour les révisions de calculs d'intégrales au verso.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple de $\int_1^x \frac{e^t}{1+t^2} dt$ quand $x \rightarrow +\infty.$

Exercice 5 (Intégrales pulsantes, niveau Mines-Centrale). Soit $f : x \mapsto \exp(-x^2 |\sin(x)|).$

- a) Tracer le graphe de f à la calculatrice ou l'ordinateur.
- b) Etudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+.$

Exercices avec des conditions plus théoriques

Exercice 6. Donner un exemple de deux fonctions f, g c.p.m. intégrables sur un voisinage de $+\infty$ telles que le produit ne soit pas intégrable sur ce voisinage.

Exercice 7 (Version intégrale du lemme de comparaison logarithmique). a) Le résultat suivant est un exercice classique sur les séries à termes positifs :

- (i) Soient (u_n) et (v_n) deux S.T.P. telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$$

Montrer que :

- si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
- (ii) Retrouver le résultat du critère (ou test) de d'Alembert à l'aide du (i).
- b) Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telles que g est intégrable sur \mathbb{R}^+ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \frac{g(x+1)}{g(x)}.$$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+.$

Exercice 8 (Mines Ponts Yassine Benissad 2022). 1) Soit f une fonction uniformément continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} telle que $\int_0^x f$ a une limite finie en $+\infty.$

Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

- 2) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$ Déterminer les limites en $\pm\infty$ de $f.$

Indication (non donnée à l'oral) pour le 1) – On pourra considérer des valeurs moyennes $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f$

Révisions sur les calculs d'intégrales : fonctions rationnelles et autres..

Exercice 9 (Fonctions rationnelles :). Existence et calcul de :

- a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 \cdot (x+2)^2}$
- b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx$ Ne pas se jeter sur la D.E.S. ici !
- c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a^2 - 4b < 0$.

Exercice 10 (Intégrales se ramenant à des intégrales de fonctions rationnelles). a) Fonctions « rationnelles en une variable e^{at} » : calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x+1) \cdot (e^{-x}+1)}$.

b) Fonctions « rationnelles en cos, sin, tan » : une méthode « générale » mais qui peut donner de gros calculs :

Les formules de la tangente de l'arc moitié : A savoir :

En posant $t = \tan(x/2)$ (attention sur chaque intervalle où cela a du sens) :

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{t^2+1} dt \text{ (ce dernier point est l'essentiel)}$$

i) Calculer (et retenir) une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ par cette méthode.

ii) Calculer ainsi $\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos(x)}$.

c) Les formules de trigo restent bien utiles ; Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t))^2}$.

d) Parfois, on vous donne le changement de variable à vous de faire apparaître la bonne fonction, avec l'élément différentiel en offrande.

Exemple : calculer $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)} dt$ en posant $u = \cos(t)$ ce qui demande de ne faire apparaître que de $\cos(t)$ sauf au numérateur $du = -\sin(t)dt$ « en offrande »

Intégrales non élémentaires

On appelle *intégrale non élémentaire* une intégrale entre deux bornes bien précises d'une fonction dont on ne peut pas écrire la primitive en terme de fonctions usuelles. Par exemple l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ en est une.

Exercice 11. a) Justifier la convergence de $I := \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\int_0^x \frac{t}{\ln(t)} dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{\ln(u)}$$

c) En déduire que $I = -\lim_{x \rightarrow 1} \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

d) Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\frac{t}{1-t} \leq -\frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{1-t}.$$

e) En déduire la valeur de I .

Remarque pour les 5/2 : la soeur « inversée » de cette intégrale à savoir $J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx$ est un grand classique de calcul d'intégrale par I.T.T. cf. cours de l'an dernier.