D.M. 9 : Révisions réduction des endomorphismes

D.M. obligatoire pour le mardi de la rentrée

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbf{C}$, le corps des nombres complexes, pour corps de base.

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un C-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Un endomorphisme u de E est dit échangeur lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \text{ et } u(G) \subset F.$$

Étant donné deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est semblable à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ \left(\varphi^{-1}\right)^{-1}$, si bien que u est semblable à v.

On dit que u est de carré nul lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est nilpotent lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est dite de carré nul lorsque $A^2 = 0_n$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme u d'un C-espace vectoriel E de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) L'endomorphisme u est échangeur.

(C2) Il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$.

(C3) Les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties **A** et **B** est indépendante des autres. Les résultats de la partie **D** sont essentiels au traitement des parties **E** et **F**.

A Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition (C3) alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.

On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det u$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres de u.

3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \notin D$, et en déduire que u est échangeur.

B La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{C})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$. On considère dans $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice

$$M := \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}.$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$ de $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5. On considère dans $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D := \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix}.$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$. Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un C-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur, et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.

On se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de G. La famille $\mathbf{B} = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ est donc une base de E.

Compte tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de u dans $\mathbf{B}$.

7. Déduire des questions précédentes que u vérifie les conditions (C2) et (C3). On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces vectoriels F et G est nul.

C La condition (C2) implique la condition (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer Ker f à $\operatorname{Im} f$ et en déduire

$$\dim \operatorname{Ker} f \geq \frac{\dim E}{2}.$$

9. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$, et que Ker $a = \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b$.

10. En déduire que u est échangeur.

D Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un C-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe λ arbitraire. On pose $v := f - \lambda \mathrm{I}_E$. 11. Montrer que la suite $\left(\operatorname{Ker}\left(v^k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p, \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p$$

On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\operatorname{Ker} v^k$ pour k dans $\mathbf{N}$.

Montrer qu'alors

$$\operatorname{Ker} v^p = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k$$

et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question 12 et l'on pose

$$E_\lambda^c(f) := \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p.$$

On notera que $E_\lambda^c(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker}\left(v^{2p}\right)$ et en déduire

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im}\left(v^p\right).$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E_\lambda^c(f)$ et $\operatorname{Im}\left(v^p\right)$ sont tous deux stables par f.

14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}\left(v^p\right)$. Montrer que si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.

15. On se donne ici un nombre complexe μ différent de λ. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.

Montrer que $\operatorname{Im}(v^p) \subset E_\mu^c(f)$, puis que $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$.

On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(v^p)$.

E La condition (C2) implique la condition (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant :

Théorème : Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un C-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

16. Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $E_0^c(u) = \operatorname{Ker} u^p$, donné par la question 12.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel $G := \operatorname{Im} u^p$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.

18. En déduire que u est échangeur. On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie **C**.

Fin de la partie « obligatoire »

F La condition (C3) implique la condition (C1)

Soit E un C-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Un endomorphisme u de E est dit indécomposable lorsque :

(i) La condition (C3) est vérifiée par u.

(ii) Il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits respectifs u_F et u_G vérifient tous deux la condition (C3).

Jusqu'à la question 21 incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme φ de E tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}.$$

19. Montrer que φ^2 commute avec u.

20. Montrer que φ^2 possède une unique valeur propre λ. En déduire que les valeurs propres de φ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.

On utilisera l'indécomposabilité de u ainsi que les résultats des questions **13** et 14.

21. En déduire que u est échangeur.

On pourra appliquer le résultat final de la question **15**.

22. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un C-espace vectoriel de dimension finie, la condition (C3) implique la condition (C1).