D.M. 8 : autour de l'intégration terme à terme

Pour le vendredi 16 décembre

Partie I : Questions préliminaires

1. Soient $\alpha \in]-1, +\infty[$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta^2 t^2}\, dt$ et l'exprimer à l'aide de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

2. Soit f une fonction positive et continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que f est croissante sur $[0, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $d_k(f) = f(k) - \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt$.

a) Montrer que la série $\sum d_k(f)$ est convergente. On note $D(f)$ sa somme.

b) Montrer : $|D(f)| \leq 2f(a)$.

Indication : commencer par encadrer $d_k(f)$, en distinguant les trois cas $k < \lfloor a \rfloor$, $k = \lfloor a \rfloor$, $k > \lfloor a \rfloor$.

Partie II : Une série de fonctions

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $u_k(t) = (2k^2t^2 - 1)\, e^{-k^2t^2}$.

1. a) Montrer que la série $\sum u_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Montrer que u_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_k(t)\, dt$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big|u_k(t)\big|\, dt$. Quelle est la nature de la nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} \big|u_k(t)\big|\, dt$?

Partie III : Intégrabilité de S

1. On fixe ici $x \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit deux fonctions g et h sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(t) = 2x^2t^2\, e^{-x^2t^2} \quad \text{et} \quad h(t) = e^{-x^2t^2}.$$

a) Vérifier que g et h satisfont aux hypothèses du **I.**2.

b) Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$.

c) En déduire que $S(x) = D(g) - D(h) + 1$.

2. Montrer que S est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leq u_k(x) \leq 4\, e^{-k^2x^2/2} \leq 4\, e^{-kx/2}$.

b) En déduire : $\forall x \in [1, +\infty[,\ 0 \leq S(x) \leq \dfrac{4}{e^{x/2} - 1}$.

4. Montrer que S est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Partie IV : Calcul de l'intégrale de S

Pour $x \in]-1, +\infty[$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x\, S(t)\, dt$.

1. Justifier cette définition et montrer que F est continue sur $]-1, +\infty[$.

2. Dans cette question, on fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $v_k(t) = t^x\, u_k(t)$.

a) Montrer que v_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} v_k(t)\, dt$ en fonction de Γ.

b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} \big|v_k(t)\big|\, dt$.

c) On rappelle que, pour $\alpha \in]1, +\infty[$, $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Exprimer $F(x)$ à l'aide de ζ et Γ.

3. a) On admet ici que $\zeta(1+x) \sim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ (cf. planche S2).

Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$.

b) Commentaire ?

Exercice bonus : comparaison série-intégrale, une nouvelle version

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1\big([a,+\infty[,\mathbb{K}\big)$ telle que f' est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Pour $x \in [a,+\infty[$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq a$, $F(n+1) - F(n) = f(n) + \displaystyle\int_n^{n+1} (n+1-t)\,f'(t)\,dt$.

2. En déduire que la série $\sum f(n)$ et la suite $\big(F(n)\big)$ sont de même nature (*i.e.* toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

3. On suppose que $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

4. On suppose que $\sum f(n)$ converge. On note L la limite de la suite $\big(F(n)\big)$ (*cf* 2.).

a) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
En écrivant $F(x) - L = \big(F(x) - F(\lfloor x \rfloor)\big) + \big(F(\lfloor x \rfloor) - L\big)$, montrer que $\big|F(x) - L\big| \leq \varepsilon$ pour x assez grand.

c) Conclure que $\displaystyle\int^{+\infty} f$ converge.

5. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$.