D.M. 8 : autour de l'intégration terme à terme, solution

Partie I

1. (i) Posons ici, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = t^\alpha e^{-\beta^2 t^2}$. On vérifie trois propriétés :

— f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

— $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$, avec $-\alpha > 1$, , fonction intégrable en 0 de signe constant,

— $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée.

Ces trois propriétés donnent que $f \in \mathscr{L}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ en particulier l'intégrale existe.

(ii) Le changement de variable $u = \beta^2 t^2$ donne, comme $t > 0$, $t = \dfrac{\sqrt{u}}{\beta}$ et donc $dt = \dfrac{du}{2\beta\sqrt{u}}$ et :

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-\beta^2 t^2}\, dt = \frac{1}{2\beta^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{(\alpha-1)/2}\, e^{-u}\, du = \frac{1}{2\beta^{\alpha+1}}\, \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

2. a) Pour $k \geq a$, la décroissance de f sur $[k, k+1]$ donne que :

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f \geq f(k+1)$$

et donc :

$$0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f \leq f(k) - f(k+1)$$

Autrement dit, pour $k \geq a$:

$$0 \leq d_k(f) \leq f(k) - f(k+1) \tag{1}$$

Comme f est décroissante, minorée par 0, on sait que f admet une limite finie en $+\infty$ (théorème de la limite monotone). Par lien suite/série, on en déduit que la série télescopique $\sum\big(f(k)-f(k+1)\big)$ converge.

Alors avec l'encadrement (1), on a majoré $d_k(f)$, A.P.C.R., par un terme général de série convergente, donc $\sum d_k(f)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

b) Par le même raisonnement qu'au a), avec la monotonie de f

— pour $k < \lfloor a \rfloor$, $f(k) - f(k+1) \leq d_k(f) \leq 0$

— pour $k > \lfloor a \rfloor$, $0 \leq d_k(f) \leq f(k) - f(k+1)$.

— pour $k = \lfloor a \rfloor$, $d_k(f) = f(\lfloor a \rfloor) - \displaystyle\int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f$

Par sommation des encadrements précédents, il vient :

$$\sum_{k<\lfloor a \rfloor} (f(k) - f(k+1)) + f(\lfloor a \rfloor) - \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f \leq D(f) \leq f(\lfloor a \rfloor) - \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f + \sum_{k>\lfloor a \rfloor} (f(k) - f(k+1))$$

Par télescopage, on en déduit, en notant $\ell = \lim_{+\infty} f$:

$$f(0) - f(\lfloor a \rfloor) + f(\lfloor a \rfloor) - \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f \leq D(f) \leq f(\lfloor a \rfloor) - \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f + f(\lfloor a \rfloor + 1) - \ell$$

qui se simplifie en :

$$f(0) - \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f \leq D(f) \leq f(\lfloor a \rfloor) - \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f + f(\lfloor a \rfloor + 1) - \ell \tag{2}$$

Or comme $f(a)$ réalise le maximum de f sur $\mathbb{R}^+$, on sait que $\displaystyle\int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f \leq f(a) \times 1 = f(a)$.

Donc avec l'inégalité de gauche dans (2), on obtient :

$$f(0) - f(a) \leq D(f)$$

et a fortiori, comme $f(0) \geq 0$, on a $-f(a) \leq f(0) - f(a) \leq D(f)$, a fortiori :

$$-2f(a) \leq D(f) \tag{3}$$

D'autre part, comme $\displaystyle\int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor a+1 \rfloor} f \geq 0$, avec la deuxième inégalité dans (2), on déduit :

$$D(f) \leq f(\lfloor a \rfloor) + f(\lfloor a \rfloor + 1) - \ell \leq f(\lfloor a \rfloor) + f(\lfloor a \rfloor + 1) \leq 2f(a) \tag{4}$$

puisque $\ell \geq 0$ et que $f(a) = \max_{\mathbb{R}^+} f$.

- **Partie II**

1. a) Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$. Par croissance comparée, $t^2 u_k(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2k^4 t^2 e^{-k^2 t^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $u_k(t) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, d'où la convergence absolue de $\sum u_k(t)$ par comparaison.

b) Pour $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $|u_k(t)| \leq (2k^2 b^2 + 1) e^{-k^2 a^2}$, qui est le terme général d'une série convergente (même argument qu'au a)) indépendant de t.

Ainsi, la série $\sum u_k$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Chaque fonction u_k étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les théorème généraux, on en déduit par théorème de continuité d'une limite uniforme que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Avec les trois propriétés :

— u_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,

— $u_k(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -1$,

— $u_k(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (idem 1) a) avec la variable t cette fois),

on conclut que u_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Calcul version parachute : On remarque que u_k est la dérivée de $t \mapsto -t\, e^{-k^2 t^2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} u_k = \left[-t\, e^{-k^2 t^2}\right]_0^{+\infty} = 0.$$

Calcul version un peu plus naturelle : on pose d'abord $x = kt$, alors

$$I := \int_0^{+\infty} u_k(t) dt = \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} (2x^2 - 1) e^{-x^2} dx.$$

On peut séparer I en deux intégrales convergentes : $k.I = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

Dans la première on fait une intégration par partie un peu intéressante pour éliminer le x,

$$\begin{cases} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1, \\ v'(x) = 2x e^{-x^2} \Leftarrow v(x) = -e^{-x^2} \end{cases}$$

On obtient bien que $I = 0$

b) u_k est négative sur $]0, 1/k\sqrt{2}]$ et positive sur $[1/k\sqrt{2}, +\infty[$, donc, en utilisant a) :

$$\int_0^{+\infty} |u_k| = -\int_0^{1/k\sqrt{2}} u_k + \int_{1/k\sqrt{2}}^{+\infty} u_k = \left[t\, e^{-k^2 t^2}\right]_0^{1/k\sqrt{2}} + \left[-t\, e^{-k^2 t^2}\right]_{1/k\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{\sqrt{2/e}}{k}.$$

On constate donc que la série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |u_k|$ diverge.

- **Partie III**

1. a) Les fonctions g et h sont évidemment positives et continues, la fonction h est décroissante et on voit en considérant g' que g est croissante sur $[0, 1/x]$ et décroissante sur $[1/x, +\infty[$.

Les hypothèses du **I.**2. sont donc satisfaites avec $a = 0$ pour h et $a = 1/x$ pour g.

b) g et h sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ par continuité sur $\mathbb{R}^+$ et comme $o(1/t^2)$ quand $t \to +\infty$.

Le même calcul qu'au **II.**2.a) avec x à la place de k, ce qui ne change rien car le caractère entier de k n'intervient pas dans ce calcul, montre que

$$\int_0^{+\infty} (g - h) = 0.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} h$.

c) Par définition, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} g(k) - \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)$ (il y a bien convergence séparée des deux séries).

Compte tenu du b) et des égalités $g(0) = 0$ et $h(0) = 1$ on peut écrire :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(g(k) - \int_k^{k+1} g(t)\,dt\right) - \sum_{k=0}^{+\infty}\left(h(k) - \int_k^{k+1} h(t)\,dt\right) + 1 = D(g) - D(h) + 1.$$

2. Soit $x > 0$, $|S(x)| = |D(g) - D(h) + 1| \le |D(g)| + |D(h)| + 1 \quad (*)$.

Comme g et h sont respectivement maximales en $1/x$ et en 0, avec $g(1/x) = 2/e$ et $h(0) = 1$, et **I.**2.b) donne alors, $|D(g)| \le 2g(1/x) = 4/e$ et $|D(h)| \le 2h(0) = 2$, ce qui dans $(*)$ donne :

$$|S(x)| \le 4/e + 3.$$

La fonction S est bien bornée.

3. a) Pour $x \ge 1$, et $k \ge 1$, $2k^2x^2 \ge 1$, donc $u_k(x) \ge 0$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u \ge 1 + u \ge u$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en particulier pour tout $x \in [1, +\infty[$: $4\,e^{k^2x^2/2} \ge 2\,k^2x^2 \ge 2\,k^2x^2 - 1$, d'où $u_k(x) \le 4e^{-k^2x^2/2}$ en multipliant par $e^{-k^2x^2} > 0$.

Enfin, comme $kx \ge 1$, on a $(kx) \le (kx)^2$ ce qui donne la dernière inégalité : $e^{-(kx)^2/2} \le e^{(-kx)/2}$.

b) Par sommation sur $k \in [\![1, +\infty[\![$, le a) donne pour $x \ge 1$: $0 \le S(x) \le \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 4\,e^{-kx/2} = \frac{4}{e^{x/2} - 1}$.

4. On sait que

- S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ selon **II.**1.b).
- d'une part, d'après 2), S est bornée donc S est intégrable sur $]0, 1]$.
- d'autre part, selon 3) b) S est positive et majorée par $x \mapsto \dfrac{4}{e^{x/2} - 1}$ qui est intégrable $[1, +\infty[$.

Finalement, S est bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

Partie IV

1. Pour $(x, t) \in]-1, +\infty[\times]0, +\infty[$ posons $g(x, t) = t^x S(t)$.

a) Pour montrer que F est bien définie, montrons que pour chaque $x \in]-1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue puisque S l'est.
- Comme S est bornée, S étant bornée, $g(x, t) = \underset{t\to 0}{O}(t^x)$, avec $x > -1$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable en 0 par comparaison à l'exemple de Riemann,
- Enfin, selon **III.**3.a), $g(x, t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$, donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable en $+\infty$ par comparaison à l'exemple de Riemann.

On en déduit que $g(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc que F est bien définie sur $]-1, +\infty[$.

b) Pour montrer que $x \mapsto F(x)$ est continue, au moment où le D.M. a été posé, on n'avait pas le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, on pouvait utiliser le critère séquentiel de continuité, et le T.C.D.

Puisque depuis nous avons donné ce théorème de continuité :

(H1) pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto g(\cdot, t)$ est continue sur $]-1, +\infty[$.

(H2) Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $]-1,+\infty[$.

Définissons φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t)=\begin{cases} t^a|S(t)|=|g(a,t)| & \text{pour} \quad t\in]0,1] \\ t^b|S(t)|=|g(b,t)| & \text{pour} \quad t\in[1,+\infty[\end{cases}$. La fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, indépendante de x et $|g(x,t)|\leq\varphi(t)$ pour tout $(x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[$.

Enfin bien sûr l'hypothèse **(H0)** $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable pour tout x est vérifiée par a).

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, avec domination sur tout segment, F est continue sur $]-1,+\infty[$.

2. a) La fonction v_k est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $v_k(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$ (car $x>0$) et $v_k(t)=\underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$, donc v_k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On envisage une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} f'(x)=u_k(x)\Leftarrow f(x)=te^{-k^2t^2} \\ g(x)=t^x\Rightarrow g'(x)=xt^{x-1}\end{cases}$ Le terme de bord $f(x).g(x)=t^{x+1}e^{-k^2t^2}$ tend vers une limite finie (0) en 0 et $+\infty$ donc l'I.P.P. est possible dans l'intégrale généralisée :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}v_k(t)\,dt=0-0+x\int_0^{+\infty}t^xe^{-k^2t^2}\,dt &= x\int_0^{+\infty}\Big(\frac{\sqrt{u}}{k}\Big)^xe^{-u}\,\frac{1}{2k\sqrt{u}}\,du \\ &= \frac{x}{2k^{x+1}}\int_0^{+\infty}u^{(x-1)/2}\,e^{-u}\,du=\frac{x}{2k^{x+1}}\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\end{aligned}$$

b) Par majoration :

$$\int_0^{+\infty}|v_k(t)|\,dt=\int_0^{+\infty}t^x|2k^2t^2-1|\,e^{-k^2t^2}\,dt\leq\int_0^{+\infty}t^x(2k^2t^2+1)\,e^{-k^2t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}v_k(t)\,dt+2\int_0^{+\infty}t^x\,e^{-k^2t^2}\,dt.$$

En reprenant la fin du calcul du a) on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}|v_k(t)|\,dt\leq\frac{x+2}{2k^{x+1}}\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)$.

Comme $x+1>1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|v_k|$ est terme général de série convergente comme un $O(1/k^{x+1})$.

c) $\displaystyle F(x)=\int_0^{+\infty}t^x\bigg(\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\bigg)\,dt=\int_0^{+\infty}\bigg(\sum_{k=1}^{+\infty}v_k(t)\bigg)\,dt.$

II.1.b), a) et b) permettent d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Avec le a), on obtient :

$$F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x}{2k^{x+1}}\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)=\frac{x}{2}\,\zeta(x+1)\,\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big).$$

3. a) Du fait de la continuité de Γ et du résultat admis dans l'énoncé, le 2.c) donne :

$$F(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{\Gamma(1/2)}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Mais on sait par 1. que F est continue sur $]-1+\infty[$ et donc en particulier en 0 ; il en résulte que :

$$\int_0^{+\infty}S(t)\,dt=F(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

b) Comme pour tout $k\geq 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}u_k=0$ selon **II.**2.a), on constate que :

$$\int_0^{+\infty}\bigg(\sum_{k=1}^{+\infty}u_k\bigg)\neq 0=\sum_{k=1}^{+\infty}\bigg(\int_0^{+\infty}u_k\bigg)$$

Remarquons aussi que, par contraposée du théorème d'intégration terme à terme du cours, cela permet de retrouver le résultat du **II.**2.b).

Exercice

1. F est de classe C^2. D'après la formule de Taylor à reste intégral à l'ordre 1, appliquée à F entre n et $n+1$:

$$F(n+1)-F(n)=F'(n)\times 1+\int_n^{n+1}(n+1-t)\,F''(t)\,dt=f(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)\,f'(t)\,dt.$$

2. $\displaystyle\int_n^{n+1}(n+1-t)\,|f'(t)|\,dt \le \int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt$, qui est le terme général d'une série convergente, puisque f' est intégrable sur $[a,+\infty[$.

Par comparaison, la série $\displaystyle\sum\int_n^{n+1}(n+1-t)\,f'(t)\,dt$ est absolument convergente.

On déduit alors du 1. que la série $\sum f(n)$ a même nature que la série $\sum\big(F(n+1)-F(n)\big)$, donc aussi même nature que la suite $\big(F(n)\big)$ (équivalence suites-séries).

3. Par définition de la convergence d'une intégrale généralisée, la suite $\big(F(n)\big)$ converge, d'où le résultat d'après 2.

4. a) f' etant intégrable sur $[a,+\infty[$, f admet une limite finie en $+\infty$, qui est en particulier celle de la suite $\big(f(n)\big)$. Comme $\sum f(n)$ converge, cette limite est nulle.

b) Selon a), d'après la définition de la limite, on a un $n_1\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, t\ge n_1\,\big|f(t)\big|\le\varepsilon/2$$

D'autre part, par définition de L, on a un $n_2\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n\ge n_2\,\big|F(n)-L\big|\le\varepsilon/2.$$

On en déduit que pour $x\ge n_0=\max(n_1,n_2)$ (ce qui implique $\lfloor x\rfloor\ge n_0$) :

$$\begin{aligned}\big|F(x)-L\big| &\le \big|F(x)-F\big(\lfloor x\rfloor\big)\big|+\big|F\big(\lfloor x\rfloor\big)-L\big|=\left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,dt\right|+\big|F\big(\lfloor x\rfloor\big)-L\big|\\ &\le \int_{\lfloor x\rfloor}^x\big|f(t)\big|\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\le\big(x-\lfloor x\rfloor\big)\,\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon\end{aligned}$$

c) On a démontré au b), par retour à la définition, que F admet L pour limite en $+\infty$. Par définition, cela signifie que $\displaystyle\int_a^{+\infty}f$ converge (et aussi que $\displaystyle\int_a^{+\infty}f=L$).

5. Pour $t\in[1,+\infty[$ posons $f(t)=\dfrac{\cos(\ln t)}{t}$.

$\boxed{\text{Première idée sur cet exemple } f \text{ est la dérivée de } \sin(\ln(t)) \text{ : ça doit servir !}}$

La fonction f est de classe C^1 et

$$\big|f'(t)\big|=\left|-\frac{\cos(\ln t)}{t^2}-\frac{\sin(\ln t)}{t^2}\right|\le\frac{2}{t^2}.$$

Par comparaison à l'exemple de Riemann, on en déduit que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=\sin(\ln x)$, qui n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}f$ diverge.

Par contraposée du 4., on en déduit que la série $\displaystyle\sum f(n)=\sum\frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge.