DM 7 : Suites et séries de fonctions, solutions

Problème 1 : un théorème d'approximation uniforme dû à Korovkin

Partie I

1. a) Si $f \leq g$, la fonction $g - f$ est positive, donc $L(g-f)$ est aussi positive.
Mais par linéarité, $L(g-f) = L(g) - L(f)$. On en déduit que $L(f) \leq L(g)$.
b) On a toujours $-|f| \leq f \leq |f|$, donc d'après a) $-L(|f|) = L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$.
Cet encadrement se réécrit $|L(f)| \leq L(|f|)$.
c) On a évidemment $|f| \leq N_\infty(f)\, p_0$, donc a) et b) donnent $|L(f)| \leq L(|f|) \leq N_\infty(f)\, L(p_0)$.
Par conséquent : $\forall x \in [0,1], |L(f)(x)| \leq N_\infty(f)|L(p_0)(x)| \leq N_\infty(f) N_\infty\left(L(p_0)\right)$.
Le dernier majorant ne dépend pas de x, donc $N_\infty(L(f)) \leq N_\infty(L(p_0))\, N_\infty(f)$.

$N_\infty(L(p_0))$ est une constante, donc on en déduit par théorème que l'endomorphisme L est continu.

2. a) Étant continue sur le segment $[0,1]$, f est uniformément continue d'après le théorème de Heine.
L'existence du réel α ayant les propriétés demandées résulte de la définition même de la continuité uniforme.
b) Distinguons deux cas :
- si $|t-x| \leq \alpha$, alors $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + M\,(t-x)^2$.
- si $|t-x| > \alpha$, alors $|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2N_\infty(f) = M\alpha^2 \leq M(t-x)^2 \leq \varepsilon + M(t-x)^2$.
c) Posons $u = |f - f(x)\, p_0|$ et $v = \varepsilon p_0 + M(p_2 - 2xp_1 + x^2 p_0)$.
On constate que, pour tout $t \in [0,1]$, $u(t) = |f(t) - f(x)|$ et $v(t) = \varepsilon + M(t^2 - 2xt + x^2) = \varepsilon + M(t-x)^2$.
Le b) se réécrit donc : $\forall t \in [0,1]$, $u(t) \leq v(t)$. Cela signifie exactement que $u \leq v$.

Partie II

1. a) On applique **I**.1.a) et b) à l'inégalité du **I**.2.c) : il vient :
$$|L(f - f(x)p_0)| \leq L(|f - f(x)p_0|) \leq L\left(\varepsilon p_0 + M(p_2 - 2xp_1 + x^2 p_0)\right).$$
D'où, par linéarité de L :
$$|L(f) - f(x)L(p_0)| \leq \varepsilon L(p_0) + M\left(L(p_2) - 2xL(p_1) + x^2 L(p_0)\right).$$
b) Par inégalité triangulaire : $|L(f) - f(x)p_0| \leq |L(f) - f(x)L(p_0)| + |f(x)|\left|(L(p_0) - p_0)\right|$.
On majore le premier terme du second membre avec l'inégalité du a), puis on récrit $\varepsilon L(p_0)$ sous la forme $\varepsilon p_0 + \varepsilon(L(p_0) - p_0)$, que l'on majore par $\varepsilon p_0 + \varepsilon|L(p_0) - p_0|$.
c) On remarque que :
$$\left(L(p_2) - 2xL(p_1) + x^2 L(p_0)\right)(x) = L(p_2)(x) - 2xL(p_1)(x) + x^2 L(p_0)(x) = \left(L(p_2) - 2p_1 L(p_1) + p_2 L(p_0)\right)(x).$$
L'évaluation en x de l'inégalité du b) donne donc :
$$|L(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \left(|f(x)| + \varepsilon\right)\left|\left(L(p_0) - p_0\right)(x)\right| + M\left(L(p_2) - 2p_1 L(p_1) + p_2 L(p_0)\right)(x).$$
On a donc, *a fortiori* :
$$|L(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \left(N_\infty(f) + \varepsilon\right) N_\infty\left(L(p_0) - p_0\right) + M\, N_\infty\left(L(p_2) - 2p_1 L(p_1) + p_2 L(p_0)\right).$$
Cette inégalité est valable pour tout $x \in [0,1]$ et son second membre ne dépend pas de x. On a donc bien :
$$N_\infty\left(L(f) - f\right) \leq \varepsilon + \left(N_\infty(f) + \varepsilon\right) N_\infty\left(L(p_0) - p_0\right) + M\, N_\infty\left(L(p_2) - 2p_1 L(p_1) + p_2 L(p_0)\right).$$

2. a) $\|p_1 L_n(p_1) - p_1^2\|_\infty = \|p_1.(L_n(p_1) - p_1)\|_\infty \le \|p_1\|_\infty.\|L_n(p_1) - p_1)\|_\infty$ par multiplicativité de la norme infinie.

Donc par majoration $\|p_1 L_n(p_1) - p_1^2\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\big(p_1\, L_n(p_1)\big)$ CVU vers $p_1^2 = p_2$.

De même $\big(p_2\, L_n(p_0)\big)$ CVU vers $p_2 p_0 = p_2$.

Par somme de limites dans l'e.v.n. $(E, \|\ \|_\infty)$, la suite $\big(L_n(p_2) - 2p_1\, L_n(p_1) + p_2\, L_n(p_0)\big)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $p_2 - 2p_2 + p_2 = 0$.

Remarque : l'argument précédent pour la CVU $p_1 L_n(p_1)$ et $p_2 L_n(p_0)$ était en fait aussi un *produit de limites* dans l'algèbre normée $(E, +, \times, .), \|\ \|_\infty)$.

b) En appliquant le 1.c) à L_n, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N_\infty\big(L_n(f) - f\big) \le \varepsilon + \big(N_\infty(f) + \varepsilon\big)\, N_\infty\big(L_n(p_0) - p_0\big) + M\, N_\infty\big(L_n(p_2) - 2p_1 L_n(p_1) + p_2 L_n(p_0)\big).$$

D'après le résultat du a) et l'hypothèse sur (L_n), le second membre de cette inégalité tend vers ε quand n tend vers l'infini ; il sera donc inférieur ou égal à 2ε à partir d'un certain rang et, à partir de ce même rang, on aura bien $N_\infty\big(L_n(f) - f\big) \le 2\varepsilon$.

c) On a finalement montré que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un rang à partir duquel $N_\infty\big(L_n(f) - f\big) \le 2\varepsilon$.

Cela signifie exactement que la suite $\big(L_n(f)\big)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

On a ainsi démontré le théorème de Korovkin.

- **Partie III**

1. La fonction $B_n(f)$ est polynomiale donc continue.
Il est immédiat que $B_n(\lambda f + \mu g) = \lambda B_n(f) + \mu B_n(g)$ et que $B_n(f)$ est positive lorsque f l'est.
B_n est donc bien un endomorphisme positif de E.

2. a) Pour $1 \le k \le n$, $k\binom{n}{k} = k\,\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Il s'ensuit que, pour $2 \le k \le n$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

b) On utilise la formule du binôme et les égalités établies au a) :

- $B_n(p_0)(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$, donc $B_n(p_0) = p_0$.

- Pour $n \ge 1$, $B_n(p_1)(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{k}{n}\, x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x$, donc

$$B_n(p_1) = p_1$$

Par ailleurs $B_0(p_1) = 0$.

- On suppose $n \ge 2$. En écrivant $k^2 = k(k-1) + k$, on obtient d'abord :

$B_n(p_2)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{k^2}{n^2}\, x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{k(k-1)}{n^2}\, x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{k}{n^2}\, x^k (1-x)^{n-k}$.

En utilisant maintenant le a), il vient :

$B_n(p_2)(x) = \dfrac{(n-1)\,x^2}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} + \dfrac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x^2 + \dfrac{x - x^2}{n}$.

Finalement, pour $n \ge 2$, $B_n(p_2) = p_2 + \dfrac{1}{n}(p_1 - p_2)$. On a directement $B_1(p_2) = p_1$ et $B_0(p_2) = 0$.

3. Les résultats obtenus au 2.b) montrent immédiatement que les suites $\big(B_n(p_0)\big)$, $\big(B_n(p_1)\big)$ et $\big(B_n(p_2)\big)$ convergent uniformément sur $[0,1]$, respectivement vers p_0, p_1 et p_2 :

pour $B_n(p_2)$ il suffit de dire que $\|\dfrac{1}{n}(p_1 - p_2)\|_\infty = \dfrac{1}{n}\|p_1 - p_2\|_\infty$ et comme $\|p_1 - p_2\|_\infty$ est indépendante de n, on a $\|\dfrac{1}{n}(p_1 - p_2)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $B_n \in \mathscr{L}^+(E)$, le théorème de Korovkin s'applique ; il en résulte que pour toute $f \in E$, la suite $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

De plus, comme on l'a déjà remarqué, $B_n(f)$ est en fait une fonction polynomiale. On a donc en particulier démontré que toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Problème 2 : développements eulériens pour $\operatorname{sh}(x)/x$ ou $x/\operatorname{sh}(x)$

1. a) P_n est de degré $2n-1$ et de coefficient dominant $4n$.

b) 1 n'est pas racine de P_n donc l'équation $P_n(z)=0$ se réécrit $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=1$, c'est-à-dire $\dfrac{1+z}{1-z}\in\mathbb{U}_{2n}$.

Cela donne $\dfrac{1+z}{1-z}=e^{ik\pi/n}$, puis $z\,(1+e^{ik\pi/n})=e^{ik\pi/n}-1$, avec $k\in[\![-(n-1),\,n]\!]$, et finalement :

$$z=\frac{2i\sin(k\pi/2n)\,e^{ik\pi/2n}}{2\cos(k\pi/2n)\,e^{ik\pi/2n}}=i\tan\frac{k\pi}{2n},\ \text{avec}\ k\in[\![-(n-1),\,n-1]\!].$$

La fonction tangente étant strictement croissante sur $]-\pi/2,\,\pi/2[$, P_n possède $2n-1$ racines distinctes.

c) De a) et b) on déduit : $P_n=4nX\prod_{k=1}^{n-1}\Big(X-i\tan\dfrac{k\pi}{2n}\Big)\prod_{k=1}^{n-1}\Big(X+i\tan\dfrac{k\pi}{2n}\Big)=4nX\prod_{k=1}^{n-1}\Big(X^2+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n}\Big)$.

2. En identifiant le coefficient de X dans la forme initiale et dans la forme factorisée de P_n on obtient $\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\dfrac{k\pi}{2n}=1$.

(On peut aussi remarquer que dans ce produit, les facteurs d'indice k et d'indice $n-k$ sont inverses l'un de l'autre.)

3. a) $P_n\Big(\dfrac{x}{2n}\Big)=\Big(1+\dfrac{x}{2n}\Big)^{2n}-\Big(1-\dfrac{x}{2n}\Big)^{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^x-e^{-x}=2\operatorname{sh}x$.

b) Selon 1.c) et 2., $P_n\Big(\dfrac{x}{2n}\Big)=2x\prod_{k=1}^{n-1}\Big(\dfrac{x^2}{4n^2}+\tan^2\dfrac{k\pi}{2n}\Big)=2x\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{x^2\cotan^2\frac{k\pi}{2n}}{4n^2}\right)$.

Le résultat demandé découle alors directement du a) (en traitant à part le cas évident où $x=0$).

4. a) Supposons d'abord $n>k$. $0\le u_k(n)\le\dfrac{x^2\cotan^2\frac{k\pi}{2n}}{4n^2}$ et, sur $\Big]0,\dfrac{\pi}{2}\Big[$, $0\le\cotan u\le\dfrac{1}{u}$, donc $0\le u_k(n)\le\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}$.

Le dernier encadrement est évidemment encore valable si $n\le k$.

$\sum\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}$ est une série convergente indépendante de n, d'où la convergence normale demandée.

b) $\cotan u\sim_{u\to0}\dfrac{1}{u}$, donc $u_k(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln\Big(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\Big)$.

c) Par passage au logarithme, 3.b) se réécrit : $\sum_{k=1}^{n-1}u_k(n)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\ln\big(f(x)\big)$.

Mais par ailleurs, d'après a), b) et le théorème de sommation des limites, le membre de gauche converge vers $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\Big(1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\Big)$; d'où le résultat par unicité de la limite.

d) Selon c), $\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(\dfrac{k^2\pi^2}{x^2+k^2\pi^2}\Big)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln\big(f(x)\big)$. Par continuité de l'exponentielle,

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2\pi^2}{x^2+k^2\pi^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

.

5. a) Par décomposition en éléments simples, F_n peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lambda_k(n)}{X+k^2\pi^2}$, pour des $\lambda_k(n)$ convenables.

La méthode "du cache" donne $\lambda_k(n)=\dfrac{\big((n-1)!\big)^2\pi^{2(n-1)}}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n-1}\left(i^2\pi^2-k^2\pi^2\right)}=\dfrac{\big((n-1)!\big)^2\pi^2}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n-1}(i-k)\ \prod_{i=1,i\neq k}^{n-1}(i+k)}$

On calcule ensuite $\prod_{i=1, i\neq k}^{n-1} (i-k) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(n-k-1)!$ et $\prod_{i=1, i\neq k}^{n-1} (i+k) = \dfrac{(n+k-1)!}{2k\;k!}\cdot$

Finalement, $\lambda_k(n) = \dfrac{2k^2\big((n-1)!\big)^2\pi^2}{(-1)^{k-1}(n-k+1)!\,(n+k+1)!} = k^2\pi^2 a_k(n)$.

b) L'évaluation en 0 de l'égalité du a) donne $\sum_{k=1}^{n-1} a_k(n) = 1$.

6. a) $F_n(x^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ d'après 4.d).

b) Selon 5.a) et 5.b) : $F_n(x^2) = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{k^2\pi^2 a_k(n)}{x^2+k^2\pi^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k(n) - \dfrac{x^2 a_k(n)}{x^2+k^2\pi^2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k(n) =$ $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n)$.

Le a) donne alors $f(x) = 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} v_k(n)\right)$.

c) Le raisonnement est le même qu'au 4. Pour $n > k$, $a_k(n) = 2(-1)^{k-1}\dfrac{(n-k)\times\ldots\times(n-1)}{n\times\ldots\times(n+k-1)}$, donc :

- D'une part, à k fixé, $a_k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,(-1)^{k-1}$ et donc $v_k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2\,(-1)^k x^2}{x^2+k^2\pi^2}\cdot$
- D'autre part, $|a_k(n)| \leq 2$, donc $|v_k(n)| \leq \dfrac{2x^2}{x^2+k^2\pi^2}$; cette inégalité est évidemment encore valable si $n \leq k$.

Comme $\sum \dfrac{2x^2}{x^2+k^2\pi^2}$ est une série convergente indépendante de n, on en déduit que :
$\sum v_k$ converge normalement sur $[\![2, +\infty[\![$.
On peut appliquer le théorème de sommation des limites en $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^k x^2}{x^2+k^2\pi^2}\cdot$$

Le b) peut alors se réécrire sous la forme : $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2\,(-1)^k x^2}{x^2+k^2\pi^2}\cdot$

7. a) $\dfrac{x^2}{x^2+k^2\pi^2} = \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}}$ et $0 \leq \dfrac{x^2}{k^2\pi^2} \leq \dfrac{x^2}{\pi^2} < 1$, par conséquent :

$$\frac{x^2}{x^2+k^2\pi^2} = \frac{x^2}{k^2\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}}\cdot$$

b) Pour $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, posons $r_{n,k} = \dfrac{2\,(-1)^{n+k-1}x^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}}\cdot$

Compte tenu du a), le 6.c) se réécrit $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r_{n,k}\right)$. (*)

Pour k fixé, $\sum_{n=1}^{+\infty} |r_{n,k}| = \dfrac{2x^2}{k^2\pi^2 - x^2}$, qui est le terme général d'une série convergente.

La suite double $(r_{n,k})$ est donc sommable, ce qui permet d'intervertir les sommes dans (*). On obtient ainsi :

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2(-1)^{n-1}x^{2n}}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^{2n}}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^{n-1}S_{2n}}{\pi^{2n}}\,x^{2n}.$$

c) L'égalité du b) signifie que f est développable en série entière sur $]-\pi, \pi[$. En particulier, f est de classe C^∞.