Banque CCINP : Ex. 25. 1), 28, 29.1 et 29.2),

Intégrabilité, convergence, calcul d'intégrale de fontions concretes

Exercice 1. Etudier l'intégrabilité de f sur I dans les cas suivants :

a) $f(t) = \dfrac{e^t \sin(t)}{1+t^2e^t}$ avec $I = \mathbb{R}$,

b) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \sin(\dfrac{1}{\sqrt{t}})$ avec $I =]0,+\infty[$,

c) $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$ avec $I =]0,1[$.

d) $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t+e^t}$ avec $I =]0,+\infty[$,

e) $f(t) = \ln(t)^{-\ln(t)}$ avec $I =]1,+\infty[$.

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos^2(t)dt.$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$ pour $\alpha > 0$.

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}.\left(1+\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\right)dt$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt.$

Exercice 3 (Avec des calculs d'intégrale en plus)**.** Existence et calcul de :

a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}dt$

b) $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2} - \frac{1}{x(1+x^2)}\right)dx$

c) **Mines Ponts Nicolas Leenhardt 2022.**

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{ch}^2(t)}dt.$

Voir davantage pour les révisions de calculs d'intégrales au verso.

Exercice 4. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 5 (Intégrales pulsantes, niveau Mines-Centrale)**.** Soit $f : x \mapsto \exp(-x^2|\sin(x)|)$.
a) Tracer le graphe de f à la calculatrice ou l'ordinateur.
b) Etudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercices avec des conditions plus théoriques

Exercice 6. Donner un exemple de deux fonctions f, g c.p.m. intégrables sur un voisinage de $+\infty$ telles que le produit ne soit pas intégrable sur ce voisinage.

Exercice 7 (Version intégrale du lemme de comparaison logarithmique)**.** a) Le résultat suivant est un exercice classique sur les séries à termes positifs :
(i) Soient (u_n) et (v_n) deux S.T.P. telles que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\quad u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$$

Montrer que :
- si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

(ii) Retrouver le résultat du critère (ou test) de d'Alembert à l'aide du (i).
b) Soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$ telles que g est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \frac{g(x+1)}{g(x)}.$$

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8 (Mines Ponts Yassine Benissad 2022)**.** 1) Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^x f$ a une limite finie en $+\infty$.
Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f' \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer les limites en $\pm\infty$ de f.
Indication (non donnée à l'oral) pour le 1) – On pourra considérer des valeurs moyennes $\displaystyle\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f$

Révisions sur les calculs d'intégrales : fonctions rationnelles et autres..

Exercice 9 (Fonctions rationnelles :)**.** Existence et calcul de :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2.(x+2)^2}$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx$ *Ne pas se jeter sur la D.E.S. ici !*

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 - 4b < 0$.

Exercice 10 (Intégrales se ramenant à des intégrales de fonctions rationnelles)**.** a) Fonctions « rationnelles en une variable e^{at} » : calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x+1).(e^{-x}+1)}$.

b) Fonctions « rationnelles en $\cos, \sin, \tan$ » : une méthode « générale » mais qui peut donner de gros calculs :
Les formules de la tangente de l'arc moitié : A savoir :

En posant $t = \tan(x/2)$ (attention sur chaque intervalle où cela a du sens) :
$\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{t^2+1}dt$ (ce dernier point est l'essentiel)

i) Calculer (et retenir) une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ par cette méthode.

ii) Calculer ainsi $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)}$.

c) Les formules de trigo restent bien utile ; Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(\cos(t)+\sqrt{3}\sin(t))^2}$.

d) Parfois, on vous donne le changement de variable à vous de faire apparaître la bonne fonction, avec l'élément différentiel en offrande.
Exemple : calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$ en posant $u = \cos(t)$ ce qui demande de ne faire apparaître que de $\cos(t)$ sauf au numérateur $du = -\sin(t)dt$ « en offrande »

Intégrales non élémentaires

On appelle intégrale non élémentaire une intégrale entre deux bornes bien précises d'une fonction dont on ne peut pas écrire la primitive en terme de fonctions usuelles. Par exemple l'intégrale de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ *en est une.*

Exercice 11. a) Justifier la convergence de $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}dx$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,
$$\int_0^x \frac{t}{\ln(t)}\,dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{\ln(u)}$$

c) En déduire que $I = -\displaystyle\lim_{x\to 1} \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln(t)}$.

d) Montrer que pour tout $t \in]0,1[$,
$$\frac{t}{1-t} \le -\frac{1}{\ln(t)} \le \frac{1}{1-t}.$$

e) En déduire la valeur de I.

Remarque pour les 5/2 : la soeur « inversée » de cette intégrale à savoir $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}dx$ est un grand classique de calcul d'intégrale par I.T.T. cf. cours de l'an dernier.