MP 2 **Samedi 26 Novembre 2022**

Devoir surveillé 3 (4h)

Exercice : Étude de la somme d'une série de fonctions

Pour $x > 0$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer qu'il existe un constante C, que l'on précisera, telle que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{x}$.

d) Soit $x > 0$. Donner une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

e) Déterminer un équivalent simple de S en 0^+.

Problème : Étude spectrale d'un opérateur de transfert

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et T un endomorphisme de V : on dira que le complexe λ est une valeur propre de T s'il existe un élément f de V non nul tel que $Tf = \lambda f$.
Soit $\mathcal{C}^0$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 1-périodiques. Cet espace est normé par

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$$

On admettra qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathcal{C}^0$. On désigne par e_0 la fonction constante égale à 1 sur tout $\mathbb{R}$ et par D le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ engendré par e_0.
Si $f \in \mathcal{C}^0$, on définit

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})\right)$$

L'application T est clairement linéaire : on l'admettra également.
L'objet du problème est l'étude des propriétés spectrales de diverses restrictions de T à des sous-espaces invariants de $\mathcal{C}^0$. On mettra en évidence sur certains de ces sous-espaces la propriété de "trou spectral" : il existe $0 < r < 1$ tel que les valeurs propres autres que 1 sont de module inférieur ou égal à r.

1 Préliminaires.

1) Montrer que si f appartient à $\mathcal{C}^0$ alors Tf aussi.

2) Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0$ on a l'inégalité $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ puis que

$$\sup_{\|f\|_\infty = 1} \|Tf\|_\infty = 1$$

3) Montrer que toute valeur propre de T est de module inférieur ou égal à 1.

On appelle H^0 l'hyperplan de $\mathcal{C}^0$ des fonctions f telles que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = 0$$

4) Montrer que H^0 est stable par T et que $D \oplus H^0 = \mathcal{C}^0$.

5) Expliciter le projecteur P sur D parallèlement à H^0.

6) Les **coefficients de Fourier** de $f \in \mathcal{C}^0$ sont définis pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)\exp(-2i\pi kt)dt$$

   i) Calculer explictement les coefficients de Fourier de la fonction définie par $f(t) = \sin(2\pi t)$.

   ii) On fixe $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'application $f \mapsto c_k(f)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0$. Calculer sa norme d'opérateur $|||c_k|||$.

2 Fonctions trigonométriques.

Pour tout entier relatif k, on note $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ de sorte que e_k est continue et 1-périodique, c'est-à-dire que e_k appartient à $\mathcal{C}^0$. Pour tout entier n, on désigne par E_n le sous-espace de $\mathcal{C}^0$ engendré par $e_0, e_1, e_{-1}, \ldots, e_n, e_{-n}$.

On admettra que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre et que $E_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dense dans $\mathcal{C}^0$.

7) Déterminer Te_k (respectivement Pe_k) pour tout entier relatif k et en déduire que les espaces E_n sont T-stables (respectivement P-stables).

On note T_n (respectivement P_n) l'endomorphisme de E_n induit par T (respectivement par P).

8) Calculer les valeurs propres de T_2. L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k l'unique entier tel que $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Montrer pour tout entier $p \geq k$, l'identité suivante :

$$T_n^p = P_n$$

10) Calculer les coefficients de Fourier de Tf en fonction de ceux de f pour tout $f \in \mathcal{C}^0$.

11) Soit $f \in \mathcal{C}^0$ telle que $c_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   i) Montrer que pour tout $g \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, on a $\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt = 0$.

   ii) En déduire que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0$ puis que $f = 0$.
   Indication : On pourra considérer une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E_∞ convergeant vers f.

On déduit du résultat de la question précédente que deux éléments de $\mathcal{C}^0$ coïncident si et seulement si ils ont les mêmes coefficients de Fourier.

12) Caractériser les éléments f du noyau de T par une CNS portant sur les coefficients de Fourier de f.

3 Fonctions höldériennes.

13) Montrer que pour tous les réels x et y,

$$|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle $\mathcal{C}^\alpha$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0$ des fonctions f telles que

$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\} \quad \text{soit majoré}$$

On notera alors

$$m_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \right\}$$

14) Montrer que $\mathcal{C}^\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ et que la formule $\|f\|_\alpha = m_\alpha(f) + \|f\|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{C}^\alpha$.

15) Montrer que $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par T.
On notera T_α l'endomorphisme de $\mathcal{C}^\alpha$ induit par T.

16) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^\alpha$, $\|T_\alpha f\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha$ puis que $\sup_{\|f\|_\alpha=1} \|T_\alpha f\|_\alpha = 1$.

Soit λ un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. On pose, pour tout réel x,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k e_{2^k}(x)$$

17) Montrer que la série de fonctions $\sum_k \lambda^k e_{2^k}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue f_λ.
Montrer que f_λ est 1-périodique et que $T f_\lambda = \lambda f_\lambda$.

18) Soit maintenant λ tel que $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$ et deux réels x et y tels que

$$2^{-n-1} < |x - y| \leq 2^{-n}$$

En considérant séparément les sommes avec $k \leq n$ et $k > n$ dans la série ayant pour somme $f_\lambda(x) - f_\lambda(y)$, montrer que $f_\lambda \in \mathcal{C}^\alpha$.

19) Montrer que T_α laisse stable $H^\alpha = H^0 \cap \mathcal{C}^\alpha$.

20) Soit $f \in \mathcal{C}^0$, montrer que

$$T^n(f)(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n} + x2^{-n})$$

21) Etablir, pour $f \in \mathcal{C}^\alpha$, l'inégalité suivante :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_\alpha^n(f)(x) - \int_0^1 f(t)\, dt| \leq m_\alpha(f) 2^{-n\alpha}$$

22) Montrer que si $f \in H^\alpha$ alors pour tout entier n, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

23) En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T_α est la réunion du singleton $\{1\}$ et du disque fermé de centre 0 et de rayon $2^{-\alpha}$ (phénomène de trou spectral).