Devoir surveillé 3 : corrigé

Exercice : Étude de la somme d'une série de fonctions

a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.
Pour tout $n \geq 1$: $0 < \dfrac{1}{n+x} \leq \dfrac{1}{n}$ donc $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n.n!} \leq \dfrac{1}{n^2}$ terme général de série convergente (T.G.S.C.-
Donc par théorème de comparaison $\sum |u_n(x)|$ converge, donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente et f est bien définie.

b) Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$ à l'aide du théorème sur le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une somme de série.
- (H1) par a), la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$,
- (H2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) par théorème généraux.
- (H3) à vérifier : montrons que que la série dérivée $\sum u_n^{'}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n'(x)| = \left| \frac{1}{n!(x+n)^2} \right| \leqslant \frac{1}{n!(a+n)^2} \leqslant \frac{1}{a^2} \frac{1}{n!}$$

La convergence de la série $\sum \frac{1}{n!}$ garantit la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$ donc (H3) est vérifiée et la conclusion suit.

c) **Idée :**

$$\boxed{\text{Il s'agit de montrer que } xS(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} C \in \mathbb{R}^*. \text{ Pour cela le T.S.L. s'applique}}$$

On considère donc $xS(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x}{x+n}$, en posant $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!} \cdot \dfrac{x}{x+n}$. Alors :

- (H1) :

$$v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

- (H2)

$$|v_n(x)| = \frac{1}{n!} \frac{x}{x+n} \leqslant \frac{1}{n!}. \quad \text{T.G.S.C.}$$

Donc la série $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ en particulier uniformément.
Avec (H1), (H2) et le Théorème de Sommation des Limites (T.S.L.), on conclut que :

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

d) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n!(x+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(1 - \frac{x}{x+n}\right) \\ &= \left(1 - e^{-1}\right) + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} = \left(1 - e^{-1}\right) + x \left(S(x) - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{S(x+1) = xS(x) - e^{-1} \quad (*)}$$

.

e) Puisque S est continue (elle est de classe $\mathcal{C}^1$), la relation $(*)$ donne :

$$xS(x) - e^{-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} S(1) \qquad (**)$$

Or

$$S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - e^{-1}$$

On en déduit avec $(**)$ que : $xS(x) - e^{-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 - e^{-1}$ et finalement que :

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Problème : Étude spectrale d'un opérateur de transfert

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Par théorèmes généraux, la continuité de f entraîne celle de $T(f)$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x+1) = \frac{1}{2}\Big(f(\frac{x+1}{2}) + f(x/2+1)\Big) = \frac{1}{2}\Big(f(\frac{x+1}{2}) + f(x/2)\Big) = T(f)(x)$$

et $T(f)$ est donc 1-périodique ce qui donne finalement $T(f) \in \mathcal{C}^0$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^0$; pour tout t on a $\|f(t)\| \le \|f\|_\infty$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |T(f)(x)| \le \frac{1}{2}\left(|f(x/2)| + |f((x+1)/2)|\right) \le \|f\|_\infty$$

c'est à dire $\|T(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$. On en déduit la continuité de T, et l'inégalité $\sup_{\|f\|_\infty=1} \|T(f)\|_\infty \le 1$.
De plus, pour $f = e_0$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ ce qui montre que $\max_{\|f\|_\infty=1} \|T(f)\|_\infty = 1$.

3) Pour λ vp non nulle et f vecteur propre associé, on a $|\lambda|\|f\|_\infty = \|T(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$ d'où le résultat en simplifiant par $\|f\|_\infty$ qui est non nul.

4) • Soit $f \in H^\circ$; le changement de variable $u = x/2$ donne

$$\int_0^1 f(x/2)\ dx = 2\int_0^{1/2} f(u)\ du$$

De même, en posant $u = (x+1)/2$ on a

$$\int_0^1 f((x+1)/2)\ dx = 2\int_{1/2}^1 f(u)\ du$$

En combinant ces égalités, on a alors

$$\int_0^1 T(f)(x)\ dx = \int_0^1 f(u)\ du = 0$$

et donc $T(f) \in H^\circ$. H° est ainsi stable par T.
• On peut procéder par analyse-synthèse, on obtient la décomposition $f = f - (\int_0^1 f)e_0 + (\int_0^1 f)e_0$.

5) Le calcul qui précède indique que $P(f) = \left(\int_0^1 f\right) e_0$.

6) i) Par Euler, $f(t) = \sin(2\pi t) = (e^{2i\pi t} - e^{-2i\pi t})/2i$. On voit ainsi que seuls les coefficients de Fourier de coefficients ± 1 sont non nuls, valant $\pm 1/2i$, puisque $\int_0^1 e^{2i\pi kt}dt = 1$ si $k = 0$, 0 sinon (en primitivant).

ii) La linéarité est celle de l'intégrale, la continuité vient de l'IT
$|c_k(f)| \le \int_0^1 |f(t)|.|\exp(-2i\pi kt)|dt \le \|f\|_\infty$, qui donne aussi $|||c_k||| \le 1$. On a enfin $|||c_k||| \ge |c_k(e_k)| = 1$ d'où le résultat.

7) On a $T(e_k)(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2ik\pi\frac{x}{2}} + e^{2ik\pi\frac{x+1}{2}}\right) = \frac{e^{ik\pi x}}{2}(1+e^{ik\pi})$ et ainsi $T(e_{2k+1}) = 0$ et $T(e_{2k}) = e_k$
Chaque élément d'une famile génératrice de E_n est donc envoyé dans E_n par T et ceci indique que E_n est stable par l'application linéaire T.
Par ailleurs, $\int_0^1 e_k$ est nul si $k \ne 0$ et vaut 1 si $k = 0$ ainsi

$$\forall k \ne 0,\ P(e_k) = 0 \ \text{ et } \ P(e_0) = e_0$$

Comme $Im(P) = Vecte_0 \subset E_n$ pour tout n, la stabilité pour P est immédiate.

8) La matrice de T_2 dans la base $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$ est $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Il s'agit d'une matrice triangulaire, donc de valeurs propres les coeff diagonaux, ici 1 et 0 de multiplicités respectives 1 et 4. Comme la matrice est clairement de rang 3, le ss-ev propre associé à la vp 0 n'est pas 4, d'où la non diagonalisabilité de T_2

9) Procédons par récurrence sur l'entier n.
- Pour $n = 1$, $k = 1$. On a $T_1 = P_1$ (ces deux applications linéaires agissent de la même façon sur la base (e_0, e_1, e_{-1}). Ainsi, pour $p \ge 1$, $T_1^p = P_1^p = P_1$ (grâce à $P_1^2 = P_1$).
- Soit $n \ge 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. Soit k l'unique entier tel que $2^{k-1} \le n < 2^k$. $k' = k-1$ vérifie alors $2^{k'-1} \le \lfloor n/2 \rfloor < 2^{k'}$ et par hypothèse de récurrence, $\forall q \ge k-1,\ T_n^q = P_n$ Soit $p \ge k$; on a

$$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = T_{n+1}^{p-1}(T(f))$$

Or, pour $f \in E_{n+1}$, $T(f) \in E_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \subset E_n$ et l'identité précédente s'écrit donc $\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = T_n^{p-1}(T(f))$ Avec l'hypothèse au rang n, on a donc

$$\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = P_n(T(f))$$

Enfin, comme $\int_0^1 f = \int_0^1 T(f)$ (vu en question 4) et avec la formule de P (question 4) on a $P(T(f)) = P(f)$ et ainsi $P_n(T(f)) = P(f) = P_{n+1}(f)$ (pour $f \in E_{n+1}$). On a ainsi $\forall f \in E_{n+1},\ T_{n+1}^p(f) = P_{n+1}(f)$ ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.

10) Soit $f \in \mathcal{C}^0$. Par définition $c_k(T(f)) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x}{2})\, dx + \int_0^1 e^{-2i\pi kx} f(\frac{x+1}{2})\, dx\right)$ On pose $u = x/2$ dans la première intégrale et $u = (x+1)/2$ dans la seconde pour obtenir $c_k(T(f)) = c_{2k}(f)$

11) i) Par linéarité de l'intégrale.
ii) Par continuité de l'application linéaire $g \in \mathcal{C}^0 \mapsto \int_0^1 fg$, qui se prouve en écrivant $|\int_0^1 fg| \le \int_0^1 |f||g| \le \|g\|_\infty \int_0^1 |f|$. Si donc (g_n) converge vers f, $(\overline{g_n})$ tend vers $\overline{f}$ aussi (une fonction et sa conjuguée ont même norme infinie) et par continuité on a $\int_0^1 f(t)\overline{g_n(t)}dt \to \int_0^1 f(t)\overline{f(t)}dt = 0$ comme voulu. La fonction continue et positive $|f|^2$ a une intégrale nulle, elle est donc nulle.

12) Si $T(f) = 0$ alors la question précédente indique que $\forall k,\ c_{2k}(f) = 0$. Réciproquement, si cette propriété est vérifiée alors tous les coefficients de Fourier de $T(f)$ sont nuls et donc $T(f)$ l'est aussi comme on l'a vu en Q11.
$\ker(T)$ est donc constitué des éléments de E dont les coefficients de Fourier d'indices pairs sont nuls.

13) C'est l'inégaité des accroissements finis, appliquée à $f(x) = e^{ix}$ dont la dérivée a un module $= 1$ (et donc ≥ 1).

14) • La fonction nulle est bien sûr hölderienne et 1-périodique et si f, g sont dans $\mathcal{C}^\alpha$ on a par IT
$\frac{|\lambda f(x)+\mu g(x)-\lambda f(y)-\mu g(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \frac{|\lambda||f(x)-f(y)|+|\mu||g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \le |\lambda| m_\alpha(f) + |\mu|.m_\alpha(g)$.
• La positivité est évidente, l'axiome de séparation aussi. L'inégalité triangulaire vient de la majoration précédente en prenant $\lambda = \mu = 1$, puisqu'on avait obtenu $m_\alpha(f+g) \le m_\alpha(f) + m_\alpha(g)$. L'homogénéité peut se voir en écrivant que la borne supérieure des $\frac{|\lambda||f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$, quand x et y varient, est égale à $|\lambda|$ fois la borne supérieure des $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

15) Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha$. On a (inégalité triangulaire)

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \le \frac{1}{2}\left(|f(\frac{x}{2} - f(\frac{y}{2})| + |f(\frac{x+1}{2}) - f(\frac{y+1}{2})|\right)$$

Par définition de $m_\alpha(f)$, on en déduit que

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \le \frac{1}{2} m_\alpha(f)\left(|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}|^\alpha + |\frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2}|^\alpha\right) = \frac{m_\alpha(f)}{2^{1+\alpha}}|x-y|^\alpha$$

$T(f)$ (qui est dans $\mathcal{C}^0$) est donc dans $\mathcal{C}^\alpha$ avec $m_\alpha(T(f)) \le \frac{m_\alpha(f)}{2^{1+\alpha}}$ et $\mathcal{C}^\alpha$ est stable par T.

16) D'après la question précédente, $\|T_\alpha(f)\|_\alpha \le \frac{m_\alpha(f)}{2^{1+\alpha}} + \|T(f)\|_\infty$ Avec la question 2 et comme $2^{1+\alpha} \ge 1$, on a donc

$$\forall f \in \mathcal{C}^\alpha,\ \|T_\alpha(f)\|_\alpha \le m_\alpha(f) + \|f\|_\infty = \|f\|_\alpha$$

On note que $e_0 \in \mathcal{C}^\alpha$ avec $m_\alpha(e_0) = 0$ et donc $\|e_0\|_\alpha$. Comme $T(e_0) = e_0$, l'inégalité qui précède est une égalité pour e_0. On a donc $\sup_{\|f\|_\alpha=1} \|T_\alpha(f)\|_\alpha = 1$

17) On a $|\lambda^k e_{2^k}(x)| \le |\lambda|^k$ Le majorant est indépendant de x et est, si $|\lambda| < 1$, le terme général d'une série convergente. Dans ce cas, $\sum(\lambda^k e_{2^k})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. La fonction somme f_λ est continue comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues (c'était admis, on l'a vu lundi) et 1-périodique car limite simple d'une suite de fonctions 1-périodiques. On a ainsi $f_\lambda \in \mathcal{C}^0$
La question 7 permet de voir que $T(S_n) = \lambda S_{n-1}$ et la 2 montre que T est une application linéaire continue au sens de $\|.\|_\infty$. La suite $(T(S_n))$ est donc convergente au sens de $\|.\|_\infty$ vers $T(f_\lambda)$. Par unicité des limites, on a alors $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ et en évaluant en 0 ($f_\lambda(0) = 1/(1-\lambda)$) on constate que f_λ n'est pas la fonction nulle.

18) • On prend d'abord x, y tels que $|x-y| \le 1$.
Comme $|e_p(x) - e_p(y)| \le 2$, on a par CvA et IT

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \le 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k = \frac{2}{1-|\lambda|}|\lambda|^{n+1}$$

Comme $|\lambda|^{n+1} \le 2^{-\alpha(n+1)}$ et que $2^{-(n+1)} \le |x-y|$ on a $|\lambda|^{n+1} \le |x-y|^\alpha$ et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))\right| \le \frac{2}{1-|\lambda|}|x-y|^\alpha$$

Par ailleurs, comme $|e^{ix} - e^{iy}| \le |x-y|$ on a aussi
$|\sum_{k=0}^n \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))| \le \sum_{k=0}^n |\lambda|^k 2^{k+1}\pi|x-y| \le 2\pi|x-y| \sum_{k=0}^n (2^{1-\alpha})^k$ Comme $|x-y| \le |x-y|^\alpha$ (car $|x-y| \le 1$ et $\alpha \in [0,1]$) et on a donc
$|\sum_{k=0}^n \lambda_k(e_{2^k}(x) - e_{2^k}(y))| \le \frac{2\pi}{1-2^{1-\alpha}}|x-y|^\alpha$.
• Dans le cas $|x-y| > 1$, on majore brutalement par IT et il vient
$|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)| \le 2\|f_\lambda\|_\infty \le 2\|f_\lambda\|_\infty |x-y|^\alpha$
Tout ceci démontre bien l'existence d'une constante C indépendante de x, y telle $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha$ ($C = \max(\frac{2}{1-|\lambda|}, \frac{2\pi}{1-2^{1-\alpha}}, 2\|f_\lambda\|_\infty)$ convient).

19) On a déjà vu que $\mathcal{C}^\alpha$ et H° sont stables par T.

20) On montre par récurrence sur n la propriété $T^n(f)(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n}+x2^{-n})$ pour tous $f\in\mathcal{C}^0$ et $x\in\mathbb{R}$

Pour $n=0$, évident.

Soit $n\geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Soit $f\in\mathcal{C}^0$ et $x\in\mathbb{R}$. On a $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1} T(f)(k2^{-n}+x2^{-n})$

$= 2^{-n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1}\big(f(k2^{-n-1}+x2^{-n-1})$
$+ f(k2^{-n-1}+x2^{-n-1}+\frac{1}{2})\big)$

Le changement d'indice $j=k+2^n$ donne

$\sum_{k=0}^{2^n-1} f(k2^{-n-1}+x2^{-n-1}+\frac{1}{2}) = \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} f(j2^{-n-1}+x2^{-n-1})$ et on peut alors regrouper les sommes pour obtenir

$T^{n+1}(f)(x) = 2^{-(n+1)}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f(k2^{-(n+1)}+x2^{-(n+1)})$ ce que nous voulions.

21) Notons $x_k = x2^{-n}+k2^{-n}$.

La question précédente invite à considérer $2^{-n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k) - \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$.

Pour $f\in\mathcal{C}^0$ relation de Chasles puis par 1-périodicité, on a

$$\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x}{2^n}+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$$

il vient donc $|T^n(f)(x)-\int_0^1 f(t)\,dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1}\left|\frac{f(x_k)}{2^n} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt\right|$ Comme $x_{k+1}-x_k = 1/2^n$, ceci peut aussi s'écrire

$$|T^n(f)(x)-\int_0^1 f(t)\,dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x_k)-f(t))\,dt\right|$$

Si $f\in\mathcal{C}^\alpha$, la positivité de l'intégrale donne

$$|T^n(f)(x)-\int_0^1 f(t)\,dt| \leq \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f(x_k)-f(t)|\,dt \leq \sum_{k=0}^{2^n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} m_\alpha(f)|x_k-t|^\alpha\,dt$$

Pour $t\in[x_k,x_{k+1}]$, $|x_k-t|\leq 2^{-n}$ et ainsi

$$|T^n(f)(x)-\int_0^1 f(t)\,dt| \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha}\int_{\frac{x}{2^n}}^{\frac{x}{2^n}+1} dt = m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$$

Cette inégalité ayant lieu pour tout x, on a finalement (on peut écrire T ou T_α puisque l'on est dans $\mathcal{C}^\alpha$)

$$\sup_{x\in[0,1]}|T_\alpha^n(f)(x)-\int_0^1 f(t)\,dt| \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$$

22) La question précédente donne

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\infty \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha}$$

Par ailleurs, l'application répétée de la majoration de $m_\alpha(T(f))$ vue en question 15 donne

$$m_\alpha(T_\alpha^n(f)) \leq \frac{m_\alpha(f)}{2^{n(\alpha+1)}}$$

On en déduit que

$$\|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq m_\alpha(f)2^{-n\alpha} + m_\alpha(f)2^{-n(\alpha+1)} \leq 2^{1-n\alpha}m_\alpha(f) \leq 2^{1-n\alpha}\|f\|_\alpha$$

23) On a vu en question 17 et 18 que si $|\lambda|\leq 2^{-\alpha}$ alors λ est valeur propre de T_α (de vecteur propre associé $f_\lambda\in\mathcal{C}^\alpha$). Par ailleurs, 1 est aussi valeur propre (vecteur propre e_0 qui est bien dans $\mathcal{C}^\alpha$).

Réciproquement, soit λ une valeur propre de T_α différente de 1. Il existe $f\in\mathcal{C}^\alpha$ non nulle telle que $T_\alpha(f)=\lambda f$. f peut se décomposer sur D et H° en $f = te_0+g$. $T(f)=\lambda f$ donne alors $te_0 + T(g) = \lambda.te_0 + \lambda g$. Par unicité de la décomposition (on sait que $T(g) \in H^\circ$), on a donc $\lambda te_0 = te_0$ et $T(g) = \lambda g$. Comme $\lambda \neq 1$, on a $t = 0$ et $f = g \in H^\alpha$. D'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda^n| \|f\|_\alpha = \|T_\alpha^n(f)\|_\alpha \leq 2^{1-n\alpha} \|f\|_\alpha$$

et donc (comme $\|f\|_\alpha > 0$ et par croissance de l'élévation à la puissance $1/n$)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda| \leq 2^{1/n} 2^{-\alpha}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|\lambda| \leq 2^{-\alpha}$. Les seules valeurs propres possibles sont bien celles annoncées.