DM 7 : Suites et séries de fonctions

Pour le lundi 5 décembre

Problème 1 : un théorème d'approximation uniforme

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on munit E de la norme uniforme, notée N_∞.
On rappelle que l'on définit sur E une relation d'ordre partiel $\leq$ par :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ f(x) \leq g(x).$$

Avertissement *: il est absolument essentiel dans ce problème de distinguer soigneusement les éléments de E de leurs valeurs en certains points, et aussi les inégalités entre nombres réels des inégalités entre fonctions.*

Définitions : Une fonction $f \in E$ est dite positive si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Un endomorphisme L de E est dit positif si l'image par L de toute fonction positive est encore une fonction positive.

On notera $\mathscr{L}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes positifs de E.

On note p_0, p_1, p_2 les éléments de E définis par : $\forall x \in [0,1],\ p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2$.

L'objectif principal du problème est de démontrer le théorème suivant :

Théorème :
Soit (L_n) une suite d'éléments de $\mathscr{L}^+(E)$.
On suppose que pour $i \in \{0,1,2\}$ la suite $\big(L_n(p_i)\big)$ converge uniformément vers p_i sur $[0,1]$.
Alors, pour toute $f \in E$, la suite $\big(L_n(f)\big)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie I : Préliminaires

1. Soient $(f,g) \in E^2$ et $L \in \mathscr{L}^+(E)$.

a) Montrer que si $f \leq g$, alors $L(f) \leq L(g)$.

b) Montrer : $\big|L(f)\big| \leq L\big(|f|\big)$.

c) *Cette question ne sera pas utilisée dans la suite du problème.*
Montrer que pour toute $f \in E$, $N_\infty\big(L(f)\big) \leq N_\infty\big(L(p_0)\big)\, N_\infty(f)$. Que peut-on en déduire concernant L ?

Jusqu'à la fin de la partie **II**, on fixe $f \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

2. a) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall (t,x) \in [0,1]^2,\ |t-x| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

b) On fixe un tel α et on pose $M = \dfrac{2N_\infty(f)}{\alpha^2}\cdot$ Montrer que :

$$\forall (t,x) \in [0,1]^2,\ |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + M(t-x)^2.$$

c) Soit $x \in [0,1]$. Déduire du b) l'inégalité suivante entre éléments de E :

$$\big|f - f(x)\,p_0\big| \leq \varepsilon p_0 + M(p_2 - 2xp_1 + x^2 p_0).$$

Partie II : La preuve du théorème

1. Soient $L \in \mathscr{L}^+(E)$ et $x \in [0,1]$.

a) Montrer : $\big|L(f) - f(x)L(p_0)\big| \leq \varepsilon L(p_0) + M\big(L(p_2) - 2xL(p_1) + x^2 L(p_0)\big)$.

b) En déduire : $\big|L(f) - f(x)p_0\big| \leq \varepsilon p_0 + \big(|f(x)| + \varepsilon\big)\big|L(p_0) - p_0\big| + M\big(L(p_2) - 2xL(p_1) + x^2 L(p_0)\big)$.

c) Écrire l'inégalité entre réels obtenue en évaluant au point x l'inégalité du b). En déduire :

$$N_\infty\big(L(f) - f\big) \leq \varepsilon + \big(N_\infty(f) + \varepsilon\big)\, N_\infty\big(L(p_0) - p_0\big) + M\, N_\infty\big(L(p_2) - 2p_1 L(p_1) + p_2 L(p_0)\big).$$

2. Soit maintenant (L_n) une suite d'éléments de $\mathscr{L}^+(E)$ vérifiant les hypothèses du théorème.

a) Montrer que les suites $\big(p_1\, L_n(p_1)\big)$ et $\big(p_2\, L_n(p_0)\big)$ convergent uniformément sur $[0,1]$ et préciser leur limite.

Que dire de la suite $\big(L_n(p_2) - 2p_1\, L_n(p_1) + p_2\, L_n(p_0)\big)$?

b) Montrer que pour n assez grand, $N_\infty\big(L_n(f) - f\big) \leq 2\varepsilon$.

c) Conclure.

Partie III : Application aux polynômes de Bernstein et au théorème de Weierstrass

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$B_n(f) : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $B_n \,:\, f \mapsto B_n(f)$ est un endomorphisme positif de E.

2. a) Sous des conditions à préciser, exprimer $k\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$ et $k(k-1)\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-2}{k-2}$.

b) Calculer $B_n\,(p_0)\,, B_n\,(p_1)$ et $B_n\,(p_2)$.

3. En déduire une démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass (cf.cours T4) :

Toute fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Problème 2 : développements eulériens pour $\mathrm{sh}(x)/x$ ou $x/\mathrm{sh}(x)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}\, x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

On établit dans ce problème diverses expressions de f sous forme de somme ou de produit.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $P_n = (1+X)^{2n} - (1-X)^{2n}$.

a) Préciser le degré et le coefficient dominant de P_n.

b) Calculer les racines complexes de P_n, sous la forme la plus simple possible.

c) En déduire : $P_n = 4nX \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right)$.

2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\cdot$ *Indication* : on peut utiliser le 1. ou procéder directement.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la limite de $P_n\left(\dfrac{x}{2n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{x^2 \,\mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n}}{4n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{f(x)}\cdot$

4. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on pose, pour $(k,n) \in [\![1,+\infty[\![\times [\![2,+\infty[\![$, $u_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k \\ \ln\left(1 + \dfrac{x^2 \,\mathrm{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n}}{4n^2}\right) & \text{si } n > k. \end{cases}$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $[\![2, +\infty[\![$.

b) Pour k fixé, déterminer la limite de $u_k(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

c) En déduire : $\ln\big(f(x)\big) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

d) Quelle est la limite de $\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2\pi^2}{x^2+k^2\pi^2}$ quand n tend vers $+\infty$?

On considère maintenant, pour $n \geq 2$, la fraction rationnelle $F_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k^2\pi^2}{X+k^2\pi^2}$.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ on pose $a_k(n) = \frac{2\,(-1)^{k-1}\big((n-1)!\big)^2}{(n-k-1)!\,(n+k-1)!}$.

5. a) Montrer : $F_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2\pi^2 a_k(n)}{X+k^2\pi^2}$.

b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n-1} a_k(n)$.

6. x étant de nouveau fixé dans $\mathbb{R}$, on pose $v_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \leq k \\ -\frac{x^2\, a_k(n)}{x^2+k^2\pi^2} & \text{si} \quad n > k. \end{cases}$

a) Quelle est la limite de $F_n(x^2)$ quand n tend vers $+\infty$?

b) En déduire : $f(x) = 1 + \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n) \Big)$.

c) Montrer finalement : $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^k x^2}{x^2+k^2\pi^2}$.

7. On suppose maintenant que $x \in]-\pi, \pi[$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $S_\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

a) Justifier : $\frac{x^2}{x^2+k^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{k^{2n}\pi^{2n}}$.

b) En déduire : $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^{n-1} S_{2n}}{\pi^{2n}}\, x^{2n}$.

c) *(Pour les 5/2)* Que signifie ce résultat pour la fonction f ?