DM 6 : Prolongement des formes linéaires, solutions

1) On suppose dans cette question seulement que E est euclidien i.e. de dimension finie et muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.

   a) Justifier qu'il existe un vecteur $a \in F$ telle que pour tout $x \in F$, $\ell(x) = (a|x)$.

   Il s'agit du lemme de Riesz : si on fixe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F alors pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $\ell(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ où $a_i = \ell(e_i)$. Alors en posant $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, on a par calcul du p.s. dans une b.o.n. pour tout $x \in E$ $(a|x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \ell(x)$.

   b) En déduire une solution L du **Problème P** pour ℓ.

   Avec les notations de la question précédente, posons $L\ :\ E\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (a|x)$.

   On a bien sûr $L_{|F} = \ell$.

   Ensuite par hypothèse, pour tout $x \in F$, $|\ell(x)| \leq \|x\|$.

   En particulier pour $x = a$,, on a $|\ell(a)| \leq \|a\|$ et donc d'après l'écriture de ℓ, $|(a|a)| \leq \|a\|$ donc $\|a\|^2 \leq \|a\|$ donc $\|a\|\ \leq 1$.

   Mais par I.C.S. pour tout $x \in E$, $|L(x)| = |(a|x) \leq \|a\|.\|x\|$. Donc ici comme on a montré que $|L(x)| \leq \|x\|$ donc le problème **P** est tésolu.

2) a) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $f\ :\ E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto ax + by$.

   Soit $u = (x, y)$ on a $|f(u)| = |ax + by| \leq |a| \max(|x|, |y|) + |b| \max(|x|, |y|) = (|a| + |b|).\|u\|_\infty$.

   Donc $\|f\| \leq |a| + |b|$.

   En outre si on définit la fonction $sgn\ :\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\ \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et qu'on prend

   $$u = (sgn(a), sgn(b)),$$

   on a $|f(u)| = a\,\mathrm{sgn}(a) + b\,\mathrm{sgn}(b) = |a| + |b|$ et $\|u\|_\infty = 1$ donc $\|f\| = |a| + |b|$.

   b) Soit $L\ :\ (x, y) \in E \longmapsto ax + by$ une forme linéaire quelconque sur E.

   • La condition pour que L prolonge ℓ est simplement, par linéarité, que $L(\varepsilon) = 1$ i.e. que

   $$a + \frac{b}{2} = 1 \quad (1)$$

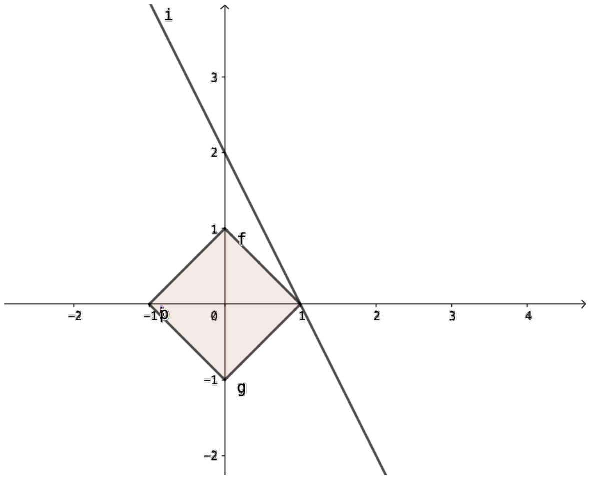
   • La forme ℓ telle que $\ell(\varepsilon) = 1$ vérifiait bien $\forall\, u = (x, y) \in F$, $|\ell(u)| \leq \|u\| = \max(x, y)$ car $|\ell(\varepsilon) = 1| \leq \max(1, 1/2) = 1$ et la conclusion par linéarité.

   La condition que L vérifie $\forall\, u \in E$, $|L(u)| \leq \|u\|$ est exactement que $\|L\|\ \leq 1$, i.e.

   $$|a| + |b| \leq 1 \quad (2)$$

   (M1) Pour conclure : les couples (a, b) définissant un prolongement L vérifiant (1) et (2) sont donc les points $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à l'intersection de la droite d'équation (1) et de la boule unité fermée pour la norme 1 définie par (2).

   Le dessin suivant montre que cet intersection se réduit au point $(a, b) = (1, 0)$ il est facile de passer de ce dessin à un preuve de ce fait (par exemple quadrant par quadrant si on n'a pas de meilleure idée).



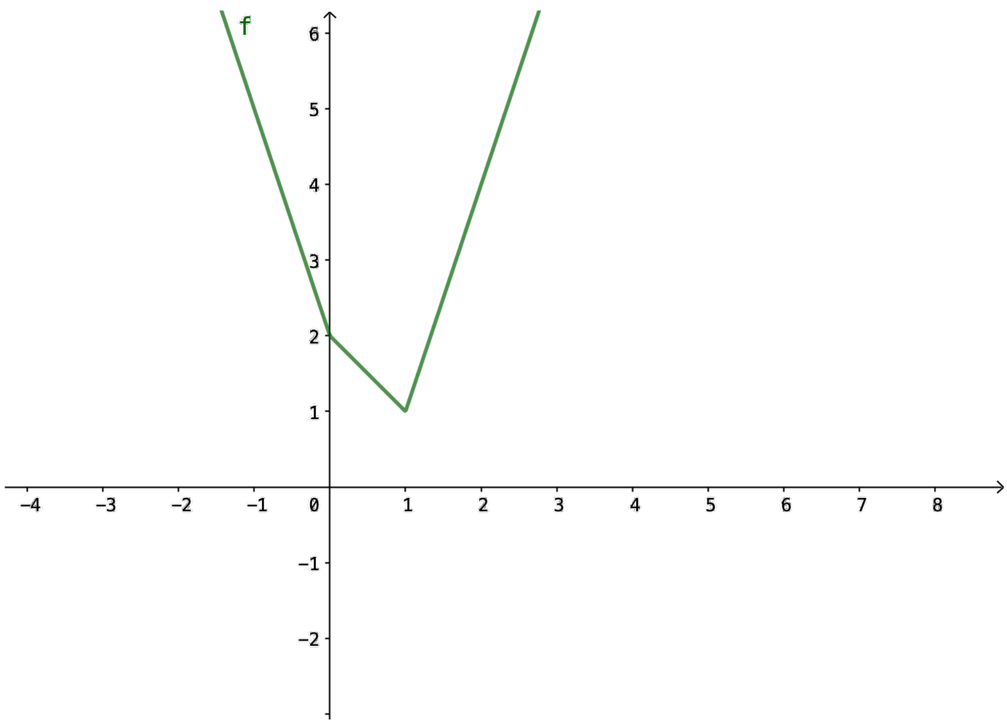
(M2) Pour conclure :
Avec (1), qu'on écrit :

$$b = 2(1-a) \quad (1')$$

la condition (2) devient :

$$|a| + 2|1-a| \leq 1 \quad (2')$$

On étudie alors la fonction (continue affine par morceaux) $f : a \mapsto |a| + 2|1-a|$ représentée ci-dessous, et voit qu'elle admet 1 pour valeur minimum, atteint seulement en $a = 1$: même conclusion.



$\boxed{\textbf{Conclusion :}\ \text{le } \textbf{problème P} \text{ pour } \ell \text{ admet une } \textit{unique} \text{ solution } L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x.}$

3) a) Il suffit de montrer que pour tout $(a,b) \in E_- \times E_+$, $a \leq b$ autrement dit que

$$\forall\,(x,y) \in F^2,\ \ell(y) - \|y - x_0\|, \leqslant \|x_0 + x\| - \ell(x) \quad (C)$$

Or pour $(x,y) \in F^2$,

$$\ell(x) + \ell(y) = \ell(x+y) \le ||x+y|| \le ||x+x_0|| + ||y-x_0|| \quad (C')$$

tout cela, par : linéarité de ℓ, l'hypothèse $||\ell|| \le 1$, et I.T.
L'inégalité (C') donne (C) et la conclusion demandée sur sup et inf.

b) On fixe un réel a tel que $\sup E_- \le a \le \inf E_+$.
Alors pour tout $x \in F$, $\ell(x) - ||x-x_0|| \le a$ et pour tout $x \in F$, , $a \le ||x_0 + x|| - \ell(x)$ ce qui donne exactement les inégalités demandées.

c) (i) Par définition de L, si $x \in F$, $x = x + 0x_0$ et $L(x) = \ell(x)$ donc $L_{|F} = \ell$.
Le seul problème est donc de vérifier la condition $\|L\| \le 1$ i.e que $\forall\, y \in E$, $\|L(y)\| \le ||y||$.
Par ailleurs si $y = c \in F$, cet inégalité est donnée par $L(x) = \ell(x)$ donc il suffit de la vérifier pour $y \in E \setminus F$ i.e. $y = x + \lambda x_0$ avec $x \in F$ et $\lambda \ne 0$.
Enfin par linéarité de L et propriété de la norme $L(-y) = -L(y)$ donc si on montre que pour tout y, $L(y) \le ||y|| \quad (1)$, on aura aussi $L(-y) \le ||-y||$ i.e. $-L(y) \le ||y|| \quad (2)$ et avec (1) et (2) on aura : $|L(y)| \le ||y||$.
On s'est donc bien ramené à la condition de l'énoncé : il suffit de vérifier que si $y = x+\lambda x_0$ avec $x \in F$ et $\lambda \ne 0$ alors :

$$L(y) \;\le ||y||$$

(ii) Or, si y est de la forme $x + \lambda x_0$, avec $x \in F$ et $\lambda > 0$, on a $L(y) = \ell(x) + \lambda a = \lambda \times (\ell(x/\lambda) + a) \overset{(1)}{\leqslant} \lambda \times \|x/\lambda + x_0\| = \|x + \lambda x_0\| = \|y\|$. L'inégalité (1) est vraie d'après une des deux inégalités données dans la déf. du réel a au 3)b).
(iii) De même si est de la forme $x - \lambda x_0$, avec $x \in F$ et $\lambda > 0$, on a $L(y) = \ell(x) - \lambda a = \lambda \times (\ell(x/\lambda) - a) \overset{(2)}{\leqslant} \lambda \times \|x/\lambda - x_0\| = \|x - \lambda x_0\| = \|y\|$ et de même l'inégalité (2) est donnée par l'autre inégalité de la déf. du 3) b).

4) **Le théorème s'appelle théorème de Hahn-Banach,(ici pour les e.v. de dim. finie)**
Si ℓ est une F.L.C. non nulle et qu'on note $M = ||\ell||$ alors $\tilde{\ell} = \ell/M$ vérifie l'hypothèse du problème P, et on vient donc de montrer qu'elle admet un prolongement $\tilde{L}$ de norme au plus 1. En posant $L = M.\tilde{L}$, la F.L.C. L prolonge ℓ et $||L|| = M.||\tilde{L}|| \;\le M \quad (1)$.
Mais par ailleurs trivialement $||\ell|| = \sup_{x \in B(0,1)\cap F} ||\ell(x)|| = \sup_{x\in B(0,1)\cap F} ||L(x)|| \le |\sup_{x \in B(0,1)} ||L(x)|| = ||L|| \quad (2)$ donc avec (1) et (2) on a $||L|| = ||\ell||$.

5) Suivant l'énoncé on fait une récurrence sur $\dim E - \dim F$.
• Initialisation : si $\dim E - \dim F = 0$, il n'y a rien à démontrer : $E = F$.
(• Seconde initialisation, pas utile : si $\dim E - \dim F = 1$, c'est le résultat du 4).)
• Hérédité : supposons le résultat vrai pour tous les s.e.v. F' tel que $\dim E - \dim F' = d$, et considérons F un s.e.v. de E tel que $\dim E - \dim F = d + 1$.
Soit F' un s.e.v. de E contenant F, de dimension $\dim F' = \dim F + 1$ et ℓ une forme linéaire définie sur F. Par le lemme du 4), on peut prolonger ℓ en une forme linéaire ℓ' définie sur F' de même norme que ℓ. Ensuite l'H.R. s'applique à ℓ' qui se prolonge en une forme linéaire L définie sur E entier telle que $||L|| = ||\ell'||$. Au total L prolonge ℓ à E et est de même norme.
L'hérédité est vérifiée.
La réc. est établie.

6) a) L'existence de ψ découle du théorème de Hahn-Banach du 5).
Supposons *par l'absurde* que ϕ ait deux prolongements ψ_1 et ψ_2 de norme 1 avec $\psi_1 \ne \psi_2$.
Alors en notant $\psi := \dfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ on a encore $\psi_{|F} = \phi$ donc $||\psi|| \ge ||\phi|| = 1$. Mais d'autre part, par I.T, $||\psi|| \le \dfrac{1}{2}(||\psi_1|| + ||\psi_2||) = 1$.
Au total, par double inégaité, $||\psi|| = 1$ et $\psi \in S^*$, ce qui est en *contradiction* avec la stricte convexité de la sphère S^*.

b) (i) Soient ϕ_1 et ϕ_2 comme dans l'énoncé. Par définition de H, $(\phi_1 - \phi_2)_{|H} = 0$ donc $(\phi_1)_{|H} = (\phi_2)_{|H}$.

Donc $\phi \overset{def}{=} \frac{1}{2}((\phi_1)_{|H} + (\phi_2)_{|H}) = \frac{1}{2}((\phi_1)_{|H} + (\phi_1)_{|H} = (\phi_1)_{|H}$ et de même $\phi_{|H} = (\phi_2)_{|H}$
Donc ϕ se prolonge aussi bien en ϕ_1 qu'en ϕ_2. La seule chose restant à montrer est que $\|\phi\| = 1$.

- Par I.T. (ou convexité de la boule B^* c'est pareil), $\|\phi\| \leq \frac{1}{2}(\|\phi_1\| + \|\phi_2\|) = 1$.
- Reste à montrer que $\|\phi\| \geq 1$.

(ii) Par caractérisation séquentielle du sup, où ici :

$$1 = \|\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)\| = \sup_{\|y\|=1} |\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y)|,$$

il existe une suite $(\tilde{y}_n) \in S^{\mathbb{N}}$ telle que $|\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(\tilde{y}_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Alors en posant $y_n = \varepsilon_n \tilde{y}_n$ avec $\varepsilon_n = \pm 1$, on a encore $\|y_n\| = 1$ et on choisit ε_n pour que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y_n) \geq 0$, on a alors $|\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Alors d'un côté, comme $\|\phi_1\| \leq 1$, on sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, |\phi_1(y_n)| \leq 1 \quad (1)$$

de l'autre côté par la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\phi_1(y_n)| \geq 2\left|\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y_n)\right| - |\phi_2(y_n)| \geq 2\left|\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y_n)\right| - 1 \quad (2)$$

Puisque, par déf. de (y_n), on sait que $\left|\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)(y_n)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, avec $(1), (2)$ et le théorème des gendarmes, on conclut que :

$$\phi_1(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par symétrie du raisonnement par rapport à ϕ_1 et ϕ_2, ou bien par opération sur les limites puisque $\phi_2 = (\phi_1 + \phi_2) - \phi_1$, on a aussi ;

$$\phi_2(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

(iii) Le vecteur u existe car $\phi_1 - \phi_2$ n'est pas la F.L. nulle et une F.L. non nulle est toujours surjective de E dans $\mathbb{R}$ puisque son image est un s.e.v. de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro donc $\mathbb{R}$ entier.
D'abord on vérifie que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in H \quad (1)$$

car $(\phi_1 - \phi_2)(x_n) = (\phi_1 - \phi_2)(y_n) + (\phi_2 - \phi_1)(y_n).1 = 0$.
D'autre part, par (ii), $(\phi_2 - \phi_1)(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc en notant $u_n = (\phi_2 - \phi_1)(y_n)u$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais alors $\|x_n\| = \|y_n + u_n\|$ vérifie :

$$\|y_n\| - \|u_n\| \leq \|x_n\| \leq \|y_n\| + \|u_n\|$$

et comme $\|y_n\|$ vaut toujours 1, donc

$$\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (2)$$

Enfin comme $\phi = (\phi_1)_{|H}$, $\phi(x_n) = \phi_1(x_n) = \phi_1(y_n) + (\phi_2 - \phi_1)(y_n).\phi_1(u)$ et par (ii), $\phi_1(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\phi_2(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :

$$\phi(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad (3)$$

Avec $(1), (2), (3)$, on a exhibé une suite $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{\phi(x_n)}{\|x_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\|\phi\| \geq 1$.

Comme ϕ est une restriction de ϕ_1 et que $\|\phi_1\| = 1$, on a l'autre inégalité, $\|\phi\| \le 1$.

On conclut bien que $\boxed{\|\phi\| = 1}$

c) On a démontré qu'il y a unicité du prolongement pour toute F.L. dans le théorème de Hahn Banach, si et seulement si, la boule unité fermé B^* est strictement convexe.

Dans l'exemple de la question 2, la boule unité de $(E^*, \| \|)$ qui s'identifie à celle de $(\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ n'est *pas* strictement convexe (c'est le carré dessiné à cette question).

Pourtant, dans l'exemple considéré à cette question on avait unicité du prolongement de la forme linéaire ℓ considérée. Ceci n'est *pas* en contradiction avec l'équivalence qu'on vient de démontrer car l'équivalence parle du prolongement unique *pour toute* F.L.

En fait, si on regarde de plus près ce qu'on a fait à la question 2, et que plus généralement on définit une F.L. ℓ sur une droite de $\mathbb{R}^2$ en fixant $\ell(\varepsilon) = 1$ pour un certain vecteur $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$, le raisonnement fait à la méthode 1 de cette question montre que ℓ admet un prolongement unique L si, et seulement si, la droite d'équation $a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 = 1$ intersecte la boule unité fermée en un *unique* point, qui est forcément un point du bord de la boule. Or ceci n'est possible que si ce point est un *point extrémal* de la boule où par définition :

un point a d'un ensemble convexe B est *extrémal* s'il n'est dans aucun segment (non réduit à un point) inclus dans B.

Ceci fait alors le lien entre la question 2 et le résultat prouvé ici sur la stricte convexité : dire que les boules sont strictement convexes revient à dire que tous les points de leur bord sont extrémaux.

7) **Cette version généralisée s'appelle encore théorème de Hahn-Banach :** On prend l'hypothèse du théorème de la question 5, on a $\forall\, x \in E$, $\|\ell(x)\| \le c\, \|x\|$ où $c = \|\ell\| \ge 0$.

On pose donc $p(x) = c\|x\|$, la fonction p est bien une fonction convexe sur E : en effet pour tout $x, y \in E$, pour tout $t \in [0,1]$:

$$p(((1-t)x + ty) = c\|(1-t)x + ty\| \le c((1-t)\|x\| + t\|y\|)$$

par homogénéité et I.T.

Donc d'après le théorème de la question 7, ℓ admet un prolongement L tel que :

$$\forall\, x \in E,\ L(x) \le c\|x\| \quad (1)$$

Soit $x \in E$, en appliquant l'inégalité précédente à $-x$, on a :

$$L(-x) \le c\| - x\|$$

c'est-à-dire :

$$-L(x) \le c\|x\| \quad (2)$$

Ainsi avec (1) et (2), on a bien :

$$\forall\, x \in E,\ |L(x)| \le c\|x\|$$

donc $\|L\| \le c = \|\ell\ \|$ et l'autre inégalité étant évidente, on a bien la conclusion du théorème 5.

8) Si C ne contient pas 0, on fixe un élément $a \in C$. On considère la translation $\tau\ :\ x \mapsto x - a$. Alors $C' := \tau(C)$ contient 0. On note $F' = \tau(F)$ Si on a la conclusion du théorème pour C' et F' on a un hyperplan affine H' contenant F' tel que $H' \cap C' = \varnothing$.

On pose alors $H = \tau^{-1}(H')$: c'est bien un hyperplan affine contenant F tel que $H \cap C = \varnothing$.

9) a) Avec la définition donnée, c'est complètement trivial et n'utilise pas l'hypothèse de convexité : il suffit pour $x = 0$ de dire qu'il existe un $t > 0$ tel que $x/t \in A$ donc $0/t \in A$ donc $0 \in A$!

Si on réduit la définition en disant que A est absorbant ssi pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ il existe un $t > 0$ tel que $x/t \in A$, là, la convexité va servir (car avec cette déf. d'absorbant $B(0,1) \setminus \{0\}$ est bien absorbante non convexe).

Soit A un ensemble absorbant. Soit $x \neq 0$ dans E. Il existe un $t > 0$ tel que $x/t \in A$ et pour $-x$ il existe un $s > 0$ tel que $-x/s \in A$. Si en plus A est *convexe* alors $[-x/s, x/t] \subset A$ donc $0 \in A$.

b) Comme $0 \in \mathring{A}$, on a un $r > 0$ tel que la boule fermée $B_f(0,r)$ soit incluse dans A. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ quelconque. Soit $t = \|x\|/r$, alors $\|x/t\| = r$ donc $x/t \in B_f(0,r) \subset A$.

c) Par déf. de $\mu_A(x)$. comme $\inf\{t > 0,\ x/t \in A\}$ si on fixe un $t > \mu_A(x)$, qu'on peut noter $t = \mu_A(x) + \varepsilon$, il existe un t_0 tel que $\mu_A(x) \leq t_0 < t$ et $x/t_0 \in A$. Alors $x/t \in [0, x/t_0]$ est dans A par convexité de A.

d) Soit $(x,y) \in E^2$. Soit $\varepsilon > 0$ et $t = \mu_A(x) + \varepsilon$ et $s = \mu_A(y) + \varepsilon$.
Par c), x/t et y/s sont dans A. On veut montrer $\mu_A(x+y) < s+t$ i.e ; que $\dfrac{x+y}{s+t}$ est aussi dans A.
Il s'agit de voir $\frac{x+y}{s+t}$ comme une combinaison convexe de x/s et y/t.
La combinaison gagnante : $\dfrac{x+y}{s+t} = \dfrac{s}{s+t}\left(\dfrac{x}{s}\right) + \dfrac{t}{s+t}\left(\dfrac{y}{t}\right)$.
Ainsi $\mu_A x(x+y) < \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui donne bien l'I.T :

$$\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$$

e) Soit $x \in E$. Notons $I_x = \{s > 0,\ x/s \in A\}$. Soit $t > 0$.
Remarquons que $I_{tx} = \{s > 0,\ tx/s \in A\} = t.I_x$.
Comme l'application $\varphi\ :\ I_x \to I_{t.x},\ s \mapsto s.t$ est *continue, croissante*, on sait que :

$$\inf_{s \in I_x} t.s = t \inf_{s \in I_x} s$$

c'est-à-dire que :

$$\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$$

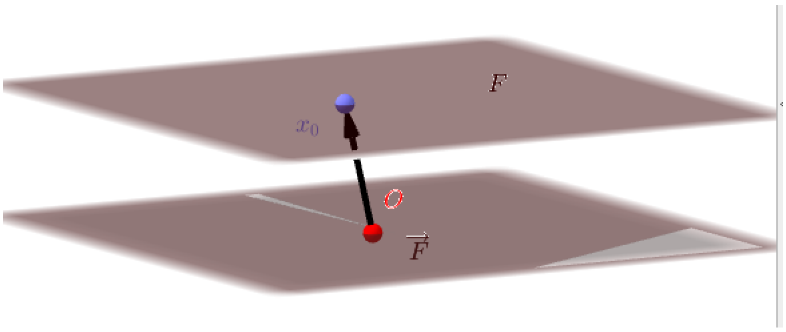
f) Dire que A est symétrique par rapport à 0 signifie que $\forall\, a \in E,\ a \in A \Leftrightarrow -a \in A$.
Soit $x \in E$, comme A est symétrique par rapport à 0, $I_x = I_{-x}$ et donc aussi pour tout tout $t \in \mathbb{R}$, $\mu_A(tx) = \mu_A(-tx)$.
Donc si $t < 0$, $\mu_A(tx) = \mu_A(|t|x) = |t|\mu_A(x)$ par le e).

10) **Remarque préliminaire :** Soit $x \in E$, notons $I_x = \{t > 0,\ x/t \in C\}$. Remarquons que comme C est ouvert et que l'application $\varphi_x\ :\ t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x/t$ est *continue*, on sait que $I_x = \varphi_x^{-1}(C)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{+*}$ donc un ouvert de $\mathbb{R}$.
On a aussi montré ci-dessus au c), que comme C est convexe et contient 0, I_x est un intervalle ouvert.
Donc pour C ouvert convexe contenant 0, et $x \in E$, on a $I_x =]\mu_C(x), +\infty[$.
Or par déf $x \in C$ si, et seulement si, $1 \in I_x$ donc ssi $1 \in]\mu_C(x), +\infty[$.
Donc en notant $p(x) = \mu_C(x)$, on a bien : $x \in C \Leftrightarrow p(x) < 1$.

11) a) On note $\overrightarrow{F}$ la direction vectorielle du sous-espace affine F. Donc si on fixe un élément $x_0 \in F$, on sait que :

$$F = x_0 + \overrightarrow{F},$$

avec $x_0 \notin \overrightarrow{F}$ puisque F ne contient pas 0.



Alors
$$F_0 \overset{def}{=} \mathrm{Vect}(F) = \mathrm{Vect}(x_0 + \overrightarrow{F}) = \mathrm{Vect}(x_0) + \overrightarrow{F} \quad (\dagger)$$
(Sur la figure c'est l'espace de dim. 3 contenant les deux plans.)
Donc
$$\boxed{\dim F_0 = 1 + \dim(\overrightarrow{F}) = 1 + \dim(F).}$$
b) Comme on vient de dire que $F_0 = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus \overrightarrow{F}$, on peut définir une forme linéaire ℓ de F_0 par sa restriction aux deux s.e.v. de la somme directe. On pose donc $\ell(x_0) = 1$ et $\ell_{|\overrightarrow{F}} = 0$, ce qui suffit à définir ℓ par linéarité. Cette application ℓ vérifie bien que pour tout $x \in F$, comme $x = x_0 + u$ avec $u \in \overrightarrow{F}$, $\ell(x) = \ell(x_0) = 1$.
En outre on sait que $\ell^{-1}(1)$ est un hyperplan affine de F_0 d'où l'égalité, $F = \{x \in F_0,\ \ell(x) = 1\}$.
Unicité de cette forme linéaire ℓ : si on a deux formes linéaires ℓ_1 et ℓ_2 telles que $(\ell_1)_{|F} = (\ell_2)_{|F}$ alors $\ell_1 - \ell_2$ serait nulle sur F
Or F contient une base de l'e.v. F_0 : car si $e_1, \dots, e_d$ est une base de $\overrightarrow{F}$ alors $x_0, x_0+e_1, \dots, x_0+e_d$ est une base de F_0.
Donc $\ell_1 - \ell_2$ est nulle sur une base de F_0, c'est la forme linéaire nulle.
c) Pour $x \in F$, comme $F \cap C = \varnothing$, on sait par a), que $p(x) \geq 1$.
On vient de dire au b), que pour $x \in F$, $\ell(x) = 1$.
Avec ces deux résultats, on sait donc déjà que :
$$\forall\, x \in F,\ \ell(x) \leq p(x) \quad (1)$$
Comme pour tout $\lambda \geq 0$, $\ell(\lambda x) = \lambda x$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, l'inégalité (1) s'étend par homogénéité positive :
$$\forall\, x \in F,\ \forall \lambda \geq 0, \ell(\lambda.x) \leq p(\lambda.x) \quad (2)$$
Si $\lambda < 0$, et $x \in F$, $\ell(\lambda x) < 0 \leq p(\lambda x)$.
Au total pour tout $y = \lambda.x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in F$,on a : $\ell(y) \leq p(y)$.
Mais ici, comme le montre l'égalité $(\dagger)$ de la fin du a), l'ensemble $\mathbb{R}.F = \{\lambda.x, \text{avec } \lambda \in \mathbb{R},\ x \in F\}$ est exactement $F_0 = \mathrm{Vect}(F)$.
D'où la conclusion.

12) On sait que H est un hyperplan affine puisque défini par l'équation $L(x) = 1$ et donc aussi qu'il contient F puisque $\ell(x) = 1$ entraine $L(x) = 1$.
D'autre part, pour tout $x \in H$ $1 = L(x) \leq p(x)$ donc $p(x) \geq 1$ donc $x \notin C$, donc $H \cap C = \varnothing$.