DM 6 : Prolongement des formes linéaires

Pour le lundi 21 novembre

I Prolongement d'une forme définie sur un hyperplan

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel normé réel non réduit à $\{0\}$, de dimension finie ou infinie.

On considère F un hyperplan de E i.e. un s.e.v. F de E tel qu'il existe une droite D vérifiant $F \oplus D = E$.

Soit enfin ℓ une forme linéaire sur F satisfaisant $|\ell(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout x élément de F.

Le **problème P** consiste à prolonger ℓ en une forme linéaire L définie sur E tout entier satisfaisant $|L(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout x élément de E. Une telle forme L sera appelée une solution du **problème P.**

Question 1) On suppose dans cette question seulement que E est euclidien i.e. de dimension finie et muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.

a) Justifier qu'il existe un vecteur $a \in F$ telle que pour tout $x \in F$, $\ell(x) = (a|x)$.

b) En déduire une solution L du **Problème P** pour ℓ.

Question 2) On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Soit une forme linéaire L sur l'espace E. On sait que L est donnée par la formule $L : (x, y) \in E \longmapsto ax + by$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\|L\| = |a| + |b|$.

b) On choisit pour F la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon = (1, 1/2)$ et pour ℓ la forme linéaire sur F satisfaisant $\ell(\varepsilon) = 1$. Chercher *toutes* les solutions du **Problème P** pour ℓ.

Question 3) **Retour au cas le plus général de l'introduction :** On suppose E, F et ℓ donnés et l'on choisit $x_0 \in E$ tel que $E = F \oplus \operatorname{Vect}(x_0)$

a) Soit $E_+ = \{\|x_0 + x\| - \ell(x),\ x \in F\}$ et $E_- = \{\ell(y) - \|y - x_0\|,\ y \in F\}$. Montrer que

$$\sup E_- \leqslant \inf E_+.$$

b) En déduire qu'il existe au moins un réel a tel que

$$\forall x \in F, \quad \begin{cases} \ell(x) + a \leqslant \|x + x_0\| \\ \ell(x) - a \leqslant \|x - x_0\|. \end{cases}$$

c) On choisit alors un tel réel a et, pour $y = x + \lambda x_0 \in E$, on pose $L(y) = \ell(x) + \lambda a$.

i) Justifier que, pour vérifier que L ainsi définie est solution du **problème P**, il suffit de vérifier que si $y = x + \lambda x_0$ avec $x \in F$ et $\lambda \neq 0$ alors :

$$L(y) \leq ||y||$$

ii) Démontrer que l'inégalité du (i) est vraie pour les $y = x + \lambda x_0$ avec $\lambda > 0$ à l'aide de la définition du réel a.

iii) Faire le même travail pour les $y = x - \lambda x_0$ avec $\lambda > 0$.

Au total on a bien montré que L était solution **du problème P** pour ℓ.

Question 4) **Généralisation :** à partir de la résolution du **Problème P**, montrer le :

Lemme de prolongement des F.L.C., définies sur un hyperplan : Soit E un $\mathbb{R}$ e.v.n. quelconque et F un hyperplan de E, si ℓ est une forme linéaire continue quelconque sur F, et qu'on note $\|\ell\|$ sa norme d'opérateur, alors il existe une forme linéaire continue L définie sur E entier telle que $L_{|F} = \ell$ et $\|L\| = \|\ell\|$.

II Théorème de prolongement des F.L.C. en dim. finie

Question 5) Le théorème :

> **Théorème :** Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n. *de dimension finie*. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\ell : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire (automatiquement continue).
> Alors il existe une forme linéaire $L : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge ℓ i.e. telle que $L_{|F} = \ell$ et de même norme : $\|L\| = \|\ell\|$.

Montrer ce théorème par récurrence sur $\dim E - \dim F$ à l'aide du lemme démontré au § 1.4

Remarque : ce théorème s'étend, et c'est important, à des e.v.n. de dimension infinie, notamment à ceux qui admettent une partie *dénombrable dense*, nous y reviendrons après le cours sur la dénombrabilité.

Question 6) **Etude de l'unicité du prolongement :**

Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'e.v. des formes linéaires de E, appelé l'espace dual de E et on munit E^* de la norme d'opérateur :

$$\forall\, \ell \in E^*, \|\ell\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| \ell(x)\|.$$

On note S^* la sphère unité de E^* donc $S^* = \{\varphi \in E^*,\ \|\varphi\| = 1\}$ et $B^* = \{\varphi \in E^*,\ \|\varphi\| \ \leq 1\}$.

a) On suppose que B^* est strictement convexe c'est-à-dire que :

$$\forall\, \phi_1, \phi_2 \in S^*, \phi_1 \neq \phi_2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) \notin S^*.$$

Soient F un sous espace de E, ϕ une forme linéaire sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une *unique* forme linéaire ψ sur E, de norme 1 , et prolongeant ϕ.

b) Réciproque : on suppose inversement qu'existent ϕ_1 et ϕ_2 appartenant à S^*, et vérifiant $\phi_1 \neq \phi_2, \frac{\phi_1+\phi_2}{2} \in S^*$. Soit $H = \mathrm{Ker}\,(\phi_2 - \phi_1)$.

i) Montrer que la restriction ϕ de ϕ_1 à H est une forme linéaire de norme au plus 1, dont ϕ_1 et ϕ_2 sont deux prolongements distincts à E.

ii) On choisit une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ où tous les y_n sont de norme 1 et $\frac{1}{2}(\phi_1+\phi_2)(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$: pourquoi une telle suite existe-t-elle ?
Montrer que :

$$\phi_1(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \phi_2(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

iii) En fixant un vecteur u tel que $(\phi_1 - \phi_2)(u) = 1$, et à l'aide de la suite $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = y_n + (\phi_2 - \phi_1)(y_n).u$$

montrer que $\|\phi\| = 1$.

c) Enoncer l'équivalence ainsi démontrée. Commenter l'exemple de la question 2 à la lumière de ce résultat.

Question 7) On admet le théorème suivant, dont l'idée de la démonstration est très analogue à celle du théorème de la question 5. Démontrer que ce théorème entraîne celui de la question 5, autrement dit que ce théorème est bien une généralisation du précédent.

> **Théorème :** Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n. *de dimension finie* et $p : E \to \mathbb{R}$ une *fonction convexe* sur E.
> Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\ell : F \to \mathbb{R}$ une *forme linéaire* telle que :
>
> $$\forall\, x \in F,\ \ell(x) \leq p(x)$$
>
> Alors il existe une forme linéaire $L : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge ℓ i.e. telle que $L_{|F} = \ell$ et qui vérifie encore :
>
> $$\forall\, x \in E,\ L(x) \leq p(x)$$

III Version géométrique du même théorème

Dans ce paragraphe, on va démontrer :

> **Théorème géométrique :** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dim. finie, C un ouvert convexe non vide de E et F un sous-espace affine de E tel que $F \cap C = \varnothing$.
> Alors il existe un hyperplan affine H de E contenant F et tel que $H \cap C = \varnothing$.

Question 8) Justifier qu'il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier où C contient 0_E : on supposera donc cette condition réalisée.

Question 9) **Jauge d'un convexe absorbant**

Par déf. un sous-ensemble convexe A d'un $\mathbb{R}$-e.v. E est dit *absorbant* si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe un $t > 0$ tel que $x/t \in A$.

a) Justifier qu'un ensemble convexe absorbant contient 0.

b) Justifier que si A est un sous-ensemble d'un e.v.n. E tel que 0 est point intérieur à A alors A est absorbant.

Pour un ensemble convexe absorbant A, on définit sa *jauge de Minkowski*, comme l'application $\mu_A : x \in E \mapsto \inf\{t > 0,\ x/t \in A\}$.

c) Montrer que $t > \mu_A(x) \Rightarrow x/t \in A$.

d) Montrer que μ_A vérifie l'I.T. :

$$\forall\, (x, y) \in E^2,\ \mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$$

Indication – Soit $(x, y) \in E^2$. Soit $\varepsilon > 0$ et $t = \mu_A(x) + \varepsilon$ et $s = \mu_A(y) + \varepsilon$. Il s'agit de montrer que $\dfrac{x+y}{s+t}$ est dans A, et pour cela, de l'écrire comme une combinaison convexe de x/s et y/t.

e) Montrer que μ_A est *positivement homogène* : $\forall\, t \geq 0,\ \forall\, x \in A,\ \mu_A(tx) = t\mu_A(x)$.

f) On suppose qu'en outre A est symétrique par rapport à 0 : montrer qu'alors $\mu_A(tx) = |t|\mu_A(x)$.
Donc pour A convexe, absorbant, symétrique par rapport à l'origine, μ_A est une semi-norme.

Dans la suite on considère C un ouvert convexe non vide (comme dans le théorème ci-dessus) contenant 0_E donc sa jauge μ_C vérifie l'I.T. et est positivement homogène, en particulier μ_C est une fonction convexe.

Question 10) On note donc $p = \mu_C$. Justifier que $\forall\, x \in E,\ x \in C \Leftrightarrow p(x) < 1$.

Question 11) On note F_0 le s.e.v. engendré par le sous-espace affine F.

a) Justifier que $\dim F_0 = \dim F + 1$.

b) Justifier qu'il existe une unique forme linéaire $\ell :\ F_0 \to \mathbb{R}$ telle que $F = \{x \in F_0,\ \ell(x) = 1\}$.

c) Justifier que $\forall\, x \in F_0,\ \ell(x) \leq p(x)$.

Question 12) En appliquant le théorème de la question 7, on a une forme linéaire $L :\ E \to \mathbb{R}$ telle que $L_{|F_0} = \ell$ et $\forall\, x \in E,\ L(x) \leq p(x)$.
Montrer que $H := \{x \in E,\ L(x) = 1\}$ convient pour obtenir la conclusion du théorème géométrique annoncé.