DM 5 : Topologie matricielle, solution

Sujet adapté de X PC 2017(avec des questions intermédiaires rajoutées et des questions de fin supprimées), corrigé du site de l'UPS-prépas.org à quelques modif mineures près.

1 a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathrm{C} > 0$

Sens $\Rightarrow$: On fait l'hypothèse $\|\mathrm{M}\| \leqslant \mathrm{C}$, c'est-à-dire $\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|\mathrm{M}x\|_1}{\|x\|_1} \leqslant \mathrm{C}$.

Pour tout x non nul de $\mathbb{C}^n$, on a donc la majoration $\frac{\|\mathrm{M}x\|_1}{\|x\|_1} \leqslant \mathrm{C}$. On multiplie par $\|x\|_1$, qui est positif, ce qui donne $\|\mathrm{M}x\|_1 \leqslant \mathrm{C}\|x\|_1$.

Cette inégalité est également valable si x est nul.

Sens $\Leftarrow$: on fait l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{C}^n, \|\mathrm{M}x\|_1 \leqslant \mathrm{C}\|x\|_1$.

Pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{C}^n$, on en déduit l'inégalité $\frac{\|\mathrm{M}x\|_1}{\|x\|_1} \leqslant \mathrm{C}$ car $\|x\|_1 > 0$, donc $\|\mathrm{M}\| \leqslant \mathrm{C}$.

On a prouvé l'équivalence $\|\mathrm{M}\| \leqslant \mathrm{C} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}^n : \|\mathrm{M}x\|_1 \leqslant \mathrm{C}\|x\|_1$.

Remarque : on a prouvé en particulier l'inégalité $\|\mathrm{M}x\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}\| \times \|x\|_1$ et qu'on possède une méthode pour majorer $\|\mathrm{M}\|$ dans le cas général. Ces deux points serviront fréquemment dans ce qui suit.

1)b) Déjà, la fonction $M \mapsto \|M\|$ est à valeurs réelles positives.

(i) Séparation Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|\mathrm{M}\| = 0$. À la question précédente, on n'a pas utilisé le caractère strict de l'inégalité $\mathrm{C} > 0$. On peut donc écrire

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : \|\mathrm{M}x\|_1 \leqslant 0.$$

Par positivité de la norme, on obtient donc $\forall x \in \mathbb{C}^n : \|\mathrm{M}x\|_1 = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{C}^n : \mathrm{M}x = 0$. Les colonnes de la matrice M sont les produits $\mathrm{M}e_i$, où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Ainsi, les colonnes de M sont nulles donc M est la matrice nulle.

(ii) Homogénéité Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Exploitons l'homogénéité de la norme $\|\ \|_1$.

$$\|\lambda \mathrm{M}x\|_1 = |\lambda| \times \|\mathrm{M}x\|_1 \leqslant |\lambda| \times \|\mathrm{M}\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit la majoration $\|\lambda\mathrm{M}\| \leqslant |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|$ d'après 1.a.

Si $\lambda = 0$, on obtient $\|\lambda\mathrm{M}\| \leqslant 0$ donc $\|\lambda\mathrm{M}\| = 0 = |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|$.

Si $\lambda \neq 0$, on effectue la substitution $(\mathrm{M}, \lambda) \leftarrow (\lambda\mathrm{M}, 1/\lambda)$ dans l'inégalité $\|\lambda\mathrm{M}\| \leqslant |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|$, pour obtenir $\|\mathrm{M}\| \leqslant \|\lambda\mathrm{M}\|/|\lambda|$, c'est-à-dire $\|\lambda\mathrm{M}\| \geqslant |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|$.

On obtient donc $\|\lambda\mathrm{M}\| = |\lambda| \times \|\mathrm{M}\|$ dans tous les cas.

(iii) I.T. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'inégalité triangulaire pour la norme $\|\ \|_1$ donne

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(\mathrm{M}+\mathrm{N})x\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}x\|_1 + \|\mathrm{N}x\|_1 \leqslant \|\mathrm{M}\| \times \|x\|_1 + \|\mathrm{N}\| \times \|x\|_1.$$

On en déduit l'inégalité $\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\| \leqslant \|\mathrm{M}\| + \|\mathrm{N}\|$ par application de 1.a.

Avec (i), (ii), (iii) pn a montré que $\|\ \|$ est une $\mathbb{C}$-norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En appliquant 1.a dans le sens $\Rightarrow$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad \|(\mathrm{AB})x\|_1 \leqslant \|\ \mathrm{A}\| \times \|\mathrm{B}x\|_1 \leqslant \|\ \mathrm{A}\| \times \|\mathrm{B}\| \times \|x\|_1.$$

En appliquant 1.a dans le sens $\Leftarrow$, on en déduit l'inégalité $\|\mathrm{A} \times \mathrm{B}\| \leqslant \|\mathrm{A}\| \times \|\mathrm{B}\|$.

3) a) Prenons x quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

$$\mathrm{A}x = \mathrm{A}.\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j.\mathrm{A}e_j.$$

L'inégalité triangulaire de la norme $\|\ \|_1$ donne alors

$$\|\mathrm{A}x\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_j| \times \|\mathrm{A}e_j\|_1.$$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on observe les relations

$$\|\mathrm{A}e_j\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \mathrm{S}(\mathrm{A})$$

donc

$$\|\mathrm{A}x\|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_j| \times \mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{A}) \times \|x\|_1.$$

3) b) D'après 1.a, on en déduit la majoration $\|\mathrm{A}\| \leqslant \mathrm{S}(\mathrm{A})$.

3) c)

Pour $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$, notons j_0 un indice qui réalise ce maximum. En notant de nouveau $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on observe l'égalité

$$\mathrm{A}e_{j_0} = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \mathrm{S}(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}e_{j_0}\|_1 .$$

L'égalité $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ donne alors $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \frac{\|\mathrm{A}e_{j_0}\|_1}{\|e_{j_0}\|_1} \leqslant \|\ \mathrm{A}\|$

Par double inégalité, on a prouvé l'égalité $\|\mathrm{A}\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$.

4) C'est une question de cours.

• Sens $\Rightarrow$ on suppose que s la suite $\left(\mathrm{A}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice B « coefficient par coefficient ». Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque l'encadrement

$$0 \leqslant \left\|\ \mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left|a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}\right| .$$

Chaque terme du membre de droite tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ donc, par le théorème des gendarmes, on voit que $\left\|\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}\right\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

• Sens $\Leftarrow$: on suppose que $\left\|\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}\right\|$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on observe l'encadrement

$$0 \leqslant \left|a_{i,j}^{(k)} - b_{i,j}\right| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \left|a_{s,j}^{(k)} - b_{s,j}\right| \leqslant \left\|\mathrm{A}^{(k)} - \mathrm{B}\right\| .$$

On en déduit que $a_{i,j}^{(k)}$ tend vers $b_{i,j}$ quand k tend vers $+\infty$.

5) a) Multiplier A à droite par P_b c'est multiplier la première colonne de A par 1, la seconde par b, la troisième par b^2, …la n-ièmes par b^{n-1}.

Ensuite on multiplie la matrice $A' = AP_b$ obtenue, à gauche, par P_b^{-1} ce qui revient à multiplier la première ligne de A' par 1, la seconde par b^{-1}, la troisième par b^{-2}, …la dernière par $b^{-(n-1)}$.

On obtient donc :

$$\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ba_{1,2} & b^2a_{1,3} & \cdots & b^{n-1}a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & ba_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b^2a_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ba_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b$ tend vers la matrice $\mathrm{diag}\,(a_{1,1},\ldots,a_{n,n})$ quand b tend vers 0 .

5 b) On déduit du a) que $\left\|\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right\|$ tend vers $\|\mathrm{diag}\,(a_{1,1},\ldots,a_{n,n})\|$ quand b tend vers 0 . Cette limite, notée ℓ, est égale à $\max\left(|a_{j,j}|\,;1\leqslant j\leqslant n\right)$.

Cette limite est strictement inférieure à 1 par hypothèse. Notons $r = (1+\ell)/2$, ce qui est dans $]\ell,1[$.

D'après la définition de la limite, il existe $b_0 > 0$ tel que pour tout b dans $]0,b_0]$, le nombre $\left\|\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right\|$ soit majoré par r. On obtient donc en particulier l'inégalité $\left\|\mathrm{P}_{b_0}^{-1}\mathrm{AP}_{b_0}\right\| < 1$.

5) c) Gardons la notation b de la question précédente. Comme $\| \ \|$ est une norme d'algèbre (cf. question 2)), par récurrence immédiate, on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \left\| \left(\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right)^k \right\| \leqslant \left\|\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right\|^k .$$

L'inégalité $\left\|\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right\| < 1$ donne que $\left\|\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right\|^k$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.
Comme $\left(\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right)^k = \mathrm{P}_b^{-1}\ \mathrm{A}^k\mathrm{P}_b$, on en déduit, par multiplicativité de la norme que :

$$0 \leqslant \left\|\ \mathrm{A}^k\right\| \leqslant \|\mathrm{P}_b\| \times \left\| \left(\mathrm{P}_b^{-1}\mathrm{AP}_b\right)^k \right\| \times \left\|\mathrm{P}_b^{-1}\right\|,$$

si bien que $\left\|\mathrm{A}^k\right\|$ tend également vers 0.
La suite de matrices $\left(\mathrm{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

6) Pour la matrice $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on sait (matrice diagonale) que $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}_1\right) = \{0;1\}$ donc $\rho\left(\mathrm{A}_1\right) = 1$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on sait (matrice triangulaire inf.) que $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}_2\right) = \{0\}$ donc $\rho\left(\mathrm{A}_2\right) = 0$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on sait que $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}_3\right) = \{0;1\}$ donc $\rho\left(\mathrm{A}_3\right) = 1$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}_4\right) = \{\mathrm{i}\sqrt{2}; -\mathrm{i}\sqrt{2}\}$ donc $\rho\left(\mathrm{A}_4\right) = \sqrt{2}$.

Pour la matrice $\mathrm{A}_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}_5\right) = \{1;4\}$ donc $\rho\left(\mathrm{A}_5\right) = 4$.

7) La propriété (i) est vraie en raison de l'égalité

$$\mathrm{Sp}(\mu\mathrm{A}) = \{\mu x; x \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}.$$

Pour prouver cette égalité, on remarque pour commencer l'égalité $\mathrm{Sp}(0 \times \mathrm{A}) = \{0\}$ puis, si $\mu \neq 0$, on remarque l'égalité

$$\mathrm{Ker}\left(\mu\mathrm{A} - \mu x\mathrm{I}_n\right) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{A} - x\mathrm{I}_n\right), \qquad \text{qui donne} \qquad \mu x \in \mathrm{Sp}(\mu\mathrm{A}) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$$

La propriété (ii) est fausse. On peut prendre $\mathrm{A} = \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{B} = {}^t\,\mathrm{A}_2$, ce qui donne $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Dans ce cas, on a donc $\rho(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 1$ et $\rho(\mathrm{A}) + \rho(\mathrm{B}) = 0$ donc $\rho(\mathrm{A} + \mathrm{B}) > \rho(\mathrm{A}) + \rho(\mathrm{B})$.

La propriété (iii) est fausse. On peut prendre $\mathrm{A} = \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{B} = {}^t\ \mathrm{A}_2$, ce qui donne $\mathrm{AB} = \mathrm{A}_1$.
Dans ce cas, on a donc $\rho(\mathrm{AB}) = 1$ et $\rho(\mathrm{A})\rho(\mathrm{B}) = 0$ donc $\rho(\mathrm{AB}) > \rho(\mathrm{A})\rho(\mathrm{B})$.

Les propriétés (iv) et (v) sont vraies car les matrices $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est semblable à A donc a même spectre que A et ${}^t\ \mathrm{A}$ a le même polynôme caractéristique que A donc là encore le même spectre.

8) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(\mathrm{A})$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Les relations $\mathrm{A}x = \lambda x$ et $x \neq 0$ donnent

$$|\lambda| = \frac{\|\mathrm{A}x\|_1}{\|x\|_1}$$

donc $\rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}\|$

9) On fait l'hypothèse $\rho(\mathrm{A}) < 1$. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$) donc il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A donc leurs modules sont strictement inférieurs à 1.

La matrice T vérifie donc les hypothèses de la question 5 , si bien que la suite de matrices $\left(\mathrm{T}^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

Par le même raisonnement qu'en 5.c, on en déduit que la suite $\left(\mathrm{A}^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

(On dira plus simplement, après le cours sur la continuité, par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$)

10) a) On reprend le raisonnement de la question 8 : soit $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ telle que $|\lambda| = \rho(\mathrm{A})$. Soit x un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve

$$\mathrm{A}^k x = \mathrm{A}^{k-1}\lambda x = \mathrm{A}^{k-2}\lambda^2 x = \ldots = \lambda^k x$$

puis, le vecteur x étant non nul, on obtient $\left|\lambda^k\right| = \left\|\mathrm{A}^k x\right\|_1 / \|x\|_1$ donc $\rho(\mathrm{A})^k \leqslant \|\ \mathrm{A}^k\|$.

10.b) Par double inclusion :

• Soit $\alpha \in]0, \rho(\mathrm{A})]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on observe alors l'inégalité

$$\left\|\left(\frac{\mathrm{A}}{\alpha}\right)^k\right\| = \frac{\|\mathrm{A}\|^k}{\alpha^k} \geqslant \left(\frac{\rho(\mathrm{A})}{\alpha}\right)^k \geqslant 1$$

d'après 10.a.

On en déduit que $\left\|(\mathrm{A}/\alpha)^k\right\|$ ne tend vers pas 0 quand k t
end vers $+\infty$ donc α n'est pas dans $\mathrm{E_A}$.

Donc $\mathrm{E_A} \subset]\rho(\mathrm{A}), +\infty\,[$.

•. Soit $\alpha \in]\rho(\mathrm{A}), +\infty\,[$. L'identité 7 .i donne $\rho(\mathrm{A}/\alpha) = \rho(\mathrm{A})/\alpha < 1$ donc la suite $\left((\mathrm{A}/\alpha)^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle d'après le résultat de la question 9 , si bien que α est dans $\mathrm{E_A}$.

On a bien prouvé l'égalité $\mathrm{E_A} =]\,\rho(\mathrm{A}), +\infty[$

11 a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on connait l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) \leqslant \left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k}$, qui découle de 10.a.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 10.b, la suite de matrices de terme général $\left(\frac{\mathrm{A}}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon}\right)^k$ tend vers la matrice nulle. Il existe donc un entier $k_\varepsilon \geqslant 1$ tel que

$$\forall k \geqslant k_\varepsilon, \quad \left\|\frac{\mathrm{A}^k}{(\rho(\mathrm{A})+\varepsilon)^k}\right\| \leqslant 1,$$

ce qui donne ensuite $\left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon$.

11 b) Récapitulons, on vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geqslant k_\varepsilon, \quad \rho(\mathrm{A}) \leqslant \left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

On a prouvé que la suite $\left(\left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\rho(\mathrm{A})$

12) Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, notons I_k la propriété :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \left|a_{i,j}^{(k)}\right| \leqslant b_{i,j}^{(k)}.$$

La propriété I_1 est vraie par définition des $b_{i,j}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la propriété I_k est vraie. Soit (i,j) un couple d'indices entre 1 et n. La formule du produit matriciel donne

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}\, a_{\ell,j}^{(k)}.$$

On applique l'inégalité triangulaire puis on utilise l'hypothèse I_k.

$$\left|a_{i,j}^{(k+1)}\right| \leqslant \sum_{ell=1}^{n} \underbrace{|a_{i,\ell}|}_{=b_{i,\ell}} \underbrace{\left|a_{\ell,j}^{(k)}\right|}_{\leqslant b_{\ell,j}^{(k)}} \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} b_{i,\ell} b_{\ell,j}^{(k)} = b_{i,j}^{(k+1)}.$$

la propriété I_{k+1} est prouvée.

La récurrence est établie : la propriété I_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Prenons maintenant k quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et considérons un indice j tel que $\left\|\mathrm{A}^k\right\| = \sum_{i=1}^{n} \left|a_{i,j}^{(k)}\right|$. la propriété I_k

$$\left\|\mathrm{A}^k\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}^{(k)} \leqslant \left\|\mathrm{A}_+^k\right\| \qquad \text{puis} \qquad \left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k} \leqslant \left\| \mathrm{A}_+^k\right\|^{1/k}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) \leqslant \rho(\mathrm{A}_+)$

13) Encore un raisonnement par récurrence. Pour tout entier $k \geqslant 2$, notons J_k la propriété « Pour tout $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qui vérifie l'égalité $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$, le vecteur $(z_1, \ldots, z_n)$ est colinéaire à $(|z_1|, \ldots, |z_n|)$. »

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Notons $r_1 = |z_1|$ et $r_2 = |z_2|$ et introduisons θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

Le calcul donne $|z_1 + z_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$ et $(|z_1| + |z_2|)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2$. On en déduit que le produit $r_1r_2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)) = 0$ est nul.

Si $r_1 = 0$, on a alors $(z_1, z_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}(|z_1|, |z_2|)$.

Si $r_2 = 0$, on a alors $(z_1, z_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$.

Si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$, alors θ_1 et θ_2 sont congrus modulo 2π donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ donc $(z_1, z_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}(|z_1|, |z_2|)$.

la propriété J_2 est prouvé.

Soit $k \geqslant 2$ pour lequel J_k est vrai. Prenons $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ tel que $|z_1 + \cdots + z_{k+1}| = |z_1| + \cdots + |z_{k+1}|$.

Supposons dans un premier temps que z_{k+1} est nul, ce qui donne $|z_1 + \cdots + z_k| = |z_1| + \cdots + |z_k|$. L'hypothèse J_k donne alors l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, \ldots, z_k) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_k|)$. La nullité de z_{k+1} donne alors $(z_1, \ldots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_{k+1}|)$.

Ce raisonnement se généralise au cas où au moins un des z_i est nul.

Supposons maintenant que tous les z_i sont non nuls.

L'inégalité triangulaire donne

$$|z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_k| + |z_{k+1}| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|.$$

Ces trois nombres sont donc égaux, ce qui donne en particulier

$$|z_1 + \cdots + z_k| + |z_{k+1}| = |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}| \qquad \text{donc} \qquad |z_1 + \cdots + z_k| = |z_1| + \cdots + |z_k|.$$

L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(z_1, \ldots, z_k) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_k|)$.

On peut aussi organiser l'inégalité triangulaire sous la forme

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_{k+1}| \leqslant |z_1| + |z_2 + \cdots + z_{k+1}| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_{k+1}|$$

et en déduire l'égalité $|z_2 + \ldots + z_{k+1}| = |z_2| + \cdots + |z_{k+1}|$. L'hypothèse J_k permet d'en déduire qu'il existe un $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $(z_2, \ldots, z_{k+1}) = \mu(|z_2|, \ldots, |z_{k+1}|)$.

Le fait que z_2 soit non nul donne $\lambda = z_2/|z_2| = \mu$ donc finalement $(z_1, \ldots, z_{k+1}) = \lambda(|z_1|, \ldots, |z_{k+1}|)$.

la propriété $\mathbf{J}_{k+1}$ est prouvée. Par récurrence, la propriété J_k est vraie pour tout entier $k \geqslant 2$.

14) Le produit ${}^t y\ \mathrm{A}x$ s'écrit de deux manières

$${}^t y\ \mathrm{A}x = {}^t y \lambda x = \lambda {}^t y x \qquad \text{et} \qquad {}^t y\ \mathrm{A}x = {}^t\left({}^t\ \mathrm{A}y\right) x = {}^t(\mu y) x = \mu {}^t y x.$$

On en tire l'égalité $(\lambda - \mu){}^t yx = 0$ puis ${}^t yx = 0$ car $\lambda \neq \mu$. On remarque enfin l'égalité ${}^t yx = {}^t xy$, qui donne finalement ${}^t xy = 0$

15 a) Pour $k = 0$ la propriété est évidente et pour $k = 1$ elle est donnée par l'hypothèse $\mathrm{A}w \geqslant \mu w$.

Remarquons pour plus tard que le produit de deux matrices positives est une matrice positive. Idem avec une somme.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^k w \geqslant \mu^k w$. La colonne $\mathrm{A}^k w - \mu^k w$ est positive et la matrice A est positive donc la colonne $\mathrm{A}^{k+1} w - \mu^k\ \mathrm{A}w$ est positive. De même, la colonne $\mu^k(\ \mathrm{A}w - \mu w)$ est positive.

Par somme, la colonne $\mathrm{A}^{k+1} w - \mu^{k+1} w$ est positive, ce qui donne $\mathrm{A}^{k+1} w \geqslant \mu^{k+1} w$.

La récurrence est établie : l'inégalité $\mathrm{A}^k w \geqslant \mu^k w$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Comme le vecteur w est positifs, les vecteurs dans les deux membres de l'égalité sont à coefficients positifs. On en déduit l'inégalité $\left\|\mathrm{A}^k w\right\|_1 \geqslant \mu^k \|w\|_1$ puis

$$\frac{\left\|\mathrm{A}^k w\right\|_1}{\|w\|_1} \geqslant \mu^k \quad \text{puis} \quad \left\|\mathrm{A}^k\right\| \geqslant \mu^k \quad \text{et} \quad \left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k} \geqslant \mu,$$

ce qui donne $\rho(\mathrm{A}) \geqslant \mu$ en faisant tendre k vers $+\infty$ (question 11).

15 b) L'hypothèse $\mathrm{A}w > \mu w$ s'écrit, coordonnées par coordonnéés ;

$$(\mathrm{A}w)_1 > \mu w_1 \quad \ldots \quad (\mathrm{A}w)_n > \mu w_n.$$

Notons λ le plus petit des nombres $(\mathrm{A}w)_i / w_i$ où i décrit l'ensemble (non vide) des indices tels que $w_i > 0$. On a alors $\mathrm{A}w \geqslant \lambda w$ et $\lambda > \mu$.

Le résultat de la question précédente donne $\rho(\mathrm{A}) \geqslant \lambda$ donc $\rho(\mathrm{A}) > \mu$.

15 c) Soit un indice ℓ distinct de k. Le calcul donne

$$(\mathrm{A}w')_\ell - \mu w'_\ell = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{\ell,j} w_j - \mu w_\ell}_{\geqslant 0} + \underbrace{a_{\ell,k} \varepsilon}_{>0} > 0.$$

Il reste un coefficient de $\mathrm{A}w' - \mu w'$ à étudier

$$(\mathrm{A}w')_k - \mu w'_k = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{k,j} w_j - \mu w_k}_{\text{noté } x_k} - (\mu - a_{k,k})\, \varepsilon.$$

Le nombre x_k vaut $(\mathrm{A}w)_k - w_k$. Il est donc strictement positif, ce qui permet de choisir $\varepsilon > 0$ de sorte que $x_k - (\mu - a_{k,k})\, \varepsilon > 0$, comme précisé ci-dessous.

Si $\mu - a_{k,k} \leqslant 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$.

Si $\mu - a_{k,k} > 0$, il suffit de prendre $\varepsilon = x_k / \left(2\,(\mu - a_{k,k})\right)$.

Pour un tel choix de ε, on a alors $\mathrm{A}w' > \mu w'$ et w' est un vecteur positif non nul donc $\rho(\mathrm{A}) > \mu$ d'après 15.b.

16 a) . Soit $i \in [\![1, n]\!]$. L'égalité $(\mathrm{A}x)_i = \lambda x_i$ s'écrit

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \geqslant |\lambda| \times |x_i| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j}\, (v_0)_j \geqslant \rho(\mathrm{A})\, (v_0)_i\,.$$

C'est vrai pour tout indice i donc $\mathrm{A}v_0 \geqslant \rho(\mathrm{A}) v_0$.

Si on suppose que cette inégalité n'est pas une égalité alors on est dans le cadre des hypothèses de la question 15.c avec $\mu = \rho(\mathrm{A})$ et $w = v_0$ donc $\rho(\mathrm{A}) > \rho(\mathrm{A})$, ce qui est absurde.

Cette absurdité prouve l'égalité $\mathrm{A}v_0 = \rho(\mathrm{A}) v_0$.

16 b) Soit k un indice tel que $x_k \neq 0$. On obtient alors les relations

$$\rho(\mathrm{A}) = \frac{(\mathrm{A}v_0)_k}{(v_0)_k} = \frac{1}{|x_k|} \sum_{j=1}^n a_{k,j}\, |x_j| \geqslant a_{k,k} > 0.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$(v_0)_i = \frac{(\mathrm{A}v_0)_i}{\rho(\mathrm{A})} = \frac{1}{\rho(\mathrm{A})} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \geqslant \frac{1}{\rho(\mathrm{A})} a_{i,k} |x_k| > 0.$$

Toutes les coordonnées de v_0 sont strictement positives.

16) c) L'inégalité triangulaire écrite à la question 16.a est finalement une égalité. En particulier, on a

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j| .$$

Le cas d'égalité de la question 13 donne donc l'existence de $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$(a_{1,1}x_1, \ldots, a_{1,n}x_n) = \mu \left(a_{1,1} |x_1|, \ldots, a_{1,n} |x_n| \right).$$

Les $a_{1,j}$ étant tous non nuls, il vient

$$(x_1, \ldots, x_n) = \mu \left(|x_1|, \ldots, |x_n| \right).$$

Ainsi, le vecteur x est colinéaire à v_0. Ces vecteurs sont donc associés à la même valeur propre. Cela prouve l'égalité $\lambda = \rho(\mathrm{A})$. **17 a)** Soit $x \in \mathrm{F}$. Le calcul donne

$${}^t(\mathrm{A}x)w_0 = {}^t x\, {}^t\mathrm{A}w_0 = \rho(\mathrm{A}){}^t x w_0 = 0$$

donc $\mathrm{A}x$ appartient à F. Le sous-espace F est donc stable par φ_{A}.

Un autre calcul donne ${}^t v_0.w_0 = \sum_{i=1}^{n} (v_0)_i (w_0)_i > 0$ donc v_0 n'est pas dans F. La droite $\mathbb{C}v_0$ et F sont donc en somme directe.

Le sous-espace F est le noyau de $\varphi : x \mapsto {}^t x w_0$, forme linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. Ce n'est pas l'application nulle donc son noyau est un hyperplan : $\dim(\mathrm{F}) = n - 1$.

On en déduit l'égalité $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathbb{C}v_0) = \dim(\mathbb{C}^n)$. La somme de F et $\mathbb{C}v_0$ étant directe, on en déduit que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

17 b) Soit μ une valeur propre de A telle que $\mu \neq \rho(\mathrm{A})$. Soit v un vecteur propre associé.

Le résultat de la question 14 donne ${}^t v w_0 = 0$ donc $v \in \mathrm{F}$.

Supposons que v ait tous ses coefficients réels et positifs (l'un d'entre eux au moins est alors strictement positif). On obtient alors ${}^t v w_0 > 0$, ce qui est contradictoire.

Un tel vecteur propre ne peut donc être associé qu'à la valeur propre $\rho(\mathrm{A})$: la propriété (iii) est démontrée.

Question 18.a. Soit $(v_2, \ldots, v_n)$ une base de F. La famille $\mathcal{V} = (v_0, v_2, \ldots, v_n)$ est alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\mathbb{C}v_0$ et F sont supplémentaires. La matrice de φ_{A} relativement à cette base s'écrit

$$\begin{pmatrix} \rho(\mathrm{A}) & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix},$$

où B est la matrice de ψ relativement à la base $(v_2, \ldots, v_n)$ de F, d'où la factorisation $\chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X} - \rho(\mathrm{A}))\chi_{\psi}$.

Aucun élément de F n'est à coordonnées strictement positives donc $\rho(\mathrm{A})$ n'est pas une valeur propre de ψ. Or les autres valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à $\rho(\mathrm{A})$ donc les racines de χ_{ψ} ont un module strictement inférieur à $\rho(\mathrm{A})$. On en déduit que $\rho(\mathrm{A})$ est une racine de multiplicité 1 de χ_{A}.

On sait alors que le s.e.v. propre associé à $\rho(A)$ est une droite et comme il contient v_0, on a démontré toute la propriété (ii).

Culturel : Le théorème obtenu s'appelle **théorème de Perron-Frobenius**. Le fait qu'ici le sujet soit un sujet d'ENS PC ne doit pas vous en écarter : c'est un grand classique de sujets de concours de niveau divers (cas particuliers au CCINP, cas plus généraux à Mines-Centrale aussi). Le sujet faisait aussi montrer une dernière conclusion :

(iv) pour tout vecteur positif non nul x il existe un $c > 0$ tel que $\frac{`}{A^k.x}\rho(A)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} cv_0$.