DM 4 : Réductions et semi-normes, solutions

Partie I

1) a) *Question de cours.* Soit A une matrice représentant f dans une base $\mathcal{B}$ de E. Il est légitime de définir $\mathrm{Tr}(f) \overset{def}{=} \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ car cette trace ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
En effet, si B est une autre matrice représentant f dans une autre base, A et B sont semblables donc $B = PAP^{-1}$ et $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{Tr}(A)$. □

b) **Méthode 1 :** Il suffit de montrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $(v, f(v))$ est libre $(*)$.
En effet, on pourra alors compléter $(v, f(v))$ en une base $\mathcal{B} = (v, f(v), e_3, \ldots, e_n)$ de E.
Et la première colonne de $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sera alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne, en particulier que $a_{1,1} = 0$.
Reste à montrer $(*)$. Or *par l'absurde sinon*, pour tout $v \in E$, $(v, f(v))$ liée. *On retombe sur l'exercice classique caractérisant les homothéties.* (**et PAS sur la définition des homothéties attention !**).
Pour tout $v \in E$, il existe un $\lambda_v \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda_v.v$. Soit $(v, w) \in E^2$, qu'on suppose tous deux non nuls. *On veut montrer que $\lambda_v = \lambda_w$.*
• Si $w = \mu v$, alors on a $f(w) = \lambda_w.w \quad (1)$ et $f(w) = \mu f(v) = \mu\lambda_v.v = \lambda_v(\mu v) = \lambda_v w \quad (2)$.
On déduit bien de (1) et (2), comme $w \neq 0$, que $\lambda_v = \lambda_w$.
• Si (v, w) libre, alors on considère $x = v + w$. Alors $f(x) = \lambda_x x = \lambda_x v + \lambda_x w \quad (3)$.
Mais $f(x) = f(v) + f(w) = \lambda_v v + \lambda_w w \quad (4)$.
Comme (v, w) est libre, on peut identifier les coefficients dans (3) et (4) et on obtient que $\lambda_v = \lambda_w = x$.
Conclusion : on vient de montrer que dans ce cas f est une homothétie, *contradiction.*
D'où $(*)$ et la conclusion.

Méthode 2 : *Sans utiliser la caractérisation classique des homothéties rappelée à la méthode 1. Dans un problème d'écrit, on vous aurait fait sinon d'abord redémontrer cette caractérisation.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie. Soit $\mathcal{C}$ une base de E. On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = (b_{i,j})$.
1er cas : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ n'est pas une matrice diagonale. Dans ce cas il existe une couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $b_{i,j} \neq 0$.
On note $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors $f(e_j) = b_{i,j}e_i + \sum_{k \neq i} b_{k,j}e_k$ et $f(e_i) = b_{i,i}e_i + \sum_{k \neq i} b_{k,i}e_k$.
On note $e_1' = \dfrac{a_{i,i}}{a_{i,j}} e_j - e_i$.
Alors $f(e_1') = \sum_{k \neq i} \mu_k e_k \quad (\dagger)$.
Si on considère la famille $\mathcal{B} = (e_1', (e_k)_{k \neq i})$, il est facile de montrer qu'elle est libre et donc que c'est une base de E et par $(\dagger)$, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a bien $a_{1,1} = 0$.
2ème cas : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale. Comme f n'est pas une homothétie, on va se ramener au premier cas en créant une base $\mathcal{C}'$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(f)$ n'est pas diagonale.
On note $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$. Comme f n'est pas une homothétie et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ est diagonale, il existe un couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $f(e_i) = \mu e_i$ et $f(e_j) = \lambda e_j$ avec $\lambda \neq \mu$. Quitte à réindicer, on peut supposer $(i, j) = (1, 2)$.
On pose alors $f_1 = e_1 + e_2$ et $f_2 = e_2$. Alors $f(f_1) = \lambda e_1 + \mu e_2 = \lambda f_1 + (\mu - \lambda) f_2$.

Donc dans la base $(f_1, f_2, e_3, \dots, f_n)$ la matrice de f n'est pas diagonale et le premier cas permet de conclure.

c) Notons $P(n)$ la propriété : "si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. n, et si $f \in \mathcal{L}(E)$ est de trace nulle, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ ait toutes ses entrées diagonales nulles."

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• Pour $n = 1$, le résultat est trivial.

• On suppose $P(n-1)$ vraie, pour un certain $n \geq 2$.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle.

Si $f = 0$, il n'y a rien à prouver.

Si $f \neq 0$, alors f n'est pas une homothétie (en effet la trace de $f = \lambda\,\mathrm{id}$ est $n\lambda$).

N.B. – Ceci est vrai à condition de supposer que $\mathbb{K}$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et n est un multiple de p, on aura $n\lambda = 0$ même si $\lambda \neq 0$.

Donc par (b) il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice A de f s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A' \end{pmatrix}$ où A' est une matrice carrée de taille $n-1$.

Comme $\mathrm{Tr}(A) = 0 + \mathrm{Tr}(A')$, on conclut que $\mathrm{Tr}(A') = 0$.

On peut conclure, au choix, matriciellement ou géométriquement.

• *Géométriquement :*

Notons p le projecteur de E de noyau $\mathrm{Vect}(e_1)$ et d'image $E' = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$.

Alors $g = p \circ f_{|E'}$ est un endomorphisme de E' de matrice A' de trace nulle.

Donc par H.R. il existe une base $\mathcal{B}'_{n-1} = (e'_2, \dots, e'_n)$ de E' telle que la matrice B' de g dans la base $\mathcal{B}'$ ait tous ses éléments diagonaux nuls.

Alors la matrice de f dans $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est de la même forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B' \end{pmatrix}$, seules les entrées mises dans les $*$ étant changées. La récurrence est établie.

• *Matriciellement :* Par l'H.R. traduite matriciellement, il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $QA'Q^{-1}$ soit une matrice à diagonale nulle.

On considère alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ (écriture par bloc).

Alors (par propriété du produit par bloc), on sait que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$

et $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & QA'Q^{-1} \end{pmatrix}$ est bien une matrice à diagonale nulle.

On a bien montré $P(n)$ et la réc. est établie. □

2) a) Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ une matrice diagonale.

On calcule $AD = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & d_2 a_{1,2} & \dots & d_n a_{1,n} \\ d_1 a_{2,1} & d_2 a_{2,2} & \dots & d_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_1 a_{n,1} & d_2 a_{n,2} & \dots & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & d_1 a_{1,2} & \dots & d_1 a_{1,n} \\ d_2 a_{2,1} & d_2 a_{2,2} & \dots & d_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_n a_{n,1} & d_n a_{n,2} & \dots & d_n a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Donc $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & (d_2 - d_1) a_{1,2} & \dots & (d_n - d_1) a_{1,n} \\ (d_1 - d_2) a_{2,1} & 0 & \dots & (d_n - d_2) a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (d_1 - d_n) a_{n,1} (d_2 - d_n) a_{n,2} & \dots & 0 & \end{pmatrix}$.

Comme $d_1, \dots, d_n$ sont supposés deux à deux distincts, on conclut que $f(A) = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

Ainsi $\ker f = D_n(\mathbb{K})$ le s.e.v. des matrices diagonales.

b) L'image est de dimension $n^2 - n$ par théorème du rang et le (a). Avec le calcul du (a) pour tous les $f(A)$, il est clair que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans l'ensemble des matrices dont tous les éléments diagonaux sont nuls. Mais ceci est aussi un s.e.v. de dim. $n^2 - n$. Donc l'image est exactement l'ensemble des matrices dont tous les termes diagonaux sont nuls.

3) Le sens $\Leftarrow$ est immédiat car $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.

Sens $\Rightarrow$ Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Par 1) il existe une matrice B à diagonale nulle semblable à A. Donc $A = PBP^{-1}$ avec B à diagonale nulle.

Par 2), pour B à diagonale nulle, si on fixe D matrice diagonale quelconque à entrées diagonales distinctes, il existe une matrice C telle que $B = DC - CD$.

Alors $A = PDCP^{-1} - PCDP^{-1}$. On pose alors $M = PDP^{-1}$ et $N = PCP^{-1}$. On a bien $A = MN - NM$.

4) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A. Il existe un $e_1 \in E$ tel que $(e_1, u(e_1))$ est libre. En complétant cette famille en une base $\mathcal{B}$ de E on a une matrice représentant f où la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais ce n'est pas ce qu'on veut ici ! En revanche, si on prend comme base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où e_1 est comme précédemment tel que $(e_1, u(e_1))$ est libre et $e_2 = u(e_1) - \alpha e_1$, alors $u(e_1) = e_2 + \alpha e_1$ et donc la première colonne de la matrice de u dans cette base sera $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Avec la matrice Q de la forme proposée par l'énoncé, on considère QA_1Q^{-1} et on espère qu'elle soit de la forme demandée. Or

$$\begin{aligned} QA_1Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & W \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -W \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + WC & L + WB_1 \\ C & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -W \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + WC & * \\ * & -CW + B_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On cherche donc une ligne $W = \begin{pmatrix} w_1 & \dots w_{n-1} \end{pmatrix}$ telle que $\alpha + WC = \alpha \quad (1)$ et $B_1' = -CW + B_1$ ne soit pas une matrice scalaire quand $B_1 = \lambda I_{n-1}$ matrice scalaire.

Or avec le a) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc$WC = w_1$, donc pour que la condition (1) soit assurée il faut et il suffit de prendre $w_1 = 0$.

Pour la seconde condition on écrit $CW = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & \dots & w_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ Comme $n \geq 3$, $n-1 \geq 2$, donc même avec $w_1 = 0$, on peut choisir $w_2 \neq 0$ et $B_1 - CW$ ne sera pas une matrice scalaire !

c) On peut alors faire une récurrence en recommençant la construction du a) avec B_1'.

5) a) Si $T = p_1 + \dots + p_r$, alors $\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(p_i) \in \mathbb{N}$.

Et $\mathrm{Im}\, T \subset \sum \mathrm{Im}\, p_i$ donc $\mathrm{rg}(p) \leq \sum \mathrm{rg}(p_i)$.

b) (i) Il suffit de choisir une base dont les $n-r$ derniers vecteurs sont dans $\ker f$ pour f l'endo. can. ass. à M.

(ii) Avec la question 4), on sait que M_1 est semblable à une matrice dont la diagonale est $\mathrm{diag}(t_1, .., t_r)$ où $t_1, \dots, t_r$ sont des réels quelconques tels que $t_1 + \dots + t_r = \mathrm{Tr}(M_1) = \mathrm{Tr}(M)$. Et comme $\mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{N}$, on peut choisir $t_1, \dots, t_r$ entiers.

Donc M est semblable à $M' = \begin{pmatrix} M_1' & 0 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix}$ avec M_1' ayant pour diagonale $(t_1, \dots, t_r)$ et les t_i entiers.
Pour voir M' comme somme de matrice de projecteurs i.e. idempotentes, on va ruser :
On décompose $M' = \sum_{j=1}^{r} t_j [0, \dots, 0, \frac{C_j}{t_j}, 0, \dots, 0]$ où C_j est la j-ième colonne de M'.
On note P_j la matrice $[0, \dots, 0, \frac{C_j}{t_j}, 0, \dots, 0]$ qui admet donc une seule colonne non nulle, cette colonne étant de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$.
Lorsqu'on calcule P_j^2 on trouve merveilleusement 0 !
(iii) Exactement avec le même raisonnement avec $M' = \sum_{j=1}^{r} [0, \dots, 0, C_j, 0, \dots, 0]$ où C_j est la j-ième colonne de M' et comme au (ii) chaque matrice P_j est idempotente.
(iv) On se ramène au cas précédent, en décomposant M_1 comme somme deux matrices diagonales.

Partie II

1) a) Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, $S(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| S(f)$.
Inégalité triangulaire : soit $f, g \in E$, $S(f + g) = \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt$. Or par I.T. dans $\mathbb{R}, |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$ et par intégration de cette inégalité, $S(f + g) \leq S(f) + S(g)$.
En revanche si on prend $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, telle que $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) = 0$ et $f(0) = 17$ alors $S(f) = 0$ alors que f n'est pas la fonction nulle.

b)

c) $N \circ u$ est, comme N, valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Homogénéité : pour $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, (N \circ u)(\lambda x) = N(u(\lambda x)) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N(u(x)) = |\lambda| (N \circ u)(x)$.
Inégalité triangulaire : pour $(x, y) \in E \times E$:

$$(N \circ u)(x + y) = N(u(x + y)) = N(u(x) + u(y)) \leqslant N(u(x)) + N(u(y)) = (N \circ u)(x) + (N \circ u)(y).$$

$N \circ u$ est donc bien une semi-norme sur E.
Pour $x \in E, (N \circ u)(x) = 0 \iff u(x) = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} u$.
On en déduit que $N \circ u$ est une norme si et seulement si Ker $u = \{0\}$, c'est-dire ssi u est injective.

2) a) D'abord $N + S$ est, comme N et S, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Pour $x \in E, 0 \leqslant N(x) \leqslant N(x) + S(x)$, donc :'

$$(N + S)(x) = 0 \Longrightarrow N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

L'homogénéité et la sous-additivité de $N + S$ résultent immédiatement de celles de N et S. Ainsi $N + S$ est donc bien une norme sur E.

b) Soit S une semi-norme sur E de dimension finie. Soient N une norme arbitraire sur E et $N' = N + S$. D'après a), N' est aussi une norme. On sait par le cours que N et N' sont continues. Comme $S = N' - N$, on en déduit que S est continue par théorème généraux.

3) a) • Par homogénéité de S, on sait que $0 \in V_S$ et que V_S est stable par multiplication externe.
• Soit $(x,y) \in V_S^2$. Alors $0 \leqslant S(x+y) \leqslant S(x)+S(y) = 0$, donc $S(x+y) = 0$, i.e. $x+y \in V_S$. Donc V_S est stable par $+$.
Avec les deux points précédents, on vient de montrer que V_S est un s.e.v. de E.

b) Soit $(x,y) \in E \times V_S$. D'une part,

$$S(x+y) \leqslant S(x)+S(y) = S(x) \quad (1)$$

d'autre part, $x = (x+y)-y$, donc

$$S(x) \leqslant S(x+y)+S(-y) = S(x+y) \quad (2)$$

.
Avec (1) et (2), on a bien : $S(x+y) = S(x)$.

4) a) $AP = P^{-1}(PA)P$, donc AP et PA sont semblables, donc $N(AP) = N(PA)$ par hypothèse sur N.

b) Posons $r = \operatorname{rg} B$. On peut supposer $r < n$, car si $r = n$ le résultat demandé est celui du a). On sait qu'il existe U et V dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = U\begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r}\end{pmatrix}V$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ posons $B_k = U\begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & \frac{1}{k}I_{n-r}\end{pmatrix}V$. Par construction, B_k est inversible et $B_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} B$.
D'après a), pour tout $k \in \mathbb{N}^*, N(AB_k) = N(B_kA)$.
De plus, $AB_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AB$ et $B_kA \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} BA$ et N est continue.
On en conclut que $N(AB) = N(BA)$.

c) On sait que $E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2}$ et $E_{1,2}E_{1,1} = 0$. Le b) donne donc $N(E_{1,2}) = 0$; c'est absurde puisque $E_{1,2} \neq 0$. Il n'existe donc pas de norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude.

5) a) Mme démonstration qu'en 4.a) et 4.b), avec remplacement de N par S, qui est bien continue d'après 2.b).

b) Soit $i \neq j$. Selon a), $S(E_{i,i}E_{i,j}) = S(E_{i,j}E_{i,i})$, ce qui se réécrit $S(E_{i,j}) = S(0) = 0$. Ainsi, $E_{i,j} \in V_S$.

c) Une matrice N à diagonale nulle est combinaison linaire des $E_{i,j}$ avec $i \neq j$, donc $N \in V_S$ d'aprs b) et 3.a). Ensuite, une matrice M de trace nulle est semblable une matrice N diagonale nulle, donc $S(M) = S(N) = 0$.

d) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $A' = A - \frac{\operatorname{tr} A}{n}I_n$; par construction, $\operatorname{tr} A' = 0$, donc d'après c), $A' \in V_S$. Ensuite, $A = \frac{\operatorname{tr} A}{n}I_n + A'$, donc d'aprs 3.b), $S(A) = S\left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}I_n\right) = \left|\frac{\operatorname{tr} A}{n}\right| S(I_n) = \frac{S(I_n)}{n}|\operatorname{tr} A|$.

6) D'après 5., toute semi-norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude est de la forme $A \longmapsto k|\operatorname{tr} A|$, avec $k \in \mathbb{R}_+$. Réciproquement, les applications de cette forme sont bien des semi-normes (c'est immédiat par linéarité de la trace) et sont invariantes par similitude, puisque la trace l'est.

Donc l'ensemble des semi-normes invariantes par similitudes est l'ensemble des $S_k : A \longmapsto k|\operatorname{tr} A|$, avec $k \in \mathbb{R}_+$.