DM 2 : Endomorphismes nilpotents et algèbres de Lie, solutions

1) Généralités sur les endomorphismes nilpotents : bonnes révisions/ compléments !

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. n et $u \in \mathscr{L}(E)$

1) On suppose que u est nilpotent d'indice d. Démontrer que $d \leq n$.
   Idée essentielle : Soit $x \in E$ tel que $u^{d-1}(x) \neq 0$ (ce x existe car $u^{d-1} \neq 0$).
   Montrons qu'alors que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est libre.
   Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{d-1} u^{d-1}(x) = 0$.
   Par l'absurde si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \neq (0, \dots, 0)$ Soit $s = \min\{k,\ \lambda_k \neq 0\}$: on a $s \leq d-1$.
   On a alors $\lambda_s u^s(x) + \dots + \lambda_{d-1} u^{d-1}(x) = 0$. On applique u^{d-1-s} à cette égalité. Par linéarité, on obtient :
   $$\lambda_s u^{d-1}(x) + \lambda_{s+1} u^d(x) + \dots + \lambda_{d-1} u^{2(d-1)-s}(x) = 0 \quad (*)$$
   Dans cette somme tous les termes sauf le premier sont nuls car $u^k(x) = 0$ pour $k \geq d$.
   Donc $(*)$ devient :
   $$\lambda_s u^{d-1}(x) = 0$$
   avec $\lambda_s \neq 0$ et $u^{d-1}(x) \neq 0$, *contradiction.*
   On a donc bien montré que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est libre.
   On a alors une famille libre de d vecteurs dans E donc $d \leq n$.
2) *Démonstration* géométrique *du fait qu'une matrice T.S.S. est nilpotente*
   a) **Terminologie :** La famille (V_k) s'appelle le *drapeau* associé à la base de l'énoncé. Par commodité, on convient de noter $\forall\, k < 0$, $V_k = \{0\}$. L'intérêt de cette notation est qu'avec l'hypothèse $u(V_k) \subset V_{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on déduit immédiatement par récurrence que $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $u^n(V_k) \subset V_{k-n} = \{0\}$.
      En particulier $u^n(V_n) \subset V_0 = \{0\}$ donc $u^n = 0$.
   b) Si $A \in TSS_n(\mathbb{K})$ et si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé.
      Alors on constate immédiatement que u vérifie la propriété du (a) et donc u est nilpotent et donc A est nilpotente.
      Mieux, en fait $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est T.S.S. si, et seulement si, u vérifie la propriété du a).
3) *Une démonstration du fait qu'un endomorphisme nilpotent peut être représenté par une matrice T.S.S. (comparer au cours du R3)*
   a) On suppose que u est nilpotent d'indice d. Montrer que :
      $$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker u^{d-1} \subsetneq \ker u^d = E.$$
      • On montre d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$:
      soit $x \in \ker(u^k)$. Alors $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ donc $x \in \ker u^{k+1}$.
      • Ensuite on montre que si pour un $r \in \mathbb{N}$ on a $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$ alors pour tout $k \geq r$, on a $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$
      Par récurrence immédiate, il suffit de montrer qu'ici $\ker u^{r+1} = \ker u^{r+2}$. Par le point précédent, il suffit de montrer que $\ker u^{r+2} \subset \ker u^{r+1}$.
      Soit $x \in \ker u^{r+2}$. Alors, $u^{r+2}(x) = 0$ donc $u^{r+1}(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \ker u^{r+1}$ mais comme $\ker u^{r+1} = \ker u^r$ on obtient que $u(x) \in \ker u^r$ et donc que $u^{r+1}(x)$ et on a bien montré que $x \in \ker u^{r+1}$.
      • Ici pour u nilpotent d'indice d, on a $\ker(u^d) = E$ mais $\ker(u^{d-1}) \neq E$ car $u^{d-1} \neq 0$. Ceci suffit pour être sûr que toutes les inclusions précédentes sont strictes.

b) En reprenant les notations introduites plus haut, en déduire qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(V_k) \subset V_{k-1}$.

Soit $(e_1, \dots, e_{k_1})$ une base de $\ker(u)$ qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{k_1}, e_{k_1+1}, \dots, e_{k_2})$ base de $\ker(u^2)$. On itère cette construction pour définir une suite

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_d = n$$

telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, d]\!], (e_1, \dots, e_{k_i}) \text{ est une base de } \ker u^i.$$

Comme $\ker(u^d) = E$, la famille $(e_1, \dots, e_{k_d})$ est une base de E.
On pose encore $k_0 = 0$.
Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$ et soit i l'unique entier dans $[\![1, d]\!]$ tel que $k_{i-1} < k \leq k_i$.
Alors $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k_i}) = \ker u^i$.
Donc $u(V_k) \subset u(\ker u^i) \subset \ker u^{i-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k_{i-1}}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1}) = V_{k-1}$.
On a donc bien montré que pour tout k, $u(V_k) \subset V_{k-1}$ et donc par l'équivalence mentionnée dans la solution du 2) b) la matrice de u dans cette base T.S.S $\square$
N.B. Cette idée de prendre une base adaptée à la suite des noyaux permet d'aller plus loin dans la réduction des nilpotents et de comprendre leur classe de similitudes..

4) *Par l'absurde* si l'on a une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et de v soient simultanément T.S.S. Alors $u + v$ est représenté par une matrice T.S.S. dans $\mathcal{B}$. Donc $(u + v)$ est nilpotent.

Or dans la base $\mathcal{B}_0$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u+v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice inversible (de rang 2 de manière évidente) donc $u + v$ n'est *pas* nilpotent. *Contradiction.*

5) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice (dite « triangulaire par bloc »), où les blocs A et D sont des matrices carrées quelconques, pas forcément de même taille.

Par propriété du produit par bloc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} A^k & B_k \\ 0 & D^k \end{pmatrix}$ (preuve par récurrence, la matrice B_k étant non précisée).

• Si M est nilpotente, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$ donc vu $(*)$, en particulier $A^k = 0$ et $D^k = 0$ donc A et D sont nilpotente.

• Réciproquement si A et D sont nilpotentes et si on prend k le maximum des deux indices de nilpotence de A et D, avec $(*)$ on a : $M^k = \begin{pmatrix} 0 & B_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais alors M^k est une matrice T.S.S. Donc on sait que M^k est nilpotente et donc M elle-même est nilpotente.

6) On cherche un contre-exemple avec une matrice 2×2 : du coup, pour u canoniquement associé on doit avoir $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$. Donc on fixe un vecteur de $\mathrm{Im}(u)$ par exemple le vecteur $(1, 1)$. Donc on va prendre $u(e_1) = e_1 + e_2$ et on veut ensuite que ce vecteur soit dans $\ker(u)$ donc que $u(e_1 + e_2) = 0$ donc $u(e_1) = -u(e_2)$ donc $u(e_2) = -e_1 - e_2$.

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

2) Théorème sur les « algèbres de Lie nilpotentes »

1) a) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Alors, par déf., $\Phi_u(\lambda f + \mu g) = u \circ (\lambda f + \mu g) - (\lambda f + \mu g) \circ u$.
Par linéarité à gauche et à droite de $\circ$, on en déduit que : $\Phi_u(\lambda f + \mu g) = \lambda u \circ f + \mu u \circ g - \lambda f \circ u - \mu g \circ u$.
En regroupant les termes autrement, on obtient que $\Phi_u(\lambda f + \mu g) = \lambda[u, f] + \mu[u, g] = \lambda \Phi_u(f) + \mu \Phi_u(g)$.
On a bien montré que $\Phi_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.

b) On suppose maintenant que u est nilpotent. On veut montrer que Φ_u est nilpotent.
(M1) On montre par récurrence que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, prédicat $P(r)$ suivant est vrai :

$$P(r) \ : \ \forall\, f \in \mathscr{L}(E),\ (\Phi_u)^r(f) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} u^k \circ v \circ u^{r-k}.$$

Initialisation : $P(1)$ s'écrit $\forall\, f \in \mathscr{L}(E)$, $\Phi_u(f) = \binom{1}{0}(-1)u^0 \circ v \circ u^1 + \binom{1}{1}(-1)^0 u^1 \circ v \circ u^0$.
Ce qui est vrai car le second membre est bien $-v \circ u + u \circ v$.
H.R. On suppose $P(r)$ vrai pour un $r \geq 1$. Montrons que $P(r+1)$ est vraie :
or $\Phi^{r+1}(f) = \Phi_u(\Phi_u^r(f))$. Par linéarité de Φ_u, et par H.R., on a donc :

$$\Phi_u^{r+1}(f) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \Phi_u(u^k \circ v \circ u^{r-k}).$$

Mais $\Phi_u(u^k \circ v \circ u^{r-k}) = u^{k+1} \circ v \circ u^{r-k} - u^k \circ v \circ u^{r+1-k}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_u^{r+1}(f) &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left(u^{k+1} \circ v \circ u^{r-k} - u^k \circ v \circ u^{r+1-k}\right), \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} u^{k+1} \circ v \circ u^{r-k} - \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} u^k \circ v \circ u^{r+1-k}. \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \binom{r}{i-1} (-1)^{r+1-i} u^i \circ v \circ u^{r+1-i} + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r+1-k} u^k \circ v \circ u^{r+1-k}.
\end{aligned}$$

en posant $i = k+1$ dans la première somme.
En regroupant les deux sommes en ayant isolé un terme dans chaque, on obtient :

$$\Phi_u^{r+1}(f) = \sum_{k=1}^{r} \left(\binom{r}{k-1} + \binom{r}{k} \right) u^k \circ v \circ u^{r+1-k} + u^{r+1} \circ v + (-1)^{r+1} v \circ u^{r+1}$$

Par la formule du triangle de Pascal pour les binomiaux et en réincorporant les deux termes extrêmes dans la somme, on obtient $P(r+1)$.
La récurrence est établie.
(M2) *Elle se fonde sur la remarque que la preuve précédente est très semblable à celle de la formule du binôme. Ne peut-on pas plutôt déduire ce résultat de la formule du binôme plutôt que refaire la preuve ? La réponse est bien sûr OUI.*
L'idée $\Phi_u = L_u - R_u$ où $L_u : \ f \mapsto u \circ f$ et $R_u : f \mapsto f \circ u$.
On remarque que L_u et R_u sont deux éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ qui commutent entre eux.
Donc la formule du binôme s'applique et donne que $\Phi_u^r = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} L_u^k \circ R_u^{r-k}$.
On retrouve exactement la formule donnée dans les prédicats $P(r)$.

Application à la nilpotence de Φ_u : si $u^n = 0$ alors

$$\Phi_u^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} u^k \circ v \circ u^{2n-k}$$

et dans cette somme tous les termes sont nuls, car les pour $k \geq n$ $u^k = 0$ et pour $k < n$, $u^{2n-k} = 0$.
Donc $\Phi_u^{2n} = 0$.

c) Montrons que pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\Phi_{[u,v]} = [\Phi_u, \Phi_v]$.
Il s'agit de montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $[[u, v], f] = \Phi_u \circ \Phi_v(f) - \Phi_v \circ \Phi_u(f)$, autrement dit encore que $[[u, v], f] = [u, [v, f]] - [v, [u, f]]$ (identité de Jacobi).
Or cette dernière identité est donnée comme acquise par l'énoncé au début du § II et aussi immédiate à vérifier avec la déf. du crochet de Lie dans $\mathscr{L}(E)$. □

2) Si N est de dimension 1, $N = \mathrm{Vect}(u_0)$. Pour tout $u \in N$, $u = \lambda u_0$. Comme u_0 est nilpotente, en particulier $\ker(u_0) \neq \{0\}$.
On prend un $x \in \ker(u_0)$ avec $x \neq 0$. Alors pour tout $u \in N$, $u(x) = \lambda u_0(x) = 0$.
Remarque : Un s.e.v. de dim. 1 de $\mathscr{L}(E)$ est *toujours stable par le crochet de Lie* car si $N = \mathbb{K}u$ alors pour tout $(f,g) \in N^2$, $[f,g] = [\lambda u, \mu u] = \lambda\ \mu[u,u] = 0$. On va s'en servir au c).

3) *C'est une question très typique : comment montrer l'existence d'un element maximal pour quelque chose ?* On considère l'ensemble de tous les s.e.v. de N *distincts de N*, stables par le crochet. Comme on est en dim. finie, l'ensemble des dimensions de ces s.e.v. est fini donc il y en a un de dimension maximale. Le seul problème est d'être sûr que ce n'est pas $\{0\}$. Mais il est facile de trouver de s.e.v. de dim. 1 stables par le crochet : en fait tous le sont, comme remarqué à la fin de la question précédente.
Cela suffit pour conclure.

4) (i) Soit $u \in N_1$. D'abord il faut comprendre que si on considère $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_u)$, où $\mathcal{B}$ est par déf. une base de N, c'est qu'on considère en fait la restriction de Φ_u à N. Comme N est stable par le crochet de Lie, Φ_u est bien un endomorphisme de N.
Pour montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_u)$ est de la forme demandée, il suffit de montrer que N_1 est stable par Φ_u, mais c'est évident puisque $u \in N_1$ et que N_1 est stable par crochet.
(ii) *Question sur l'application ρ :* En fait la propriété demandée pour ρ vient déjà d'une propriété de Φ_u démontrée au 1) c) : pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\Phi_{[u,v]} = [\Phi_u, \Phi_v]$.
Application ici : On sait donc que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_{[u,v]}) = [\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_u), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_v)]$.
Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_{[u,v]}) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & [D,D'] \end{pmatrix}$.
Ceci montre que $\rho([u,v]) = [D,D']$ i.e. $\rho([u,v]) = [\rho(u), \rho(v)]$.
Culture : les applications Φ et ρ sont des « morphismes pour le crochet de Lie ».

5) *On va appliquer l'hypothèse de récurrence formulée avant la question 3) dans le cadre matriciel, donc non pas à N_1 mais à $\rho(N_1)$*
On note $N_1' = \{\rho(u),\ u \in N_1\}$. C'est un e.v. de dimension inférieure ou égal à $d-1$, stable par le crochet, dont tous les éléments sont nilpotents (car on a vu que u nilpotent entraîne Φ_u nilpotent au 1) b) , et que Φ_u nilpotent entraîne $\rho(u)$ nilpotent par I 5).
Donc l'hypothèse de recurrence s'applique à N_1' et donne qu'il existe un $X_0 \in M_{d,1}(\mathbb{K})$ tel que pour tout $D \in N_1'$, $DX_1 = 0$.
Autrement dit $\exists\, X_0 \in M_{d,1}(\mathbb{K}),\ \forall\ u \in N_1,\ \rho(u).X_0 = 0$.

6) Soit $v_0 \in S$ tel que $[v_0]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix}$. Par déf. $v_0 \in S$ car sa composante sur N_1 est nulle.
En outre $[\Phi_u(v_0)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \rho(u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX_0 \\ \rho(u)X_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par prop. de $\rho(u).X_0$.
On conclut que $\Phi_u(v_0) \in N_1$ puisque sa composante sur S est nulle.

7) Notons $N_2 = N_1 \oplus \mathbb{K}v_0$ (la somme est bien directe puisque $v_0 \in S$).
Montrons que N_2 est stable par le crochet, ce qui par maximalité de N_1, montrera que $N_2 = N$ et donc N_1 est bien de dim. $d-1$.
Pour montrer que N_2 est stable par le crochet, il suffait de prendre deux éléments $u + \lambda v_0$et $u' + \lambda' v_0$ de N_2.
On considère leur crochet qui par bilinéarité s'écrit $[u,u'] + \lambda[u,v_0] + \lambda'[v_0,u'] + \lambda\lambda'[v_0,v_0]$. Or $[u,u'] \in N_1$ car N_1 est stable par crochet, $[v_0,v_0] = 0$ et $[u,v_0] = \Phi_u(v_0) \in N_1$ par construction de v_0. De même pour $[v_0,u'] = -[u',v_0]$. D'où la conclusion.
Remarque : *En fait, ce qu'on a montré aussi c'est que pour tout $(v,v') \in N$, $[v,v'] \in N_1$.*

8) Par déf. $E_1 = \bigcap_{u \in N_1} \ker(u)$. Donc E_1 est un s.e.v. comme intersection de s.e.v.
Soit $x \in E_1$, soit $v \in N$. On veut montrer que $v(x) \in N$ i.e. que pour tout $u \in N_1$, $u(v(x)) = 0$. Mais $u(v(x)) = [u,v](x) + v(u(x)) = [u,v](x)$ car $u(x) = 0$ puisque $x \in E_1$. Mais mieux, avec la remarque faite à la fin de la question précédente, on sait que $[u,v] \in N_1$ et donc que $[u,v](x) = 0$. Donc $u(v(x)) = 0$ et la conclusion.

9) On sait que $E_1 \neq \{0\}$ car l'H.R. s'applique à N_1. Mais on a vu que $N = N_1 \oplus \mathbb{K}v_0$.

D'autre part on vient de montrer que E_1 est stable par tous les éléments de N donc aussi par v_0 et $(v_0)_{|E_1}$ est encore nilpotent donc de noyau non réduit à 0.

Donc si on choisit un $x_0 \in E_1 \cap \ker(v_0)$, non nul, on a, compte-tenu du fait que $N = N_1 \oplus K v_0$, $\forall\, f \in N,\ f(x_0) = 0$.

On a donc démontré le théorème 1 (théorème de Engel) par récurrence.

10) C'est une nouvelle récurrence, cette fois sur la dimension de E, le théorème 1 permettant de faire l'induction.

• Si E est de dim 1, le seul endomorphisme nilpotent de E est l'application nulle.

• On suppose la propriété vraie pour tous les e.v. E de dim. $n-1$ pour un certain $n \geq 2$.

Soit E de dim. n et V un s.e.v. de E stable par crochet dont tous les éléments sont nilpotents.

Par le théorème 1, on a un $x_1 \in E$, tel que $u(x_1) = 0$ pour tout $u \in V$.

On complète x_1 en une base $\mathcal{B} = (x_1, e_2, \dots, e_n)$ de E.

Alors pour tout $u \in V$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & D_u \end{pmatrix}$ écriture par bloc où le premier 0 est le nombre 0, le second zéro est une colonne de $n-1$ zéros. Comme u est nilpotente, on sait que D_u est nilpotente (cf. partie I).

Alors l'ensemble des matrices A_u pour $u \in V$, représente un s.e.v. d'endomorphisme de $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ stable par crochet (même vérification que plus haut avec le produit par bloc), donc l'H.R. s'applique aux A_u et cela donne la conclusion.