Banque CCINP : Ex. 62 en entier, Ex. 65 1,2, Ex. 71.

Réduction par équivalence, et équivalence-à-droite ou à gauche

Exercice 1. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $(P,Q) \in GL_3(\mathbb{R})^2$ telles que $PAQ = J$ et déterminer explicitement de telles matrices P et Q.

Exercice 2. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer qu'il existe $A_1,\dots,A_r$ dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$ telles $A = A_1+\dots+A_r$ avec $\mathrm{rg}(A_k) = 1$ pour tout $k \in [\![1,r]\!]$.

Exercice 3. Pour tout $r \in [\![0,n]\!]$, on note $E_r = \{M \in M_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(M) \leq r\}$.

Soit $F \subset M_n(\mathbb{K})$ une partie non vide telle que $\forall\, A \in F, \forall\, B \in M_n(\mathbb{K})$, $AB \in F$ et $BA \in F$.

Montrer qu'il existe un $r \in [\![0,n]\!]$, tel que $F = E_r$.

Matrices semblables

Exercice 4. Si A, B sont dans $M_n(\mathbb{K})$ est-il vrai que AB et BA sont semblables ?

Même question si en outre A est inversible.

Exercice 5 (Le miracle des homothéties et sa contraposée)**.** a) Soit E un K-e.v. quelconque.

Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie que pour tout $x \in E, f(x)$ et x sont liés alors f est une homothétie.

b) Soit M une matrice qui n'est pas une matrice d'homothétie. Justifier que M est semblable à une matrice A dont la première colonne est E_2.

Exercice 6 (Classification complète des classes de similitude pour les matrices 2×2)**.** a) Vérifier que si $(A,B) \in M_n(K)^2$ sont *semblables* alors elles ont même déterminant et même trace.

b) Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$ qui n'est pas de la forme $A = \lambda I_2$. Montrer qu'il existe $X \in M_{n,1}(K)$ tel que (X, AX) libre.

c) Montrer que deux matrices A et B dans $M_2(K)$ qui ne sont pas scalaires sont semblables, si et seulement si, elles ont même trace et même déterminant.

Exercice 7 (Important :Classes de similitude des matrices de rang 1)**.** a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ est semblable à } \ E_{2,1} \\ \text{ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tel que } A \text{ est semblable à } \ \lambda E_{1,1}. \end{cases}.$$

b) Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables si, et seulement si, elles ont même trace.

Un exemple important de valeurs propres d'opérateur en dimension infinie

Exercice 8. En physique on appelle *filtre linéaire* un système décrit par une *application linéaire* $L : E \to E$ où $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $e \mapsto s = L(e)$ ayant en outre la propriété suivante *d'invariance par translation dans le temps :* pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ en notant $d_\tau \ : \ E \ \to E$, l'application de décalage temporel définie par $\forall \ e \in E$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $d_\tau(e)(t) = e(t+\tau)$, on a

$$L \circ d_\tau = d_\tau \circ L.$$

On note pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $e_\lambda \in E$, l'application définie par : $t \mapsto e^{\lambda t}$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, e_λ est *vecteur propre* de L.

Remarque en physique, vous considérez des $\lambda = 2i\pi\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ correspondants aux signaux purement sinusoïdaux de pulsation ω.

Ainsi en particulier, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe un $H(\omega) \in \mathbb{C}$ tel que $Le_{2i\pi\omega} = H(\omega)e_{2i\pi\omega}$.

La fonction $\omega \mapsto H(\omega)$ s'appelle *fonction de transfert* du filtre.

L'équation aux valeurs propres et la diagonalisabilité

Exercice 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Pour quels $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. Soit $\varphi\ :\ M \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$.

b) Déterminer noyau et image de φ.

c) Montrer que φ est diagonalisable en considérant l'équation aux valeurs propre.

Exercice 11. Soient $(a,b,c,\alpha) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a \neq b$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = (X-a)(X-b)P' + \alpha(X-c)P$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une CNS sur les coefficients a, b, c, α, n pour que $\mathbb{R}_n[X]$ soit stable par f.

b) En supposant cette condition réalisée, et en notant f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f_n et montrer que f_n est diagonalisable.

Un résultat H.P. mais à avoir vu

Exercice 12 (Gerschgörin-Hadamard)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de $A = (a_{i,j})$.

a) Montrer qu'il existe un indice $i \in [[1,n]]$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i$ où $L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

b) On note de même, pour tout $j = 1, \dots, n$, $C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}|$. Enfin, on note $L = \max_{i=1,\dots,n} (L_i + |a_{i,i}|)$ et $C = \max_{j=1,\dots,n} (C_j + |a_{j,j}|)$.

Montrer que pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leq \min(L, C)$.

Exercice 13 (Matrices tridiagonales symétriques)**.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On note $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

Le but de l'exercice est de donner une forme très explicite pour les vecteurs propres et valeurs propres de $A(a,b)$.

a) On considère le cas particulier où $(a,b) = (0,1)$ et on note $A = A(0,1)$.

(i) Montrer à l'aide de l'exercice 12, que toute valeur propre λ de A est de valeur absolue au plus 2.

(ii) On pose alors $\lambda = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in [0,\pi]$. Exprimer avec cette forme les valeurs propres et vecteurs propres de A.

b) On considère de nouveau $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Déduire du a) la forme explicite des valeurs propres et vecteurs propres de $A(a,b)$.

L'apport du polynôme minimal et des polynômes annulateurs en général

Exercice 14. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. On pose : $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.

b) On pose $B = 2A - \mathrm{Tr}(A) \cdot I_n$. Calculer $\det B$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible. Dans ce cas, déterminer B^{-1}.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 15. Redémontrer la diagonalisabilité de l'endomorphisme φ de l'exercice 10 à l'aide d'un polynôme annulateur de φ.

Exercice 16. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $A + {}^t\hat{A} = \lambda I_n$ où $\hat{A} = Com(A)$ la comatrice de A.

Montrer que A a, au plus, deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Soit $F \subset E$ un s.e.v. de E stable par f. Montrer que $g = f_{|F}$ est encore diagonalisable.

Exercice 18. Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que si M est diagonalisable alors A et B sont diagonalisables.

Exercice 19. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par bloc par $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une expression des matrices B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que si A est diagonalisable et inversible alors B est diagonalisable.