Banque CCINP : Ex. 34, 35, 36, 37, 40,44, 45.

Ouverts, fermés

Exercice 1 (Groupe des périodes d'une fonction continue)**.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\Pi_f = \{\ T \ \in \mathbb{R},\ \forall\, x\ \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$ l'ensemble des périodes de f (auxquelles on a rajouté 0).

a) Montrer que Π_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

b) Montrer que si f est continue alors Π_f est un fermé de $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la conclusion du b) n'est pas vraie si f n'est pas continue, par exemple avec la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

d) En admettant le résultat de l'exercice 6 ci-dessous, montrer que si f est une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ alors f admet une plus petite période strictement positive, appelée *la* période de f

Exercice 2. Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite *strictement croissante.*

Donner une CNS pour que l'ensemble $X = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ soit un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Quasi QdC)**.** Soient A et B deux parties d'un e.v.n. E.

a) Quelle relation y-a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$? (Inclusion, égalité, contre-exemples pour une inclusion ?)

b) Même question pour $Int(A \cup B)$ et $Int(A) \cup Int(B)$.

c) Quelles relations entre $Int(E \setminus A)$, $\overline{E \setminus A}$, $E \setminus \overline{A}$, $E \setminus Int(A)$?

Exercice 4. a) Soit E un e.v.n. et A et B deux parties de E.

Montrer que si B est ouvert et $A \cap B = \varnothing$ alors $\overline{A} \cap B = \varnothing$.

b) Soit U un ouvert d'un e.v.n. Montrer que $Fr(U)$ est d'intérieur vide.

Exercice 5. Soit E un e.v.n. et $C \subset E$ un ensemble convexe. Montrer que :

a) $\overline{C}$ est convexe.

b) $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

c) Soit C un ensemble convexe d'intérieur non vide. Soit $x \in \overset{\circ}{C}$ et $y \in \overline{C}$. Montrer que $[x, y[\subset \overset{\circ}{C}$.

Exercice 6 (Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$: (*dém. centrale-Mines, mais il est bon de connaître le résultat pour des applications comme le 3)*)**.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ tel que $G \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

1) On suppose ici que $\alpha > 0$.

a) Montrer que $\alpha \in G$.

b) Montrer qu'alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.

c) En déduire que dans ce cas G est fermé dans $\mathbb{R}$.

2) On suppose que $\alpha = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Avec 1) et 2) on a démontré qu'un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est donc ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou bien dense.

3) Une application : si a et b sont deux réels non nuls, montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense ssi $a/b \notin \mathbb{Q}$.

Indication – On regardera l'équivalence des négations.

Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ et applications

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

a) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Indication – **(M1)** On pourra considérer pour approcher une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ les matrices de la forme $A + \frac{1}{k}I_n$.

(M2) Si A est de rang r, utiliser une forme réduite de A pour la relation d'équivalence, qu'on peut alors approcher facilement par des matrices inversibles.

b) Soit $\Delta = \{A \in M_n(\mathbb{K}), \det(A) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de Δ.

Exercice 8 (Densité dans $M_n(\mathbb{C})$)**.** a) Rappeler une C.S très simple sur les entrées diagonales d'une matrice T.S $T \in M_n(\mathbb{K})$ pour que celle-ci soit diagonalisable.

b) Pour une matrice $M \in TS_n(\mathbb{K})$, construire une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in TS_n(\mathbb{K})$ de matrices déduites de M par une petite pertubation des entrées diagonales de sorte que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$ (la perturbation tend vers zéro) et pour chaque $k \in \mathbb{N}$, A_k admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.

c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_0$ des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est *dense* dans $M_n(\mathbb{C})$

d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ est *dense* dans $M_n(\mathbb{C})$

Exercice 9. a) Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices dz.

b) A l'aide de l'exercice précédent, démontrer le théorème de Cayley-Hamilton pour toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$.