Banque CCINP : Ex. 37, 39, 40.

Exercice 1. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p > 0$, notons : $N_p(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$.

a) On suppose ici $n = 2$, i.e. on se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $B_p = \{x \in \mathbb{R}^2,\ N_p(x) \leq 1\}$. Dessiner B_p pour $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$.

b) On suppose toujours $n = 2$. Montrer que si $p < q$, alors $B_p \subset B_q$.

c) Justifier que si N est une norme quelconque sur un $\mathbb{R}$-e.v. E alors les boules pour N sont des ensembles convexes de E.

d) Montrer que si $p < 1$ alors N_p *n'est pas* une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On admettra ici le fait que N_p est une norme si $p \geq 1$.

Exercice 2. On considère $E = \mathbb{R}^2$ et pour chaque $a \in \mathbb{R}$, et chaque $u = (x, y) \in E$, on note $q_a(u) = x^2 + 2axy + y^2$.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ peut-on définir une norme sur $\mathbb{R}^2$ en posant $||u||_a = \sqrt{q_a(u)}$?

Exercice 3 (De la boule à la norme)**.** a) Soit N une norme sur un e.v.n. E. Soit B la boule unité fermé pour N. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $N(x) = \inf\{t > 0,\ x/t \in B\}$

b) Le a) peut donner l'idée de fabriquer une norme à partir d'une « patate » B dans E. Quelle sont cependant des conditions nécessaires sur B pour qu'elle soit la boule unité fermée d'une norme ?

c) On connaît la forme de la boule unité pour N_∞. En modifiant un peu cette norme montrer que tout parallélogramme non aplati centré en 0 dans $\mathbb{R}^2$ est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (Plein de normes sur les polynômes et leurs non équivalence...)**.** On définit cinq applications de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $N_0(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$ $N_3(P) = \sup\{|P(z)|, \text{pour } z \in \mathbb{C}, \text{ et } |z| = 1\}$, $N_4(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{C}[X]$ et que N_0, N_1, N_2, N_4 sont deux à deux non équivalentes, ainsi que N_0, N_2, N_3, N_4.

Exercice 5. Soit $(E, || \ ||)$ un e.v.n. On dit que la boule unité B est *strictement convexe* ssi $\forall\ (x, y \in B^2, \forall\ t \in\ ]0, 1[,\ x \neq y \Rightarrow ||(1-t)x + ty|| < 1$.

a) Montrer que si $|| \ ||$ est une norme euclidienne, alors B est strictement convexe.

b) Donner des exemples de normes où la boule unité n'est pas strictement convexe.

Exercice 6 (Mélange de N_1 et N_∞ dans un espace de fonctions)**.** Soit $\alpha \in [0, 1]$. Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ on note $N_\alpha(f) = \int_0^\alpha |f| + \max_{[\alpha, 1]} |f|$.

a) Montrer que N_α est une norme.

b) Comparer les normes N_α entre elles : sont-elles équivalentes ?

Exercice 7 (Normes plus fines, caract. séquentielle)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et N et N' deux normes sur E.

On dit que N est plus fine que N' si, et seulement si, il existe un $\alpha > 0$, tel que $N' \leq \alpha N$.

a) Caractérisation séquentielle : montrer que N est plus fine que N' si, et seulement si, toute suite convergeant vers 0 au sens de la norme N converge également vers 0 au sens de la norme N'.

b) En déduire une caractérisation séquentielles de normes équivalentes.

Exercice 8. Pour tout $f \in E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = |\int_0^1 f| + ||f'||_1$ et $N'(f) = |f(0)| + ||f'||_1$. Montrer que N et N' sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 9. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ on note $||A||_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ et $||A|| = n||A||_\infty$.

Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $||A.B|| \leq ||A||.||B||$.

Exercice 10. Soit A une partie bornée de l'espace vectoriel normé (E, N), $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E. En tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(A, E)$, $\mathcal{L}$ est muni de la norme induite par N_∞. Soit $a \in A$.

a) Pour $f \in \mathcal{L}$, soit $K_f = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in A^2, N(f(x) - f(y)) \leqslant kN(x - y)\}$. On note $c(f) = \inf(K_f)$. Montrer que $\mathcal{N} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}_+, f \mapsto c(f) + N(f(a))$ est une norme sur $\mathcal{L}$.

b) Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$, montrer que N_∞ et $\mathcal{N}$ ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{L}$.