Calculs de polynôme caractéristique et application

Banque CCINP : Ex. 59, Ex. 65, Ex. 67, Ex. 68 1), Ex. 69, Ex. 70.

Exercice 1 (Archibasique à savoir bien faire !)**.** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
a) Calculer le polynôme caractéristique de A et les v.p. de A.
b) (i) Déterminer la dimension des s.e.v. propres de A. (ii) En déduire que A est dz.
(iii) Déterminer, mieux, une base de vecteurs propres de A et en déduire une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale.
c) En déduire le polynôme minimal de A.
d) En déduire une formule donnant A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ en fonction de A et I.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 3 (Pur Calcul de polynôme caractéristique extrait d'un pb. d'écrit)**.** On définit la matrice $W_n = (w_{i,j})$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par $w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i < n \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j \in \{1,2\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour $n = 5, W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer le polynôme $\det(XI_n - W_n)$.

Interaction χ_A μ_A , $\det(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$, multiplicité algéb. des v.p.

Exercice 4. Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n+1}$ la base canonique de $M_{2n+1,1}(\mathbb{C})$ et A la matrice telle que $Ae_1 = e_1 + e_{2n+1}$ et $\forall\, k \geq 2$, $Ae_k = e_{k-1} + e_k$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.
b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme un polynôme en A.
c) Déterminer les valeurs propres complexes de A et en déduire $\prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre.

a) Justifier que A est diagonalisable.
b) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
c) Que vaut $\det(A)$?

Exercice 6. Soit n un entier impair et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = 1$ et les valeurs propres complexes de A sont de module 1. Montrer que 1 est valeur propre de A.

Exercice 7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + 3A - 5I_n = 0$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Indication - : On pourra vérifier que $P = X^3 + 3X - 5$ admet une unique racine réelle α, qu'on ne cherchera pas à calculer, mais qui est positive, et donc que $P = (X - \alpha)(X - \omega)(X - \overline{\omega})$ avec $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Qu'en déduire pour χ_A ?

Exercice 8 (Version décomposée d'un énoncé d'oral Mines-Pont)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
b) Montrer que l'entier n est un multiple de 3.
c) Expliciter le polynôme caractéristique de A.

Exercice 9. Montrer que si $A \in M_2(\mathbb{C})$, alors $2\det(A) = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)$;

Application de la diagonalisation au commutant d'une matrice

Exercice 10. Si $A \in M_n(K)$, on appelle commutant de A l'ensemble $C(A)$ des matrices qui commutent à A. On vérifie immédiatement que $C(A)$ est un s.e.v. (même une sous-algèbre) de $M_n(K)$.

a) Si D est une matrice diagonale qu'on écrit par bloc $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \dots, \lambda_r I_{d_r})$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux) deux distinces, montrer que le commutant de D est l'ensemble des matrices $M = \mathrm{diag}(M_1, \dots, M_r)$ avec M_i de taille d_i.

Remarque : on pourra au choix faire une preuve matricielle ou géométrique.

b) En déduire, si A est une matrice dz, la dimension de l'e.v. $C(A)$ en fonction des dimension des s.e.v. propre de A.

Vérifiez que $\dim C(A) \equiv n$ [2].

Diagonalisation simultanée

Exercice 11 (Une propriété clé)**.** Soient E un $\mathbb{C}$-e.v. dimension finie et $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 12 (Diagonalisation simultanée d'une famille quelconque d'endo. dz qui commutent)**.**
1) Justifier que si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme dz et F est un s.e.v. stable par f, alors l'endomorphisme induit f_F est dz.

2) Soit E un K-e.v. de dim. finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque (même infinie) d'endomorphismes diagonalisables de E qui commutent entre eux deux à deux.

On veut montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i)$ est diagonale.

On va utiliser pour cela une récurrence sur la dimension n de E.

a) Que dire de l'initiatisation si $n = 1$?

b) On suppose la propriété vraie pour un tous les e.v. de dimension k avec $1 \leq k \leq n$ et on veut la démontrer pour les s.e.v. de dim. $n + 1$.

On choisit un $i_0 \in I$ tel que f_{i_0} n'est pas une homothétie (sinon il n'y a rien à démontrer).

Conclure alors en considérant la décomposition de E en s.e.v. propres pour f_{i_0}.

Encore Cayley-Hamilton.

Exercice 13 (Prop. de $X \mapsto AX - XB$ pour A et B à spectres complexes disjoints)**.** Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ à spectres disjoints.

a) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

b) Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. Montrer, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ l'égalité : $P(A)X = XP(B)$.

c) Montrer que si $AX = XB$ alors $X = 0$, puis que, pour toute $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $AX - XB = M$.

Exercice 14 (Une démonstration de Cayley-Hamilton avec la formule de la comatrice)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on considère la matrice $XI_n - A \in M_n(\mathbb{K}[X])$ et $B = \mathrm{Com}(XI_n - A)^\top \in M_n(\mathbb{K}[X])$.

a) Justifier qu'on a bien l'égalité, dans $M_n(\mathbb{K}[X])$ suivante :

$$B(XI_n - A) = (XI_n - A)B = \chi_A(X)I_n \quad (\dagger)$$

b) On note $B = X^{n-1}B_0 + X^{n-2}B_1 + \cdots + B_{n-1}$ où $(B_0, \dots, B_{n-1}) \in M_n(\mathbb{K})^n$. On note aussi $\chi_A(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \cdots + \alpha_n$.

Exprimer les B_i en fonction des α_i et des puissances de A et en déduire le théorème de Cayley-Hamilton !

Exercice 15 (Mines-Ponts 2021)**.** Soit E un K-e.v. de dim. finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\deg(\mu_u) \leq \mathrm{rg}(u) + 1$.