Devoir surveillé 2 : solution

Problème 1 : extrait CCINP PSI 2020

1) On calcule (mettre le calcul sur votre copie) : $\chi_A = (X-2)(X+2)X$.
Ainsi la matrice A admet trois valeurs propres réelles distinctes $0, 2, -2$ dans $\mathbb{R}$, et elle est de taille 3, donc A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ et chacun de ses s.e.v. propres est de dimension 1.

2) On calcule : $\chi_B = X\left(X^2+4\right) = X(X+2i)(X-2i)$.
Comme χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Par contre χ_B est scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Comme toutes les v.p. (réelles ou complexes) de B sont simples ses s.e.v. propres (réels ou complexes) sont de dimension 1 (sauf qu'elle n'a qu'un s.e.v. propre réel).

3) On pourrait déterminer $D^{-1}AD$ à l'aide de la formule du changement de base, entre la base canonique (e_1, e_2, e_3) et la base $(e_1, ie_2, -e_3)$ de $(\mathbb{C}^3)$ (il s'agirait alors de décrire l'endomorphisme canoniquement associé à A dans cette nouvelle base), mais autant faire un calcul direct (parce que les produits matriciels avec les matrices diagonales D et D^{-1} sont extrêmement simples : sinon, hors de question de procéder ainsi). Alors :

$$\begin{aligned} D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc : $D^{-1}AD = -iB$.

4) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.
Montrons par *récurrence finie* que : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k = 0$.
Par hypothèse, nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0 \quad (*)$.
• **Initialisation :** En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$ l'expression $(*)$ ci-dessus, on obtient : $\lambda_0 = 0$.
• **Hérédité :** Supposons que pour un j fixé entre 0 et $n-1$, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$ et montrons que $\lambda_{j+1} = 0$.
La formule $(*)$ devient ici

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0.$$

Pour tout $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + j\pi / j \in \mathbb{Z}\}$ on peut diviser cette expression par $\cos^{j+1}(x)$ pour obtenir :

$$\sum_{k=j+1}^{n} \lambda_k \cos^{k-j-1}(x) \sin^{n-k}(x) = 0.$$

En prenant la limite de cette expression lorsque x tend vers $\pi/2$, on obtient $\boxed{\lambda_{j+1} = 0}$.
La récurrence finie est établie.
Conclusion : On a donc montré que la famille est $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. Par définition, c'est une famille génératrice de V_n donc c'est une base de V_n et V_n est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

5)
- $f_0 = \sin^n$ et $f_0' = n\sin^{n-1}\cos = nf_1$.
- $f_n = \cos^n$ et $f_n' = -n\cos^{n-1}\sin = -nf_{n-1}$.
- Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f_k = \cos^k \sin^{n-k}$ et

$$f_k' = -k\cos^{k-1}\sin^{n-k+1} + (n-k)\cos^{k+1}\sin^{n-k-1} = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}$$

Ces calculs prouvent donc que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f_k' \in V_n$$

On sait que la dérivation est linéaire, donc φ_n une application linéaire et par les calculs précédents, la dérivée de tout élément de V_n appartient à V_n : φ_n est donc un endomorphisme de V_n De plus, les calculs montrent que la matrice B_n de φ_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ est

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}$$

En particulier B_2 est la matrice 3×3, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ n & 0 & -2 \\ 0 & n-1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $n = 2$ ce qui donne la matrice B précédente.

6) Pour tout $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k} = \left(e^{ix}\right)^k \left(e^{-ix}\right)^{n-k} = e^{ikx}e^{-i(n-k)x} = e^{i(2k-n)x} = g_k(x)$$

7) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la question précédente et le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad & (\cos(x) + i\sin(x))^k(\cos(x) - i\sin(x))^{n-k} \\ & = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (\cos(x))^j (i\sin(x))^{k-j} \cdot \sum_{\ell=0}^{n-k} \begin{pmatrix} n-k \\ \ell \end{pmatrix} (\cos(x))^\ell (-i\sin(x))^{n-k-\ell},\end{aligned}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ \ell \end{pmatrix} (\cos(x))^{\ell+j}(\sin(x))^{n-(j+\ell)}$$

ce qu'on peut écrire :

$$g_k = \sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k} (-1)^{n-k-\ell} i^{n-j-\ell} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k \\ \ell \end{pmatrix} f_{\ell+j},$$

car $\ell + j \in [\![0, n]\!]$ si $0 \leqslant j \leqslant k$ et $0 \leqslant \ell \leqslant n-k$ (il n'apparaît donc pas des exposants de cosinus et sinus qui ne définiraient pas des fonctions de la base $(f_0, \ldots, f_n)$ de V_n). Ceci démontre que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction g_k est combinaison linéaire des fonctions de la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ qui engendre V_n, donc : $g_k \in V_n$.

8) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $g_k' = i(2k-n)g_k$, (on dérive une fonction exponentielle), c'est-àdire :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \varphi_n(g_k) = i(2k-n)g_k.$$

Comme de plus $g_k \neq 0_{V_n}$, ceci démontre que pour tout $k \in [\![0, n]\!], g_k$ est un vecteur propre de φ_n, associé à la valeur propre $i(2k-n)$. Cela fournit $n+1$ valeurs propres distinctes de φ_n, qui est défini sur un espace vectoriel de dimension $n+1$ donc φ_n est diagonalisable. On en déduit par ailleurs que :

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n) \mid k \in [\![0, n]\!]\},$$

et que les sous-espaces propres de φ_n sont de dimension 1 (vu qu'il y a $n+1$ sous-espaces propres et que la somme de leurs dimensions égale $\dim(V_n) = n+1$). Puisqu'ils sont de dimension 1, il suffit d'un vecteur propre pour les engendrer, et comme on l'a vu plus haut g_k est un vecteur propre associé à $i(2k-n)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \ker(\varphi_n - i(2k-n)\,\mathrm{Id}_{V_n}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(g_k)$$

Problème 2 : extrait Centrale PC 2019

1) En remarquant que $T_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(E_{ij})_{i \leqslant j}$ et $T_n^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(E_{ij})_{i<j}$ on sait que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit de deux matrices triangulaires étant encore triangulaire, $T_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. De plus, si la diagonale de l'une des deux matrices triangulaires est nulle, la diagonale de la matrice produit le sera aussi. Donc $T_n^+(\mathbb{K})$ aussi est stable par produit.
Les ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Remarque : en revanche, si on prenait la définition d'algèbre donnée par le programme, qui demande de contenir le neutre pour la multiplication seule $T_n(\mathbb{K})$ serait une sous-algèbre.

2) L'ensemble $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car il n'est pas stable par produit. En effet, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais leur produit $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. L'ensemble $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre car $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. Les ensembles $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

3) Reprenons les contre-exemples de la question précédente. Les matrices $A' = \mathrm{Diag}(A, O_{k-2})$ et $B' = \mathrm{Diag}(B, O_{k-2})$ sont symétriques de taille k mais leur produit $A'B' = \mathrm{Diag}(AB, O_{k-2})$ ne l'est pas. La matrice $C' = \mathrm{Diag}(C, O_{k-2})$ est antisymétrique de taille k mais $C'^2 = \mathrm{Diag}\left(C^2, O_{n-2}\right)$ ne l'est pas. Les ensembles $S_k(\mathbb{K})$ et $A_k(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$

4) Posons $K := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(I_2, K)$ ce qui montre que $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus, $I_2^2 = I_2, I_2K = KI_2 = K$ et $K^2 = -I_2$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit puisque qu'un produit de vecteurs d'une famille génératrice reste dans $\Gamma(\mathbb{K})$. $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

5) Si $\Gamma(\mathbb{R})$ était diagonalisable tous ses éléments serait diagonalisables. En particulier, $K \in \Gamma(\mathbb{R})$ serait diagonalisable. Son polynôme caractéristique $\chi_K = X^2+1$ serait alors scindé sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est manifestement pas le cas. $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

6) Le polynôme $\chi_K = X^2+1 = (X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc K est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Soit $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $K = P\,\mathrm{Diag}(i,-i)P^{-1}$. Soit $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $M = aI_2 + bK$. Alors $M = P\left(aI_2 + b\,\mathrm{Diag}(i,-i)\right)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(a+ib, a-ib)P^{-1}$. Ceci est vrai pour tout $M \in \Gamma(\mathbb{C})$ donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

7) L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice J envoie e_i sur e_{i+1} et la matrice $J^2 e_i$ sur e_{i+2} où les indices sont pris modulo n. Donc pour $n \geq 3$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$, on a $J^2 = I_2$.

8) La matrice J^k est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme qui envoie e_i sur e_{i+k} toujours en prenant les indices modulo n. En particulier, J^n est la matrice identité. $J^n = I_n.J^k$ n'a que des 0 sauf sur la k-ième sous-diagonale et la $n-k$-ième sur-diagonale où il y a des 1.

9)
$$J(a_0,\dots,a_{n-1}) = \sum_0^{n-1} a_k J^k$$

10) D'après la question précédente, $\mathcal{A} = \operatorname{Vect}\left(J^0,\dots,J^{n-1}\right)$ donc la famille $\left(I_n,\dots,J^{n-1}\right)$ est génératrice de $\mathcal{A}$ (et $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel !). Montrons qu'elle est libre. Soient $a_0,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_0^{n-1} a_k J^k = 0$ i.e $J(a_0,\dots,a_{n-1}) = 0$. Étant donné la définition de $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ on a $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$. Donc la famille $\left(J^0,\dots,J^{n-1}\right)$ est libre et c'est une base de $\mathcal{A}$.

11) En fait, par n-périodicité de la suite des (J^k), $\mathcal{A} = \mathbb{R}[J]$ où $\mathbb{R}[J] = \{P(J) : P \in \mathbb{R}[X]\}$. L'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(P) = P(J)$ est un morphisme d'algèbre. De plus $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[J]$ ce qui montre directement que $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{R}$- algèbre.

12) On sait que $X^n - 1$ annule J et comme $(I, J, \dots, J^{n-1})$ est libre, on sait que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de J. Comme il est simplement scindé dans $\mathbb{C}$ de racines les $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ on sait que J est dz et que $\operatorname{Sp}(J) = \mathbb{U}_n$.

13) Il y a n valeurs propres donc elles sont toutes de multiplicité (géométrique et algébrique) 1. Notons $\omega = \exp(2i\pi/n)$. Alors $\dim E_{\omega^k}(J) = 1$ pour $k = 0,\dots,n-1$. Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Posons $X_k := \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors $JX_k = \begin{pmatrix} \omega^{-k(n-1)} \\ 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-2)} \end{pmatrix} = \omega^k X_k$. Donc X_k est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et (X_k) est une base de $E_{\omega^k}(J)$.

14) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PJP^{-1} = \operatorname{Diag}\left(1,\dots,\omega^{n-1}\right)$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $A = Q(J)$. Alors $PAP^{-1} = PQ(J)P^{-1} = Q\left(PJP^{-1}\right) = Q\left(\operatorname{Diag}\left(1,\dots,\omega^{n-1}\right)\right) = \operatorname{Diag}\left(Q(1),\dots,Q\left(\omega^{n-1}\right)\right)$ et la matrice PAP^{-1} est diagonale.

15) Pour tout $A \in \mathcal{A}, PAP^{-1}$ est diagonale. L'égalité $PQ(J)P^{-1}$ vient du fait que $PJ^kP^{-1} = \left(PJP^{-1}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, la matrice $J(a_0,\dots,a_{n-1}) = Q(J)$ est semblable à la matrice diagonale $D = \operatorname{Diag}\left(Q(1),\dots,Q\left(\omega^{n-1}\right)\right)$

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(Q(J)) = \left\{Q(1),\dots,Q\left(\omega^{n-1}\right)\right\}$$

16) Si $n = 1$, les matrices nilpotentes sont la matrice nulle qui est trigonalisable : elle est diagonale. Le résultat est vrai pour $n = 1$.

17) S'il n'existe aucun tel sous-espace vectoriel alors $\mathcal{A}$ est irréductible. Or E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ d'après le théorème de Burnside. En particulier, $\mathrm{id}_E \in \mathcal{A}$ mais id_E n'est pas nilpotent ce qui est contradictoire. Il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par les éléments de $\mathcal{A}$.

18) Soit W un supplémentaire de V dans V et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $V \oplus W = E$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où A est de taille $r \times r, B$ de taille $r \times s$ et D de taille $s \times s$. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.

19) Un calcul matriciel par blocs montre que $\begin{pmatrix} A(u+\lambda v) & B(u+\lambda v) \\ 0 & D(u+\lambda v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ 0 & D(v) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A(uv) & B(uv) \\ 0 & D(uv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u)A(v) & * \\ 0 & D(u)D(v) \end{pmatrix}$. Ceci montre que $\{A(u) : u \in \mathcal{A}\}$ est une partie non vide (car $\mathcal{A}$ est non vide) stable par combinaison linéaire

et stable par produit. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. De même pour $\{D(u) : u \in \mathcal{A}\}$. Les ensembles $\{A(u) : u \in \mathcal{A}\}$ et $\{D(u) : u \in \mathcal{A}\}$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ Soit $u \in \mathcal{A}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u^N = 0_n$. Un calcul matriciel par blocs montre que $u^N = \begin{pmatrix} A(u)^N & * \\ 0 & D(u)^N \end{pmatrix}$. Donc $A(u)^N = 0_r$ et $D(u)^N = 0_s$. Les éléments de $\{A(u) : u \in \mathcal{A}\}$ et $\{D(u) : u \in \mathcal{A}\}$ sont nilpotents.

20) Le sous-espace vectoriel V étant distinct de $\{0\}$ et de E, sa dimension r vérifie $1 \leqslant r \leqslant n-1$. De même pour s la dimension de W. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ et $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, les matrices $PA(u)P^{-1}$ et $QD(u)Q^{-1}$ sont triangulaires supérieures. Posons $T = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. Alors T est inversible d'inverse $T^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{A}$, $T \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) T^{-1} = \begin{pmatrix} PA(u)P^{-1} & * \\ 0 & QD(u)Q^{-1} \end{pmatrix} \in T_n(\mathbb{C})$. Donc l'algèbre $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Attention, le niveau des questions qui suive monte brutalement, surtout par le caractère moins habituel des raisonnements sur les « actions d'algèbres »

21) Posons $F := \{u(x) : u \in \mathcal{A}\}$.
Montrons que F est un s.e.v. stable par $\mathcal{A}$:
• Considérons le morphisme d'évaluation en x, $\mathrm{Eval}_x : \mathcal{A} \to E$ défini par $\mathrm{Eval}_x(u) := u(x)$. L'application Eval_x est linéaire et son image est exactement F ce qui prouve que F est un sous-espace vectoriel de E.
• Montrons F est stable par $\mathcal{A}$. Soit $z \in F$. Il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $z = u(x)$. Soit $v \in \mathcal{A}$ un élément quelconque. Alors $v(z) = (v \circ u)(x) \in \mathcal{A}$. D'où la stabilité.
Puisque $\mathcal{A}$ est irréductible, et que F est un s.e.v. stable par $\mathcal{A}$, $\boxed{\text{on sait que } F = \{0\} \text{ ou } F = E}$.
Par l'absurde, si $F = \{0\}$ alors $u(x) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{A}$. Dans ce cas,

$$x \in G := \cap_{u \in \mathcal{A}} \ker u.$$

Or G est encore un s.e.v. de E stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, car si $z \in G$ alors pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(z) = 0 \in G$.
Donc encore par irréductibilité de $\mathcal{A}$, on a $G = \{0\}$ ou $G = F$. Or $x \neq 0$ et $x \in G$ donc $G \neq \{0\}$ et donc $G = E$. Ainsi : $\ker(u) = E$ pour tout $u \in \mathcal{A}$ i.e $\mathcal{A} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$.
Or pour $n \geq 2$ l'algèbre $\mathcal{A} = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ n'est *pas irréductible* : il existe H un sous-espace vectoriel de E strict non réduit à $\{0\}$, qui est bien sûr stable par $\mathcal{A} = \{0\}$.
On a donc une *contradiction* avec l'irréductibilité de $\mathcal{A}$. Donc $F = E$ donc pour tout $y \in E$, Il existe donc $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

22) En suivant les indications données, notons r le rang de v. Puisque $r \geqslant 2$ il existe une famille libre à deux éléments de $\mathrm{Im}(v)$ qu'on peut noter $(v(x), v(y))$.
D'après la question précédente, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(v(x)) = y$.
D'autre part $(v \circ u)(\mathrm{Im}(v)) \subset \mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\, v$ donc on peut considérer l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}\, v$.
Tout endomorphisme admet au moins une valeur propre complexe en dimension finie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{g} := \tilde{f} - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\, v}$ soit non inversible, i.e. de rang $< r$.
En posant $g = \tilde{g} \ \circ v = v \ \circ u \circ v - \lambda v$, on a $\mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(\tilde{g}) < r = \mathrm{rg}(v)$.
Ouf, on vient de montrer le résultat de l'indication !

23) Rappelons que $\mathcal{A} \neq \{0\}$ car l'algèbre $\{0\}$ n'est pas irréductible dès que $n \geqslant 2$. Soit donc $v_0 \in \mathcal{A}$ non nul. Si rg $v_0 = 1$ c'est terminé. Si rg $v_0 \geqslant 2$ on construit alors $v_1 = v_0 \circ u \circ v_0 - \lambda v_0$ comme dans la question précédente. Alors v_1 est encore un élément de l'algèbre $\mathcal{A}$ et de plus, $1 \leqslant \mathrm{rg}\, v_1 \leqslant \mathrm{rg}\, v_0$. En itérant, on construit ainsi une suite d'éléments $v_0, v_1, v_2, \ldots$ de $\mathcal{A}$ de rangs strictement décroissants. Comme il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels, ce processus s'arrête à v_k de rang 1 . Il existe $v \in \mathcal{A}$ de rang 1

24) Posons $x = u_0(\varepsilon_1)$ qui est non nul puisque $\mathrm{rg}(u_0) = 1$ et que $\ker(u) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.
Donc d'après le 21), pour chaque $i = 2, \ldots, n$, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(x) = \varepsilon_i$. On pose alors $u_i := v_i \circ u_0$. D'une part, $u_i \in \mathcal{A}$. D'autre part, le noyau de u_i contient $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ donc u_i est de rang 0 ou 1 . De plus, $u_i(\varepsilon_1) = v_i(x) = \varepsilon_i$. Donc u_i est de rang 1 et vérifie bien $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$
Il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

25) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. D'après la question 21), il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $w_j(\varepsilon_j) = \varepsilon_1$. Posons $f_{ij} = u_i \circ w_j$. Alors $f_{ij}(\varepsilon_j) = \varepsilon_i$. De plus f_{ij} est de rang 1 donc $f_{ij}(\varepsilon_k) = 0$ si $k \neq j$. Donc la matrice de f_{ij} est la matrice élémentaire E_{ij}. Puisque $(E_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la famille $(f_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$. Donc l'algèbre $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$. Si E est un $\mathbb{C}$-ev alors la seule sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ est $\mathcal{L}(E)$.