MP 2 **Mardi 11 octobre 2022**

Devoir surveillé 2 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.), l'usage de stylos à encre effaçable et des blancs de correction sont interdits. Les couleurs autorisées sont le bleu et le noir, le rouge est toléré pour les encadrés. Encadrez ou soulignez vos résultats, **séparez clairement vos questions** , la clarté de votre présentation est un élément d'appréciation.

Problème 1 :

Etude en dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.
2) La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C}).$$

3) Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Etude de la matrice B_n

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

4) Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
5) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\to V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

   définit un endomorphisme de V_n et expliciter sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.
   Vérifiez que B_2 est la matrice B de la première partie.
6) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
7) En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in [\![0, n]\!], g_k \in V_n$.
8) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g'_k. En déduire que φ_n est diagonalisable.
   Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Problème 2

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On dit dans ce problème qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire tel que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. **Remarquer que contrairement à la définition donnée dans le programme, on ne demande pas ici que Id_E appartienne à $\mathcal{A}$.**

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est commutative si pour tous u et v dans $\mathcal{A}, u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite diagonalisable (respectivement trigonalisable) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout u de $\mathcal{A}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure)

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite commutative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}, AB = BA$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (respectivement trigonalisable) s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}, P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Un sous-espace vectoriel F de E est strict si F est différent de E.

On désigne par $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures. (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

Partie I : exemples de sous-algèbres

Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) Les sous-ensembles $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2) Les sous-ensembles $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
3) On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

4) Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
5) Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Partie II : Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dz dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$. Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Calcul des puissances de J

7) Préciser les matrices J et J^2. (On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$.)
8) Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
9) Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

Une base de $\mathcal{A}$

10) Montrer que $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{A}$
11) Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Diagonalisation de J :

12) Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer ses valeurs propres.
13) Déterminer les espaces propres associés.

Diagonalisation de l'algèbre $\mathcal{A}$

14) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.
15) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \ldots, a_{n-1})$?

Partie III Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie IV (peut-être à la maison !).

> **Définition :** On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.
> **Théorème de Burnside :** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{A}$ est irréductible alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ dont tous les éléments sont des endomorphismes nilpotents. On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

16) Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n-1$.

17) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

18) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}), B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$

19) Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{D(u) \mid u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.
20) Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Partie IV : Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie III On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

Recherche d'un élément de rang 1

21) Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$. On pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $F := \{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\}$.
22) Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}\, v.$$

Indication – Considérer x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}\, v$

23) En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

24) Montrer qu'il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
25) Conclure.