DM 5 : Topologie matricielle

Pour le lundi de la rentrée

Dans le problème, n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{C}^n$ est identifié à l'espace $M_{n,1}(\mathbb{C})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Les coefficients d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ sont notés $x_1, \dots, x_n$. Dans tout le problème, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\| \|_1$ définie par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Pour tous $x \in \mathbb{C}^n$ et $y \in \mathbb{C}^n$, la matrice ${}^t xy \in M_1(\mathbb{C})$ est identifiée au nombre complexe $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Une matrice $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont des réels positifs (resp. strictement positifs). Cette propriété est notée $M \geqslant 0$ (resp. $M > 0$).

Si A et B sont deux matrices de $M_{n,m}(\mathbb{R})$, on notera $A \geqslant B$ (resp. $A > B$) la propriété $A - B \geqslant 0$ (resp. $A - B > 0$). Ainsi, pour x et y dans $\mathbb{R}^n$,

$$x \geqslant y \iff \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \geqslant y_i.$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1 = 1} \|Mx\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}.$$

Une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ sera en général identifiée à l'endomorphisme φ_M de $\mathbb{C}^n$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$: pour $x \in \mathbb{C}^n, \varphi_M(x) = Mx$. On appelle spectre d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, et on note $Sp(M)$, l'ensemble des valeurs propres de M. Le rayon spectral de M, noté $\rho(M)$, est défini comme le maximum des modules des valeurs propres de M :

$$\rho(M) = \max\{|\lambda|; \lambda \in Sp(M)\}.$$

1 Première partie

1) a) Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ et tout nombre réel $C > 0$, montrer l'équivalence

$$\|M\| \leqslant C \iff \forall x \in \mathbb{C}^n, \|Mx\|_1 \leqslant C\|x\|_1.$$

   b) Montrer que l'application $M \longmapsto \|M\|$ est une $\mathbb{C}$-norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

Définition (sera dans le cours) Cette norme $\| \|$ sur $M_n(\mathbb{C})$ s'appelle *norme subordonnée* à la norme $\| \|_1$ sur $\mathbb{C}^n$ ou encore *norme d'opérateur* associée à à la norme $\| \|_1$.

Remarque : par définition, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Mx\|_1 \leq \|M\|.\|x\|_1$ et $\|M\|$ est le plus petit rapport de Lipschitz de $x \mapsto Mx$ dans $(\mathbb{C}^n, \| \|_1)$.

2) Montrer que la norme $\| \|$ ainsi définie est une norme d'algèbre i.e. :

$$\forall\ A, B \in M_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|.$$

3) Ecriture explicite de $\|A\|$ en fonctions des coefficients de A :
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A d'indice de ligne i et d'indice de colonne j. Posons $\mathrm{S(A)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathrm{A}x\|_1 \leqslant \mathrm{S(A)} \times \|x\|_1$

   b) Que déduire du a) sur le lien entre $S(A)$ et $\|A\|$?

c) En trouvant un vecteur x unitaire tel que $\|Ax\|_1 = S(A)$, montrer, mieux que :

$$\|A\| = S(A) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

4) On dit qu'une suite $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ converge vers une matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ lorsque

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], \lim_{k\to+\infty} (a_{i,j})^{(k)} = b_{i,j}.$$

Montrer que la suite $\left(A^{(k)}\right)$ converge vers B si et seulement si $\lim_{k\to+\infty} \left\|A^{(k)} - B\right\| = 0$.

5) On considère dans cette question une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On suppose que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| < 1.$$

Pour tout réel $b > 0$, on pose $P_b = \operatorname{diag}\left(1, b, b^2, \dots, b^{n-1}\right) \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $P_b^{-1} A P_b$. Que se passe-t-il lorsqu'on fait tendre b vers 0 ?

b) Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\left\|P_b^{-1} A P_b\right\| < 1.$$

c) Avec la multiplicativité de la norme, en déduire que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 .

2 Deuxième partie

6) Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7) Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A, B \in M_n(\mathbb{C}), \mu \in \mathbb{C}$.

i) $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$.

ii) $\rho(A + B) \leqslant \rho(A) + \rho(B)$

iii) $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.

iv) Pour $P \in M_n(\mathbb{C})$ inversible, $\rho\left(P^{-1}AP\right) = \rho(A)$.

v) $\rho\left({}^tA\right) = \rho(A)$.

8) Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

Dans les questions **9** à **11**, on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$.

9) Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 .

10) a) En considérant un vecteur propre x associé à une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \left\|A^k\right\| \geqslant \rho(A)^k.$$

b) On définit la partie de $\mathbb{R}_+$

$$E_A = \left\{\alpha > 0 \mid \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0\right\}.$$

Montrer que $E_A =]\,\rho(A), +\infty[$

11) a) Soit $\varepsilon > 0$. En considérant la suite des matrices $\left(\frac{\mathrm{A}}{\rho(\mathrm{A})+\varepsilon}\right)^k$, montrer qu'il existe un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant k_\varepsilon, \left\|\mathrm{A}^k\right\|^{1/k} \leqslant \rho(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

b) En déduire l'égalité :

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k} = \rho(A).$$

12) Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{i,j}$, on pose $A_+ = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, où $b_{i,j} = |a_{i,j}|$.
On note :

$$\mathrm{A}^k = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_+^k = \left(b_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n.}.$$

En comparant ces coefficients, montrer l'inégalité :

$$\rho(A) \leqslant \rho\left(A_+\right).$$

3 Troisième partie

Dans toute cette partie, A est une matrice strictement positive de $M_n(\mathbb{R})$.
On se propose de démontrer les propriétés suivantes :

(i) $\rho(A) > 0, \rho(A)$ est une valeur propre de A et toute autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A vérifie $|\lambda| < \rho(A)$

(ii) $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et $\ker\left(A - \rho(A)I_n\right)$ est engendré par un vecteur v_0 dont toutes les composantes sont strictement positives.

(iii) Si v est un vecteur propre de A dont toutes les composantes sont positives, alors $v \in \ker(A-\rho(A)I_n)$

13) Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Montrer que si

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$$

alors le vecteur $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$.

Indication – On fera une preuve soigneuse, par récurrence, de cette implication.

Fin de la partie « obligatoire »

14) Soient $x, y \in \mathbb{C}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \neq \mu$, alors on a l'implication suivante

$$\left(Ax = \lambda x \text{ et } {}^tAy = \mu y\right) \Longrightarrow {}^txy = 0.$$

15) On suppose qu'il existe un réel positif μ et un vecteur positif non nul w tels que $Aw \geqslant \mu w$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $k, A^k w \geqslant \mu^k w$. En déduire que $\rho(A) \geqslant \mu$.

b) Montrer que si $Aw > \mu w$, alors $\rho(A) > \mu$.

c) On suppose à présent que dans le système d'inégalités $Aw \geqslant \mu w$, la k-ième inégalité est stricte, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} w_j > \mu w_k.$$

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, en posant $w'_j = w_j$ si $j \neq k$ et $w'_k = w_k + \epsilon$, on a $Aw' > \mu w'$. En déduire que $\rho(A) > \mu$.

16) Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et soit $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ un vecteur propre de A associé à λ. On définit le vecteur positif non nul v_0 par $(v_0)_i = |x_i|$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

a) Montrer que $Av_0 \geqslant \rho(A) v_0$, puis que

$$Av_0 = \rho(A) v_0.$$

b) En déduire que $\rho(A) > 0$ et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], (v_0)_i > 0.$$

c) Montrer que x est colinéaire à v_0. En déduire que $\lambda = \rho(A)$.

La propriété (i) est démontrée.

17) En appliquant les résultats précédents à la matrice ${}^t A$, on obtient l'existence de $w_0 \in \mathbb{R}^n$, dont toutes les composantes sont strictement positives, tel que ${}^t A w_0 = \rho(A) w_0$. On pose

$$F = \left\{ x \in \mathbb{C}^n |\, {}^t x w_0 = 0 \right\}.$$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par φ_A, et que

$$\mathbb{C}^n = F \oplus \mathbb{C} v_0.$$

b) Montrer que si v est un vecteur propre de A associé à une valeur propre $\mu \neq \rho(A)$, alors $v \in F$. En déduire la propriété (iii).

18) On note ψ l'endomorphisme de F défini comme la restriction de φ_A à F. Montrer que toutes les valeurs propres de ψ sont de module strictement inférieur à $\rho(A)$. En déduire que $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique de A et que

$$\ker(A - \rho(A) I_n) = \mathbb{C} v_0.$$

La propriété (ii) est démontrée.