DM 4 : Réductions et semi-normes

Pour le vendredi 21 octobre

Partie I : réductions des matrices de trace nulles et au delà

1) Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie.
   a) Définir la trace d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.
   b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, si on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$, on ait $a_{1,1} = 0$.
   c) En déduire par récurrence que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\mathrm{Tr}(f) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ ait *toutes* ses entrées diagonales nulles.

2) Soit $D \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont distincts.
   Soit $\Phi \ : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto AD - DA$.
   a) Déterminer le noyau de Φ.
   b) Déterminer l'image de Φ.

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0 \Leftrightarrow \exists\, (M,N) \in M_n(\mathbb{K})^2,\ A = MN - NM$.

4) **Généralisation du résultat du 1)** : On se propose dans ce qui suit de démontrer la propriété suivante : pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ *qui n'est pas de la forme* λI_n et tout n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, il existe dans $M_n(\mathbb{K})$ une matrice A' semblable à A dont la diagonale principale est exactement $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
   N.B. *Ce résultat redonne en particulier le résultat du 1) selon lequel toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.*
   a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas de la forme λI_n. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque.
   Montrer que A est semblable à une matrice $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & B_1 \end{pmatrix}$ où $L \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $B_1 \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \end{pmatrix}^\top$.
   b) On suppose que $n \geq 3$ et que la matrice B_1 de la question précédente est une *matrice scalaire* c'est-à-dire de la forme $B_1 = \lambda I_{n-1}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.
   En considérant une matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & W \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ bien choisie, démontrer que A est semblable à une matrice de la forme $A_1' = \begin{pmatrix} \alpha & L' \\ C' & B_1' \end{pmatrix}$ où B_1' n'est pas une matrice scalaire.
   c) Conclure.

5) **Une application du résultat précédent**
   a) Soit $M \in M_n(K)$, une matrice qui est une somme (finie) de matrice de projecteurs. Montrer que $\mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(M) \geq \mathrm{rg}(M)$.
   b) Le but de ce qui suit est de démontrer la réciproque du résultat du a). Soit donc $M \in M_n(K)$ telle que $\mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(M) \geq \mathrm{rg}(M)$. On note $r = \mathrm{rg}(M)$ et on suppose que $r \geq 1$, le cas $r = 0$ étant trivial.
      i) Montrer que M est semblable à une matrice par bloc $M' = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix}$ avec M_1 carré de taille $r \times r$.
      ii) On suppose ici que M_1 n'est pas une matrice scalaire. Montrer qu'on peut se ramener au cas où M_1 a une diagonale $(t_1, \dots, t_r)$ avec $t_1, \dots, t_r$ entiers naturels et conclure que M est bien une somme finie de matrices de projecteurs.
      iii) Montrer que le résultat précédent est encore vrai si $M_1 = I_r$.
      iv) Traiter enfin le cas où $M_1 = aI_r$.

Partie II : études des semi-normes

Une semi-norme sur un $\mathbb{K}$-e.v. E (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une application $S : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$telle que :

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, S(\lambda x) = |\lambda| S(x) \quad \text{et} \quad \forall(x, y) \in E^2, S(x+y) \leqslant S(x) + S(y).$$

1) Exemples :
   a) Soit $E = \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R})$ et $S : E \to \mathbb{R}^+$, $f \mapsto N(f) = \displaystyle\int_a^b |f|$. Montrer que S est une semi-norme. Justifier que S n'est pas une norme.
   b) Soit $E = \mathscr{V}(\Omega, \mathbb{R})$ l'e.v. des variables aléatoires réelles d'un espace probabilisé fini (Ω, P) c'est-à-dire des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour chaque v.a. X, on considère $S(X) = (\mathbb{E}(X^2))^{1/2}$ où $\mathbb{E}$ est l'espérance. Montrer que S est une semi-norme mais pas une norme.
   c) Soient u une application linaire de E dans un $\mathbb{K}$-e.v. F et N une norme sur F. Montrer que $N \circ u$ est une semi-norme sur E. À quelle condition est-ce une norme ?
2) a) Soient N et S une norme et une semi-norme sur E. Montrer que $N + S$ est une norme.
   b) (5/2 ou après le cours sur la continuité) En déduire que si E est de dimension finie, toutes les semi-normes sur E sont continues.
3) Pour toute semi-norme S sur E on pose $V_S = \{x \in E; S(x) = 0\}$.
   a) Montrer que V_S est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Montrer : $\forall(x, y) \in E \times V_S, S(x+y) = S(x)$.

   Soit n un entier supérieur ou égal à 2 . Une application f définie sur $M_n(\mathbb{K})$ est dite invariante par similitude si :

$$\forall(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, A \text{ et } B \text{ semblables} \implies f(A) = f(B).$$

   Dans la suite du problème, on étudie les normes et les semi-normes sur $M_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude.
4) On suppose qu'il existe une norme N sur $M_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude.
   a) Montrer : $\forall(A, P) \in M_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), N(AP) = N(PA)$.
   b) (5/2 ou après le cours que le cours de Topo soit plus avancé).
      Montrer : $\forall(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, N(AB) = N(BA)$.
   c) En déduire une contradiction.
5) On suppose maintenant que S est une semi-norme sur $M_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude.
   a) Montrer : $\forall(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, S(AB) = S(BA)$.
   b) Montrer que pour i et j distincts dans $[\![1, n]\!]$, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ appartient V_S.
   c) Montrer que toutes les matrices de trace nulle appartiennent V_S.
   d) Montrer : $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), S(A) = \frac{S(I_n)}{n} |\operatorname{tr} A|$
6) Donner toutes les semi-normes sur $M_n(\mathbb{K})$ invariantes par similitude.