DM 3 : Plusieurs aspects de la réduction de Jordan

Pour le lundi 10 Octobre

Introduction : On appelle *matrice de Jordan* de taille r : $J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_r(K)$

A l'issue de ce problème et du cours sur la réduction vous saurez prouver le :

> **Théorème de réduction de Jordan :** toute matrice complexe M est semblable à une matrice de la forme :
>
> $$\begin{pmatrix} \lambda_1 I + J_{r_1} & O & \dots & O \\ O & \lambda_2 I + J_{r_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & \lambda_t I + J_{r_t} \end{pmatrix},$$
>
> où $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ sont les *valeurs propres* de M dans $\mathbb{C}$ (*répétées possiblement plusieurs fois*) et chacun des O apparaissant dans cette matrice étant une matrice nulle de taille appropriée.

Cette forme réduite est très utile pour les applications du calcul matriciel : les puissances de matrices, des exponentielles de matrices si utiles pour la théorie des équations différentielles, de la détermination de l'ensemble des matrices qui commutent à M, des racines carrées de M etc.

Une moitié du travail nécessaire pour démontrer le théorème 1 est donnée par le cas particulier des matrices nilpotentes, que nous allons préciser dans le théorème 2 qui suit L'autre moitié viendra de résultats standard de notre cours sur la réduction des matrices complexes. En revanche le théorème 2 n'est pas un résultat de cours, même en deuxième année. A fortiori le théorème 1 ne l'est donc pas non plus bien sûr.. Ce théorème 2 a en outre l'immense intérêt d'être vrai sur un corps K quelconque.

> **Théorème 2 (celui qu'on va démontrer dans ce problème) :** soit K un corps quelconque et $N \in M_n(K)$ une matrice *nilpotente*. Alors N est semblable à une matrice diagonale-par-blocs où les blocs diagonaux sont des matrices de Jordan, i.e. à une matrice de la forme :
>
> $$\begin{pmatrix} J_{r_1} & O & \dots & O \\ O & J_{r_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & J_{r_s} \end{pmatrix},$$
>
> chacun des O apparaissant dans cette matrice étant une matrice nulle de taille appropriée.

> **Le but de ce problème est d'étudier deux démonstrations de ce théorème 2. Les parties 1) et 2) sont indépendantes. La partie 0) est utile pour les 1) et 2). La partie 3, qui montre un résultat d'unicité, est indépendante des parties précédentes.**

Commençons par reformuler géométriquement :

> **Théorème 2 (reformulation)** Soit K un corps quelconque, E un K-e.v. de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.
> Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est $\operatorname{diag}(J_{r_1}, \dots, J_{r_s})$, où chaque J_k est une matrice de Jordan.

0) **Le point de départ et l'idée commune à plusieurs méthodes :**
Soit E un K-e.v. de dim. finie n et $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ un endomorphisme nilpotent d'indice r : ainsi $r \geq 2$, $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est libre.

b) Justifier que $V = \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{r-1}(x))$ est stable par u.

c) Expliciter la matrice de $u_{|V}$ dans la base $\mathcal{B}_x = (u^{r-1}(x), u^{r-2}(x), \ldots, u(x), x)$ de V.

d) En déduire le théorème 2 dans le cas particulier où $r = n$.

e) On suppose maintenant que $r < n$. Justifier que si on sait montrer qu'un tel s.e.v. V admet dans E un supplémentaire W stable par u alors on peut facilement en déduire le théorème 2 ci-dessus par récurrence.

1) **Méthode 1 : un projecteur magique pour fabriquer le supplémentaire stable**
N.B. On garde toutes les notations du 0), notamment sur le vecteur x fixé au 0).

a) Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \to K$ telle que :

$$\varphi(u^{r-1}(x)) = 1, \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [\![0, r-2]\!],\ \varphi(u^j(x)) = 0.$$

b) On définit l'endomorphisme v de E par : $\forall\, y \in E,\ v(y) = \varphi(y).x$. Quel est le rang de v ?

c) On pose (c'est le vrai héros de cette méthode) :

$$p = \sum_{k=0}^{r-1} u^k \circ v \circ u^{r-1-k} \in \mathcal{L}(E).$$

Montrer que $p_{|V}$ est l'identité de V.

d) Montrer que $\mathrm{Im}\, p \subset V$,

e) en déduire que p est un projecteur d'image V.

f) Montrer que p et u commutent,

g) en déduire un s.e.v. W de E, supplémentaire de V, stable par u. D'après le 0) e), ceci suffit à établir le théorème 2.

2) **Méthode 2 : par calcul matriciel par blocs**
Soit $N \in M_n(K)$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence r. Comme vu au 0), on sait déjà démontrer le théorème 2 pour N si $r = n$. On suppose donc que $1 < r < n$.

a) Montrer qu'il existe $B \in M_{r,n-r}(K)$ et $C \in M_{n-r,n-r}(K)$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_r & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $M_{n-r,r}(K)$.

Pour tout $X \in M_{r,n-r}(K)$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ \hline O & I_{n-r} \end{array}\right) \in M_n(K)$$

b) Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse.

c) Vérifier que la matrice A' définie par $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_r & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in M_{r,n-r}(K)$ et $Z \in M_{n-r,n-r}(K)$.

d) (1) Soit $X \in M_{r,n-r}(K)$, qu'on écrit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$ où X_i est la i-ième ligne de X. Exprimer le produit $J_r X$ en fonction de $X_1, \ldots, X_r$.

(2) Montrer alors que dans l'écriture de A' de la question c) précédente, on peut choisir $X \in M_{r,n-r}(K)$ de telle sorte que toutes lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles.

Indication – On décomposera non seulement la matrice X mais les matrices Y et B en blocs lignes c'est-à-dire sous la forme $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix}$ et on traduira la relation trouvée au c) entre Y, X, B, C sur ces lignes.

e) Justifier que A' est nilpotente d'indice r.

f) En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question d) (ii) précédente, la matrice Y est nulle. Pourquoi cela suffit-il à démontrer le théorème 2 ?

3) **Démonstration de l'unicité de la forme réduite :**

On montre ici que pour une matrice nilpotente N fixée, la matrice donnée par le théorème 2 est unique si l'on impose la condition $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$. (Sinon toutes les formes permutées sont possibles par permutation des vecteurs de base).

On introduit pour cela, une nouvelle notation pour le théorème 2. On traduit ce théorème en disant que N est semblable à une matrice qu'on va noter ici $J(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1)$ qui est *diagonale par blocs* et contenant t_k blocs diagonaux de la forme J_k (bien sûr les t_k peuvent être nuls), en ordonnant les blocs suivants les tailles décroissantes.

Attention, t_k est un nombre de blocs de taille k, pas une taille de bloc. Par exemple pour $n = 5$, $J(0,0,1,1,0)$ sera formée d'un bloc J_3 et d'un bloc J_2 autrement dit :

$$J(0,0,1,1,0) = \begin{pmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

De même, pour $n = 8$,

$$J(0,0,0,0,0,2,1,0) = \begin{pmatrix} J_3 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

Le but de cette partie est de montrer que si deux matrices $J(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1)$ et $J(t'_n, \ldots, t'_1)$ sont semblables, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $t'_k = t_k$, c'est-à-dire de démontrer l'unicité de la réduite de Jordan d'une matrice nilpotente.

Pour cela, on va exprimer les t_k en fonction de la suite des $\mathrm{rg}(N^q)$ pour $q \in \mathbb{N}$.

a) Notons pour tout $q \in \mathbb{N}$, $r_q = \mathrm{rg}(N^q)$. Montrer que $r_q = \sum_{s=q}^{n} (s-q)t_s$.

b) Calculer alors pour tout $q \geq 1$, $r_{q-1} - r_q$ puis en déduire pour chaque $q \geq 2$, une expression de chaque t_{q-1} seulement en fonction de r_{q-2}, r_{q-1}, r_q.

c) Conclure.

4) **Pour les 5/2 :** déduire le théorème 1 du théorème 2 et d'un théorème du cours sur la réduction.

Ouverture : Cette dernière partie commence à faire voir le lien entre réduction de Jordan et suite des noyaux/images itérées. On peut en fait (**méthode 3**) obtenir l'existence de la décomposition de Jordan à partir de la suite des noyaux itérés.