Chap. R0 : Compléments d'algèbre linéaire

I Sommes et sommes directes de plusieurs sous-espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit E un K-e.v. et $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v. de E.

1) La somme :

a) Déf. de la somme de n sous-espaces vectoriels

On dit que $F = F_1 + \cdots + F_n$ si, et seulement, si

$$\forall\, f \in E, \quad f \in F \Leftrightarrow \exists\,(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ f = \sum_{i=1}^{n} f_i \quad (*)$$

On note aussi $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.

b) Propriété

Avec les notations précédentes :

$F_1 + \cdots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E. Mieux, c'est le plus petit s.e.v. de E contenant $F_1, \dots, F_n$ i.e. le s.e.v. engendré par $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$.

2) Somme directe :

a) Définition de la somme directe de n s.e.v

Avec les notations précédentes :

On dit que $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \oplus_{i=1}^{n} F_i$ si, et seulement, si

$$\begin{cases} F = F_1 + \cdots + F_n \quad \text{et} \\ \text{pour chaque } f \in F, \text{ la décomposition}(*) \quad \text{ci-dessus est } \textit{unique}. \end{cases}$$

Terminologie : on dit que $F_1, \dots, F_n$ sont *en somme directe* ssi $\sum_{i=1}^{n} F_i = \oplus_{i=1}^{n} F_i$.

Exemple : si chaque F_i est une droite vectorielle $F_i = \mathrm{Vect}(f_i)$ alors $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si, et seulement si, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est

b) Caractérisation commode en se ramenant à 0

Avec les notations précédentes :

Les s.e.v. $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si, et seulement si :

$$\forall\,(f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ f_1 + \cdots + f_n = 0 \Rightarrow f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$$

c) Attention aux caractérisations par l'intersection

- Cas particulier de deux s.e.v. (1ère année :) F_1 et F_2 sont en somme directe si, et seulement si, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
- Par associativité : $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe ssi $\begin{cases} F_1, \dots, F_{n-1} \quad \text{sont en somme directe,} \\ \text{et} \quad F_n \cap (\oplus_{i=1}^{n-1} F_i) = \{0\} \end{cases}$.

N.B. Pour $n = 3$ déjà, la condition $F_3 \cap (F_1 \oplus F_2) = \{0\}$ est beaucoup plus forte que « intersections deux à deux réduites à 0 ».

d) Cas des sous-espaces vectoriels de dimension finie : caractérisation par la dim.

> Propriété : La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe si, et seulement si, $\dim(\sum_{i=1}^{n} F_i) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

e) Projecteurs associés à une décomposition d'un e.v. en somme directe

(i) **Définition :** Si $E = \oplus_{i=1}^{n} F_i$, on définit les projecteurs $p_1, \dots, p_n$ *associés à cette décomposition* par

$$\forall\, i = 1, \dots, n, \quad p_i \,:\, f \in E \mapsto f_i \in F_i$$

avec bien sûr $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ l'unique décomposition de f selon les F_i.

(ii) On a bien sûr alors les propriétés :

- $p_1 + \dots + p_n =$
- $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $p_i \circ p_j =$

3) Définition d'une application linéaire par ses restrictions aux s.e.v. d'une décomposition en somme directe

> Très pratique pour définir une A.L.

> **Propriété :** Si $E = \oplus_{i=1}^{n} F_i$ et pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(F_i, F)$ alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u_{|F_i} = u_i$.

Exemple simple : si $E = F_1 \oplus F_2$ on définit une application linéaire u unique en posant $u_{|F_1} = \mathrm{id}_{F_1}$ et $u_{|F_2} = 0$. Par déf. u est ....

4) Traduction matricielle, matrices par blocs

a) Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de E et si F est un autre s.e.v. avec une base $\mathcal{C}$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

avec $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}_i}(u)$.

b) Si en outre on $F = F_1 \oplus F_2$ et $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sont des bases resp. de F_1, F_2 alors en notant p_1, p_2 les deux projecteurs de F associé à la décomposition $F = F_1 \oplus F_2$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{B}_1}(p_1 \circ u_{|E_1})$, $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}(p_2 \circ u_{|E_1})$. $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(p_1 \circ u_{|E_2})$. $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2}(p_2 \circ u_{|E_2})$.

II Calcul Matriciel et déterminants par blocs

1) Formule du produit par bloc

On peut à l'intérieur d'une matrice, considérer des "blocs" et sous certaines conditions exprimer le produit de deux matrices à l'aide du produit de blocs. Précisément : soient $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ où A, B, C, D et A', B', C', D' sont aussi des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :

— Le nombre de colonnes de A et de C (qui est le même vu l'écriture "par bloc") est égal au nombre de lignes de A' et B'

— Le nombre de colonnes de B et de D est égal au nombre de lignes de C' et D'.

Autrement dit pour être complètement précis : $A \in M_{m_1,n_1}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m_2,n_1}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m_1,n_2}(\mathbb{K})$, $D \in M_{m_2,n_2}(\mathbb{K})$ et $A' \in M_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B' \in M_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C' \in M_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D' \in M_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$.

Donner alors la forme explicite du produit $M \times N$ en fonction de $A, B, C, D, A', B', C', D'$.

Deux démonstrations en appendice : l'une avec la formule du produit matriciel, l'autre avec l'interprétation des blocs que matrices de restrictions-projections donnée à la fin du § I.

2) Exemple d'opérations sur les blocs

Exercice : Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ et M la matrice par bloc $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.

a) Exprimer le rang de M en fonction de A et B.
b) Dans le cas où M est inversible, expliciter M^{-1}.

3) Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par bloc

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A \in M_k(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$ et en conséquence, $B \in M_{k,n-k}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det M = \det A . \det C.$$

Indication pour deux méthodes de preuve :

(M1) Avec l'expression combinatoire du déterminant :

a) Montrer que, dans l'expression combinatoire du déterminant, on peut ne considérer que les σ tels que $\sigma([\![1,k]\!]) = [\![1,k]\!]$.

b) Montrer que si σ vérifie la condition du a) et $\sigma_1 = \sigma_{|[\![1,k]\!]}$ et $\sigma_2 = \sigma_{|[\![k+1,n]\!]}$, on a $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$,

c) Conclure.

(M2) avec une décomposition astucieuse : on remarque d'abord que la matrice M peut se décomposer suivant le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

(La première matrice $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une « matrice de dilatation par bloc »)

Qu'y gagne-t-on ?

Démonstration du résultat sur les matrices par blocs

Méthode 1 – Ce résultat se voit simplement sur la définition du produit de matrice.

on obtient $M \times N = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.

En effet, pour $i \leq m_1$ et $j \leq p_1$, on a : $(M \times N)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_1+n_2} M_{i,k} N_{k,j} = \sum_{k=1}^{n_1} M_{i,k} N_{k,j} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} M_{i,k} N_{k,j}$.

Or pour $i \leq m_1$ et $k \leq n_1$, $M_{i,k} = A_{i,k}$ et $N_{k,j} = A'_{k,j}$ pour $j \leq p_1$.

Pour $i \leq m_1$ et $k \in [\![n_1 + 1, n_1 + n_2]\!]$, $M_{i,k} = B_{i,k-n_1}$ et pour $j \leq p_1$ $N_{k,j} = C'_{k-n_1,j}$.

Donc $(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_1} A_{i,k} A'_{k,j} + \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} B_{i,k-n_1} C'_{k-n_1,j} = (AA')_{i,j} + (BC')_{i,j}$ d'où l'égalité pour le premier bloc. De même pour les autres blocs. □

Méthode 2 — Il est aussi instructif de pouvoir rédiger ceci *géométriquement.*

On note $p = p_1 + p_2$, $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2$.

On considère les A.L. g (resp. f) can. assoc. à M (resp. N).

On notera $M = \mathrm{Mat}(g)$ et $N = \mathrm{Mat}(f)$ en omettant la mention des bases *canoniques* des $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p$ resp.

On considère la décomposition $\mathbb{K}^p = E_1 \oplus E_2$ de l'espace de départ de f où E_1 est formé des p_1 premiers vecteurs de la base canonique et E_2 des p_2 suivants.

On considère de même les décompositions $\mathbb{K}^n = F_1 \oplus F_2$ et $\mathbb{K}^m = G_1 \oplus G_2$ avec les mêmes conventions. On considère enfin r_1 le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2 et r_2 le projecteur sur F_2 parallèlement à F_1. Enfin π_1 (resp. π_2) le projecteur sur G_1 (resp. G_2) parallèlement à G_2 (resp. G_1). (Ouf!)

On écrit $M \times N = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(g \circ f)$ où $A'' = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ (g \circ f)_{|E_1})$ est une matrice $m_1 \times p_1$.

Alors $f_{|E_1} = r_1 \circ f_{|E_1} + r_2 \circ f_{|E_1}$.

Et $\pi_1 \circ g \circ f_{|E_1} = \pi_1 \circ g \circ r_1 \circ f_{|E_1} + \pi_1 \circ g \circ r_2 \circ f_{|E_1}$.

Donc $A'' = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g \circ f_{|E_1}) = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g \circ r_1 \circ f_{|E_1}) + \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g \circ r_2 \circ f_{|E_1})$.

Mais en notant $g_1 = g_{|F_1}$, on sait que $g \circ r_1 = g_1 \circ r_1$.

De même en notant $g_2 = g_{|F_2}$), on sait que $g \circ r_2 = g_2 \circ r_2$.

Autrement dit $A'' = \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g_1) \times \mathrm{Mat}(r_1 \circ f_{|E_1}) + \mathrm{Mat}(\pi_1 \circ g_2) \times (r_2 \circ f_{|E_1})$. (Toutes ces matrices étant entendues relativement aux bases canoniques).

On conclut bien que $A'' = A \times A' + B \times C'$. De même pour les trois autres blocs. □