Banque CCINP : Ex 1, 5 (cf. ex. ci-dessous) et Ex. 6,7.

Séries à t.g. de signe constant ou ACV

Exercice 1 (Séries de Bertrand)**.** a) Banque CCINP Ex 5 : Etudier la série de t.g. $1/(n\ln^{\beta}(n))$ par comparaison avec une intégrale.

b) Généralisation : Nature, suivant $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$.

Exercice 2. Nature de $\sum u_n$ pour :

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$,

b) $u_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$.

Exercice 3. Nature de la série de terme général : $u_n = n^{-\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$.

Exercice 4. Etudier les séries de termes généraux :

a) $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n+a}\right)^{n}$, ou $a>0$.

b) $w_n = \left(\arccos(\dfrac{n}{n+1})\right)^{\alpha}$ où $\alpha>0$.

Exercice 5. a) A savoir faire comme du cours :

Soit $\alpha>1$. Déterminer un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$. a) Soit $\alpha>1$. Donner un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^{\alpha}}$ quand $n\to+\infty$ (série de Riemann).

b) Obtenir un deuxième terme pour le D.A. de R_n.

Exercice 6. Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\sin(\theta/k)$, où $\theta\in\mathbb{R}^+$ est fixé.

Exercice 7. Soit $a>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $u_n = a^{1+1/2+\cdots+1/n}$.

Etudier la nature de la série de terme général u_n

Exercice 8. Nature suivant $\alpha>0$ de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln^2(k)$.

Exercice 9 (Série convergeant vite : Mines-Ponts 2021)**.**

Soit $f : [1,+\infty[\to\mathbb{R}_*^+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

a) Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.

b) Donner un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} f(k)$ quand $n\to+\infty$.

Séries à t.g. de signe variable

Exercice 10 (CCINP MP 2017)**.** Pour tout $n\geq 2$, on pose $U_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

L'énoncé faisait admettre que $|\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| = -\ln(1+\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{\sqrt{2k}\sqrt{2k+1}})$. Vérifiez-le.

a) La série $\sum\ln(U_n)$ est-elle à signe alternée ?

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq 1/2$. En déduire que :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ |\ln(U_{2k+1})| - |\ln(U_{2k})| > 0$$

c) La série $\sum\ln(U_n)$ vérifie-t-elle les conditions du théorème de convergence des séries alternées ?

d) Etudier la convergence de $\sum\ln(U_n)$ à l'aide d'un D.L. à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$.

Exercice 11. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Etudier la suite (u_n) quand $n\to+\infty$.

b)Soit $\alpha>0$ et $k\in\mathbb{R}^*$. Etudier la nature de la série de t.g. $u_n = \sin(\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}+\dfrac{k}{n^{5\alpha}})$.

Lien suite/série

Exercice 12. a) Etudier la convergence de la *suite* (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \exp(\frac{1}{n+k}) - n$$

Indication – On pourra considérer $u_{n+1} - u_n$.

b) Démontrer que $\forall\, x\ \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2} e^x$.

c) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Exercice 13. Soit $\alpha > 0$ et (u_n) définie par $u_1 > 0$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

CNS sur α pour que (u_n) CV.

Exercice 14 (Suites récurrentes, équivalent en un point fixe attractif)**.** Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ ayant un D.L. en 0 de la forme $f(x) = \alpha x + \beta x^r + o(x^r)$ avec $|\alpha| \in]0,1[$, $\beta \neq 0$ et $r > 1$ (on suppose ici r entier puisqu'il s'agit d'un D.L.).

a) Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 inclus dans V, stable par f et tel que si on prend $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on ait $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $\alpha_1 > |\alpha|$, $u_n = O(\alpha_1^n)$.

b) Montrer, avec les notations du a), qu'on a, mieux, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma\alpha^n$ où $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Indication – Pour montrer la convergence de (u_n/α^n) vers une limite finie non nulle, on gagnera à considérer celle de son logarithmique (ou plutôt de $\ln(|v_n|$ en justifiant d'abord que (v_n) est de signe constant A.P.C.R) , et on utilisera le lien suite/série.

Calculs de sommes :

Exercice 15. Soit $u_n = \dfrac{2n-1}{n^3 - 4n}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 16. a) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 17. Pour tout $n \in\ \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Calculer la limite quand $n \to +\infty$, de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 18 (Avec le D.A. de H_n)**.** a) Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ où γ est une constante réelle.

b) Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 19. Convergence et somme de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n}(\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)$. Indication : si n et $n+1$ sont dans le même intervalle $[\![\ldots[\![$ alors $u_n = \ldots$.

Problèmes de sommations par paquets

Exercice 20 (Sommation par paquets tendant vers zéro pour un série convergente de signe qcq)**.** Soit $\sum u_n$ une série et $q_0 < q_1 < \cdots < q_n < \ldots$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. Pour tout $n \in\ \mathbb{N}$, on note $w_n = \displaystyle\sum_{k=q_n}^{q_{n+1}-1} u_k$ le n-ième *paquet* de $\sum u_n$ associé.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge alors la série des paquets, $\sum w_n$ est convergente.

b) Montrer sur un exemple que la récip. est fausse.

c) Montrer en revanche que la récip. est vraie si on suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que l'effectif des paquets est majorée indépendamment de n, i.e. $\exists\, M > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} - q_n < M$.

N.B. En particulier le résultat du c) s'applique avec des paquets d'effectif fixe (paquets de deux, de trois etc), l'hyp. clef étant alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 21 (Calcul avec des par paquets finis simples sur des séries de Riemann)**.** a) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 22 (Des paquets de deux pour se ramener à des S.T.P. : très fréquent Mines-Ponts)**.** Montrer que la série de terme général $R_n = \sum_{k \geq n+1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

CV non commutative et commutatives

Exercice 23. A partir de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on forme une nouvelle série, en écrivant les termes dans l'ordre suivant : p termes positifs, q termes négatifs, p termes positifs, etc, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ fixés, l'ordre relatif des termes positifs n'est pas changé, ni celui des termes négatifs. Montrer que la série obtenue converge alors vers $\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

Exercice 24. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ est convergente.

Suites doubles (familles sommables)

Exercice 25. A quelle condition nécessaire et suffisante sur le réel α la série double $\sum_{p,q \geq 1} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}$ converge-t-elle ?

Exercice 26. Montrer la convergence et la somme de la série de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exercice 27 (Variante plus simple !)**.** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = e \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}.$$

I.P.P. discrète pour les séries semi-convergentes

Exercice 28 (Séries semi-convergentes dont on montre la CV grâce à une IPP discrète, comparer au I1)**.** On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et une suite complexe $(v_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})V_k + u_n V_n$$

(formule d'I.P.P. discrète, appelée transformation d'Abel : pourquoi parle-t-on d'I.P.P. discrète ?)

Indication – Pour aller de gauche à droite, on pourra remarquer qu'en posant $V_{-1} = 0$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = V_k - V_{k-1}$.

b) En déduire le théorème d'Abel (H.P.) suivant : si (V_n) est bornée, et la suite (u_n) est décroissante, tendant vers 0, alors $\sum u_k v_k$ converge.

c) A l'aide du b) démontrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum \frac{\sin(kx)}{k}$ et $\sum \frac{\cos(kx)}{k}$ convergent. ou encore pour que pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ $\sum \frac{z^n}{n}$ converge.

Quel résultat retrouve-t-on si $z = -1$?

Lien avec la physique : les fonctions $f : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\omega t)}{k}$ et $g : t \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\omega t)}{k}$ sont écrites sous forme des *développements en série trigonométrique.*

On peut montrer que $f(t) = \frac{\pi - \omega t}{2}$ et $g(t) = -\ln(2\sin(\omega t/2))$ et que les séries précédentes sont les *développement de Fourier* de f et g.