

Banque CCINP : Ex 59, 60, 62 (sauf 2.a), 63. a, b, 64

**E.v. familles libres, génératrices, bases, supplémentaires, dimension**

**Exercice 1.** Soit  $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ .  
Montrer que  $F$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Exercice 2.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille libre de  $E$  et  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de scalaires. On pose  $s = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ .

Donner une C.N.S. sur la famille  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  pour que la famille  $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$  soit libre.

**Exercice 3.** a) On considère les trois fonctions suivantes :  $f_0 : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1, f_1 : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x), f_2 : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(1/x)$ .

La famille  $(f_0, f_1, f_2)$  est elle libre ou liée dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  ?

b) Même question en considérant les fonctions de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  définies par les mêmes formules, ces fonctions étant alors des éléments de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ .

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in [0, n]$ , on note  $f_k : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\ln(x))^k$ . La famille  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est-elle libre dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  ?

**Exercice 4.** Soit  $F$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^4$  tels que 
$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Trouver la dimension et une base de  $F$ .

**Exercice 5** (source ENAC). Soient  $H$  et  $K$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $K$  et  $a \in H$ . Justifier si chacune des quatre affirmations suivantes est vrai ou fausse.

- a)  $\dim(\text{Vect}(e_1 + a, e_2 + a, \dots, e_k + a)) < k$ .
- b)  $\text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)$  est un supplémentaire de  $H$ .
- c)  $\text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a) = K$ .
- d) On peut montrer ici que tout sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins deux supplémentaires distincts.

**Exercice 6.** Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Soit  $F = \mathbb{R}_1[x]$  et  $G = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$ .

- a) Montrer que  $G$  est un s.e.v. de  $E$ .
- b) Montrer que  $F \oplus G = E$ .

**Exercice 7** (Codimension). Oral Centrale 1, Q1, 2022 : Soit  $E$  un  $K$ -e.v. de dimension infinie et  $F$  un s.e.v. de  $E$  tel qu'il existe un supplémentaire  $G$  de  $F$  de dimension  $d$ .

Montrer que pour tout  $G'$  s.e.v. de  $E$  tel que  $F \oplus G = F \oplus G' = E$  on a  $\dim G = \dim G'$ .

Cette valeur commune de la dimension de tous les supplémentaires de  $F$  s'appelle *codimension* de  $F$ .

*Indication (non donnée à l'oral) :* on pourra considérer le projecteur  $\pi$  sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

**Applications linéaires**

**Exercice 8** (Projecteurs). Soient  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $g \circ f = g$  et  $f \circ g = f$
- b)  $f$  et  $g$  sont deux projecteurs de même direction de projection i.e. de même noyau.

**Exercice 9** (Incontournable : La suite des dimension des images diminue de moins en moins vite). Soit  $E$  un  $K$ -e.v. de dim. finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

En considérant pour chaque  $p \in \mathbb{N}, f_{|\text{Im } f^p} : \text{Im } f^p \rightarrow \text{Im } f^{p+1}$ , montrer que la suite des  $\dim(\text{Im } f^p) - \dim(\text{Im } f^{p+1})$  est décroissante.

**Exercice 10.** Soit  $E$  un  $K$ -e.v. de dim. finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\ker f + \ker g = \text{Im } f + \text{Im } g = E$ .

Montrer que les deux sommes sont directes.

**Exercice 11.** Donner par sa matrice un exemple de  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  tel que  $\ker f \not\subset \text{Im } f, \text{Im } f \not\subset \ker f$  et  $\ker f$  et  $\text{Im } f$  ne soient pas supplémentaires.

### Calcul matriciel et calculs par blocs

**Exercice 12** (Incontournable H.P. mais à connaître!). Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\forall i \in [1, n], |a_{i,i}| > \sum_{k \neq i, k=1}^n |a_{i,k}|$ . Montrer que  $A$  est inversible. (On dit que  $A$  est à diagonale strictement dominante).

*Indication* – On pourra raisonner par l'absurde et considérer un  $X \in \ker A \setminus \{0\}$ .

**Exercice 13** (Propagation des rangées de zéros). On note, pour tout  $k \in [-(n-1), (n-1)]$ ,  $\Delta_k$  l'ensemble des matrices ayant toutes leur entrées nulles sauf éventuellement celles sur la diagonale numéro  $k$  i.e. sauf éventuellement les entrées  $(i, j)$  tel que  $j - i = k$ .

Par exemple  $\Delta_0$  est l'ensemble des matrices diagonales et  $\Delta_1$  les matrices ayant toutes les entrées nulles sauf sur la première diagonale supérieure.

On convient que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $|k| \geq n$ ,  $\Delta_k = \{0\}$ .

a) Montrer que le produit de matrice définit une application de  $\Delta_k \times \Delta_l$  dans  $\Delta_{k+l}$ .

b) En remarquant que  $TSS_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k \geq 1} \Delta_k$ , montrer si  $A \in TSS_n(\mathbb{K})$  alors pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^p \in \bigoplus_{k \geq p} \Delta_k$ .

Que dire si  $p \geq n$  ?

**Exercice 14.** Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$  une matrice (dite « triangulaire par bloc »), où les blocs  $A$  et  $D$  sont des matrices carrées quelconques, pas forcément de même taille.

Montrer que  $M$  est nilpotente si, et seulement si,  $A$  et  $D$  le sont.

### Déterminants

**Exercice 15.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps et  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ . En calculant le déterminant  $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$  de deux façons différentes, obtenir une factorisation de l'expression  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  (un terme de degré 1 fois un terme de degré 2).

**Question subsidiaire :** Comment obtenir cette factorisation autrement ?

**Exercice 16.** Calculer, sous forme factorisée  $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$  et  $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(a) & \cos(b) \\ 1 & \cos(a) & 1 & \cos(c) \\ 1 & \cos(b) & \cos(c) & 1 \end{vmatrix}$ .

La forme factorisée trouvée doit donner une C.N.S. simple d'annulation du déterminant.

**Exercice 17** (CCINP MP 2021 avec un calcul pas facile...). Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$

- Calculer  $\det A$  et  $\text{rg } A$  pour  $(a, b) = (1, 2)$ .
- Calculer  $\det A$  et  $\text{rg } A$  dans le cas général (distinguer plusieurs cas possibles selon les valeurs de  $a$  et  $b$ ).
- $A$  est-elle inversible ?
- Déterminer  $A^{-1}$  lorsque  $A$  est inversible.

**Exercice 18** (Opérations par blocs). Soit  $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ .

Montrer que  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$ .

### Révisions sur la comatrice

**Exercice 19** (Incontournable). Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\widehat{A}$  sa comatrice. Déterminer le rang de  $\widehat{A}$  en fonction du rang de  $A$ .

**Exercice 20.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 2$ . Montrer que  $\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$ .