Banque CCINP : Ex 59, 60, 62 (sauf 2.a), 63. a, b, 64

E.v. familles libres, génératrices, bases, supplémentaires, dimension

Exercice 1. Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (\sqrt[n]{|u_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$.

Montrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $(u_i)_{1\le i\le n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ une famille de scalaires. On pose $s = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$.

Donner une C.N.S. sur la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que la famille $(u_i + s)_{1\le i\ \le n}$ soit libre.

Exercice 3. a) On considère les trois fonctions suivantes : $f_0 : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $f_1 : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x)$, $f_2 : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(1/x)$.

La famille (f_0, f_1, f_2) est elle libre ou liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$?

b) Même question en considérant les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par les mêmes formules, ces fonctions étant alors des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k\ :\ \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\ln(x))^k$. La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$?

Exercice 4. Soit F l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Trouver la dimension et une base de F.

Exercice 5 (source ENAC)**.** Soient H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de K et $a \in H$. Justifier si chacune des quatre affirmations suivantes est vrai ou fausse.

a) $\dim(\mathrm{Vect}(e_1 + a, e_2 + a, \dots, e_k + a)) < k$.

b) $\mathrm{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a)$ est un supplémentaire de H.

c) $\mathrm{Vect}(e_1 + a, \dots, e_k + a) = K$.

d) On peut montrer ici que tout sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins deux supplémentaires distincts.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $F = \mathbb{R}_1[x]$ et $G = \{f \in E,\ f(0) = f'(0) = 0\}$.

a) Montrer que G est un s.e.v. de E.

b) Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 7 (Codimension)**.** Oral Centrale 1, Q1, 2022 : Soit E un K-e.v. de dimension infinie et F un s.e.v. de E tel qu'il existe un supplémentaire G de F de dimension d.

Montrer que pour tout G' s.e.v. de E tel que $F \oplus G = F \oplus G' = E$ on a $\dim G = \dim G'$.

Cette valeur commune de la dimension de tous les supplémentaires de F s'appelle *codimension* de F. *Indication (non donnée à l'oral) :* on pourra considérer le projecteur π sur G parallèlement à F.

Applications linéaires

Exercice 8 (Projecteurs)**.** Soient f, g dans $\mathscr{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $g \circ f = g$ et $f \circ g = f$

b) f et g sont deux projecteurs de même direction de projection i.e. de même noyau.

Exercice 9 (Incontournable : La suite des dimension des images diminue de moins en moins vite)**.** Soit E un K-e.v. de dim. finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

En considérant pour chaque $p \in \mathbb{N}$, $f_{|\operatorname{Im} f^p}\ :\ \operatorname{Im} f^p \to \operatorname{Im} f^{p+1}$, montrer que la suite des $\dim(\operatorname{Im} f^p) - \dim(\operatorname{Im} f^{p+1})$ est décroissante.

Exercice 10. Soit E un K-e.v. de dim. finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker f + \ker g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E$.

Montrer que les deux sommes sont directes.

Exercice 11. Donner par sa matrice un exemple de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ tel que $\ker f \not\subset \operatorname{Im} f$, $\operatorname{Im} f \not\subset \ker f$ et $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ne soient pas supplémentaires.

Calcul matriciel et calculs par blocs

Exercice 12 (Incontournable H.P. mais à connaître !)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{k\neq i, k=1}^{n} |a_{i,k}|$. Montrer que A est inversible. (On dit que A est à diagonale strictement dominante).
Indication – On pourra raisonner par l'absurde et considérer un $X \in \ker A \setminus \{0\}$.

Exercice 13 (Propagation des rangées de zéros)**.** On note, pour tout $k \in [\![-(n-1),(n-1)]\!]$, Δ_k l'ensemble des matrices ayant toutes leur entrées nulles sauf éventuellement celles sur la diagonale numéro k i.e. sauf éventuellement les entrées (i,j) tel que $j-i=k$.

Par exemple Δ_0 est l'ensemble des matrices diagonales et Δ_1 les matrices ayant toutes les entrées nulles sauf sur la première diagonale supérieure.

On convient que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $|k| \geq n$, $\Delta_k = \{0\}$.

a) Montrer que le produit de matrice définit une application de $\Delta_k \times \Delta_l$ dans Δ_{k+l}.

b) En remarquant que $TSS_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k\geq 1} \Delta_k$, montrer si $A \in TSS_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p \in \bigoplus_{k\geq p} \Delta_k$. Que dire si $p \geq n$?

Exercice 14. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice (dite « triangulaire par bloc »), où les blocs A et D sont des matrices carrées quelconques, pas forcément de même taille.

Montrer que M est nilpotente si, et seulement si, A et D le sont.

Déterminants

Exercice 15. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. En calculant le déterminant $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ de deux façons différentes, obtenir une factorisation de l'expression $a^3+b^3+c^3-3abc$ (un terme de degré 1 fois un terme de degré 2).

Question subsidiaire : Comment obtenir cette factorisation autrement ?

Exercice 16. Calculer, sous forme factorisée $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(a) & \cos(b) \\ 1 & \cos(a) & 1 & \cos(c) \\ 1 & \cos(b) & \cos(c) & 1 \end{vmatrix}$.

La forme factorisée trouvée doit donner une C.N.S. simple d'annulation du déterminant.

Exercice 17 (CCINP MP 2021 avec un calcul pas facile...)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

a) Calculer $\det A$ et $\operatorname{rg} A$ pour $(a,b) = (1,2)$.

b) Calculer $\det A$ et $\operatorname{rg} A$ dans le cas général (distinguer plusieurs cas possibles selon les valeurs de a et b).

c) A est-elle inversible ?

d) Déterminer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 18 (Opérations par blocs)**.** Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$.

Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B).\det(A-B)$.

Révisions sur la comatrice

Exercice 19 (Incontournable)**.** Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\widehat{A}$ sa comatrice. Déterminer le rang de $\widehat{A}$ en fonction du rang de A.

Exercice 20. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Montrer que $Com(Com(A)) = \det(A)^{n-2} A$.