Banque CCINP : 84, 85,86,87

R0 Quelques déterminants $n \times n$

Exercice 1. Calculer le déterminant D_n d'ordre $n \geq 2$ suivant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2.

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_1 & x & \alpha_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{n-1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha_{n-1} & x & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & x \end{vmatrix}$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x$ sont des réels quelconques.

Encore des blocs

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer le déterminant des matrices par blocs suivantes, en fonction de $\det A$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$$

A1 Polynômes appliqués à des matrices

Calculs de puissances

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(i) Vérifier qu'en notant $P = X^2 - 4X + 4$ on a $P(A) = 0$.

(ii) En utilisant le reste de la division euclidienne de X^n par P, expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{Q})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Déterminer comme à l'exercice précédent un polynôme annulateur de A, de degré 2. Et en déduire une formule explicite de A^n.

c) Déduire alors de ce qui précède la formule explicite de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul d'inverse

Exercice 6. a) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$ et que $A \in \mathcal{A}$ admet un inverse A^{-1} dans $M_n(K)$ alors $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

b) Justifier que l'inverse d'une matrice triangulaire sup. inversible est triangulaire sup,

Exercice 7 (Application du résultat précédent aux « petites » sous-algèbres)**.** Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$, en remarquant que A et B vivent dans des « petites » sous-algèbres de $M_n(\mathbb{C})$.

Arithmétique des polynômes

Exercice 8. a) Soit $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$. Déterminer $P \wedge P'$.

b) En remarquant que 2 est racine de $P \wedge P'$ obtenir une écriture scindée de $P \wedge P'$. En déduire toutes les racines de P avec leur multiplicité.

Exercice 9. a) Bézout optimisé : Soient K un corps et P, Q deux polynômes non nuls, dans $\mathbb{K}[X]$.

Montrer que P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe une unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel qu'on ait les trois conditions : $PU + QV = 1$, $\deg(U) < \deg(Q)$ et $\deg(V) < \deg(P)$.

b) Anti-Bézout : Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes non nuls. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple $(U, V) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ polynômes non nuls tels que $\deg(U) < \deg(Q)$ et $\deg(V) < \deg(P)$ et $PU + QV = 0$.

Exercice 10 (Résultant de deux polynômes et discriminant d'un polynôme, petit problème)**.** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

Définition : On appelle *matrice de Sylvester* de P et Q, et on notera $S(P, Q)$ la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}_{m+n-1}[X]$ du système de vecteurs :

$$(P, XP, \ldots, X^{m-1}P, Q, XQ, \ldots, X^{n-1}Q) \quad (\dagger)$$

Le but de cette partie est de montrer que $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si, $S(P, Q)$ est inversible. Par définition le déterminant $\det(S(P, Q))$ s'appelle le *résultant* de P et Q, et est noté $R(P, Q)$.

a) Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ deux polynômes non nuls. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg(U) < \deg(Q)$ et $\deg(V) < \deg(P)$ et $PU + QV = 0$.

b) Déduire du a) que $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si, $R(P, Q) \neq 0$.

c) **Définition** – On appelle *discriminant* $\Delta(P)$ d'un polynôme P, par déf. :

$$\Delta(P) = R(P, P').$$

Montrer que $P \in \mathbb{C}[X]$ a un discriminant non nul si, et seulement si, P a toutes ses racines simples.

d) Soit $P = aX^2 + bX + c$. Calculer le discriminant $R(P, P')$.