Devoir surveillé 1 (4h)

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.), l'usage de stylos à encre effaçable et des blancs de correction sont interdits. Les couleurs autorisées sont le bleu et le noir, le rouge est toléré pour les encadrés. Encadrez ou soulignez vos résultats, séparez clairement vos questions, la clarté de votre présentation est un élément d'appréciation.

Problème 1

1) **Développement asymptotique des sommes partielles** $\boldsymbol{U_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}}}$

Pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on pose donc $U_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

a) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, décroissante, on pose pour tout $n \geq \lceil a \rceil + 1$, $\delta_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.
Montrer que pour tout $n \geq \lceil a \rceil + 1$, $\delta_n \geq 0$ et que $\sum \delta_n$ converge.

b) Montrer qu'il existe un réel L tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \right) = L + 2.$$

c) Soit $\theta > 1$. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ et en trouver un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

(i) Étudier la série de terme général $(v_{n+1} - v_n)$ et en déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2\sqrt{n}}$.

(ii) Déterminer un équivalent de $v_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(iii) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant, où l'on précisera la valeur de C :

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n} + L + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

2) **Application au D.A. du reste de la série alternée correspondante :**

a) On note pour tout $n \geq 1$, $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$. Justifier que R_n est bien défini.
On note aussi $S = R_0 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

b) Exprimer R_{2n-1} en fonction de S et des sommes partielles U_n et U_{2n}.

c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera en fonction de L et S, tels que :

$$R_{2n-1} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

d) Exprimer S en fonction de L.

e) Déduire de ce qui précède un développement asymptotique de R_{2n} à la même précision $O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ puis en déduire la nature de la *série* de terme général (R_n).

Problème 2

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$

1) Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).
2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (P_1).
3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.
   a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.
   b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :
   $$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$
   En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (P_2).
4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge (autrement dit, pour toute série à terme positif divergente, on va construire une série divergente qui diverge plus lentement !).
   Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :
   — $p_0 = 0, \varepsilon_0 = 1, A_0 = a_0$
   — Pour $n \geqslant 1 :$ $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$
   Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n$.
   a) Ecrire une fonction Python : `pAe(a : function, n : integer)-> tuple` qui :
      - prend en argument une fonction `a` codant la suite (a_n) (i.e. telle que $a(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et un entier n,
      - renvoie le tuple `p,A,epsi` où `p` $= [\mathtt{p}_0, \dots, \mathtt{p}_\mathtt{n}]$, `A` $= [\mathtt{A}_0, \dots, \mathtt{A}_\mathtt{n}]$, `epsi` $= [\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_\mathtt{n}]$.
   b) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que : $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers par :
   $$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min \{n \in \mathbf{N} / n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geqslant 0 \end{cases}$$
   c) Que valent p_{n_k} et ε_{n_k} pour tout entier $k \in \mathbf{N}$?
   d) Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.
5) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0 , la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.
   a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.
   b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.
6) Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.
   a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   b) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.
   c) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.
   d) Caractériser les suites vérifiant (P_2).