Problème 1 d'après e3A

1) a) Exercice fait en cours.

b) Ici $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est bien continue décroissante sur $]0, +\infty[$. Le a) s'applique donc avec les notations du a), la suite des sommes partielles :

$$\Delta_n := \sum_{k=2}^{n} \delta_k = \int_2^n f(t)dt - (U_n - 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \quad \text{converge}$$

Ceci donne bien que la suite des $\left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right)$ est convergente.

c) D'après le cours, la série $\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^\theta}$ converge pour $\theta > 1$, donc la série $\sum_{p=n+1} \frac{1}{p^\theta}$ est convergente. Pour $\theta > 0$, la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x^\theta}$ est continue, positive, décroissante.
On en déduit que, pour tout $p \geqslant 2$

$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\theta} \leqslant \frac{1}{p^\theta} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x^\theta}$$

Par sommation de ces inégalités :

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\theta} \leqslant \sum_{p=n}^{N} \frac{1}{p^\theta} \leqslant \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x^\theta}$$

Par calcul des intégrales avec l'hypothèse $\theta > 1$ donc $\theta \neq 1$:

$$\frac{1}{1-\theta}\left[\frac{1}{x^{\theta-1}}\right]_n^{N+1} \leqslant \sum_{p=n}^{N} \frac{1}{p^\theta} \leqslant \frac{1}{1-\theta}\left[\frac{1}{x^{\theta-1}}\right]_{n-1}^{N}$$

Par passage à la limite pour n fixé et $N \to +\infty$, avec $\theta - 1 > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\theta-1}\frac{1}{n^{\theta-1}} \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \leqslant \frac{1}{\theta-1}\frac{1}{(n-1)^{\theta-1}}$$

Dans cet encadrement les deux termes extrêmes sont équivalents à $\dfrac{1}{\theta-1}\dfrac{1}{n^{\theta-1}}$ donc :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\theta-1)}\frac{1}{n^{\theta-1}}$$

d) (i) On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

donc $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^{3/2}}$. On en déduit que la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge. De plus, son terme général est équivalent à $\frac{1}{4n^{3/2}}$ et donc positif à partir d'un certain rang. Par sommation des relations de comparaison, appliquée aux restes dans le cas convergent, on obtient

$$\sum_{p=n}^{+\infty} (v_{p+1} - v_p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{4n^{3/2}}.$$

Avec l'équivalent du c) pour $\theta = 3/2$, on en déduit que $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{4n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2\sqrt{n}}$.

(ii) On procède de même en posant $w_n = v_n + \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On obtient :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Or,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{4n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 1\right) = \frac{-1}{2n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

donc

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

et la série télescopique $\sum_{n\geqslant 1}(w_{n+1} - w_n)$ converge. Par sommation des relations de comparaison pour les séries à termes de signe constant on obtient

$$w_n = w_n - \lim_{p\to+\infty} w_p = \sum_{p=n}^{+\infty}(w_p - w_{p+1}) \underset{n\to+\infty}{=} O(\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}})$$

On en déduit par c) que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$.

Il s'ensuit que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ et l'on obtient

$$U_n = 2\sqrt{n} + L - \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$

2) a) On applique le Théorème pour Certaines Séries Alternées de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec (a_n) décroissante, tendant vers zéro. Ici $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ vérifie bien cette hypothèse. Le théorème donne donc la convergence de la série.

b) On a

$$\begin{aligned} R_{2n-1} &= S - \sum_{p=1}^{2n-1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} \\ &= S - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= S - \sqrt{2}U_n + U_{2n} \end{aligned}$$

c) En utilisant la formule trouvée à la question 1), on obtient

$$R_{2n-1} = S + (1-\sqrt{2})L + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

et

$$a = S + (1-\sqrt{2})L, \quad b = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

d) De plus, la série $\sum_{p\geqslant 1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ est convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} R_{2n-1} = 0$.

Donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la formule du c), on a $\boxed{S = (\sqrt{2}-1)L}$

e) On déduit du d) le D.A. :

$$R_{2n-1} = \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} R_{2n} &= R_{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{(2n)\sqrt{2n}}\right) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Or $\frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ est T.G.S.C. par Théorème pour Certaines Séries Alternées et les séries de T.G. $O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$ convergent absolument par théorème de comparaison, donc on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n$ est convergente.

Problème 2 d'après Centrale PSI 2009

1) Considérons donc une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument et une suite complexe bornée (u_n). Soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |a_n u_n| \leq M|a_n|$$

et par théorème de majoration pour les séries à termes positifs, comme $\sum |a_n|$ converge, on conclut bien que $\sum |a_n u_n|$.
On a bien montré que (a_n) vérifie (P_1).

2) a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Pour tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_n \neq 0$, on pose $u_n = \dfrac{|a_n|}{a_n} \in \mathbb{U}$. Si $a_n = 0$, on pose par exemple $a_n = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n u_n = |a_n|$$

et comme par hypothèse, $\sum |a_n|$ diverge, on a bien $\sum a_n u_n$ divergente et donc (a_n) ne vérifie pas (P_1).
b) Avec le 1) et le début du 2), on vient de montrer l'équivalence :

$$\boxed{(a_n) \text{ vérifie } (P_1) \text{ si, et seulement si, } \sum a_n \text{ est } \textbf{absolument} \text{ convergente}}$$

3) a) Comme la convergence absolue entraîne la convergence, on sait que $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge. Par somme télescopique, on en déduit que (a_n) converge.
b) Il s'agit de la formule d'intégration par partie discrète, encore appelée *transformation d'Abel.*
En posant $U_{-1} = 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(U_n - U_{n-1}\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}$$

On opère le changement d'indice $k = n - 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) U_k + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left(a_k - a_{k+1}\right) U_k$$

Supposons que $\sum(u_n)$ converge. La suite (U_n) converge donc. Comme elle est bornée et que $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question 1) indique que $\sum((a_n - a_{n+1})U_n)$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (produit de telles suites). L'égalité prouvée indique alors que $\sum(a_n u_n)$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite). On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n).

4) a) Un bon petit programme pour voir votre habitude de la gestion des listes. Noter le très utile `L[-1]` qui donne la dernière entrée de la liste `L`.

```
def pAe(a,n):
    """a est une fonction python codant une suite,
    n est un entier"""
    p=[0]
    epsi=[1]
    A=[a(0)]
    while len(A)<=n:
        if A[-1] >=p[-1]:
            p.append(p[-1]+1)
            epsi.append(epsi[-1]/2)
        else:
            p.append(p[-1])
            epsi.append(epsi[-1])
        A.append(A[-1]+a(len(A))*epsi[-1])
    return p,epsi,A
```

b) Supposons que la suite (p_n) stationne à partir d'un certain rang N. On a alors (ε_n) qui stationne à partir de ce même rang (quand p n'évolue pas, ε n'évolue pas) et donc

$$\forall n \geq N, A_n = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

Comme (a_n) est une suite de réels positifs de série divergente, les sommes partielles de cette série tendent vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_N > 0$ (tous les ε_k sont > 0 par récurrence), l'identité ci-dessus indique que $A_n \to +\infty$. Il existe donc $k \geq N$ tel que $A_k \geq p_k = p_N$ et alors $p_{k+1} = 1 + p_k \neq p_N$ ce qui est une contradiction. Ainsi, la suite (p_n) ne stationne pas à partir du rang N et il existe $n > N$ tel que $p_n \neq p_{n-1}$ et donc tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$. On peut alors montrer par récurrence que la suite (n_k) de l'énoncé est bien définie puisque si n_k est connu alors $\{n \in \mathbb{N}/n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ est un ensemble non vide d'entiers et qu'il contient donc un minimum.

c) Pour $k \geq 1$, on a $n_k = \min\{n \in \mathbb{N}/n > n_{k-1} \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ et donc $p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}+1} = \cdots = p_{n_k - 1}$ et $p_{n_k} = 1 + p_{n_{k-1}}$ d'où l'on déduit que

$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{n_{k-1}}$$

Comme $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, on en déduit par récurrence que

$$\forall k, p_{n_k} = k \text{ et } \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

d) Par sa définition par récurrence, (ε_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. De plus, $(\varepsilon_{n_k})_k$ est une extraite de $(\varepsilon_n)_n$ (la suite des n_k croît strictement) et est de limite nulle. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

De façon similaire, la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum(a_n \varepsilon_n)$ est croissante et on a une extraite qui tend vers $+\infty$ $(A_{n_k - 1} \geq p_{n_k - 1} = p_{n_{k-1}} = k - 1 \to +\infty)$. On a donc $A_n \to +\infty$ et $\sum(a_n \varepsilon_n)$ qui diverge.

5) a) Soit (ε_n) une suite de limite nulle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon'_n = \text{signe}\,(a_n)\,\varepsilon_n$. Ainsi (ε'_n) est une suite de limite nulle et donc $\sum (a_n \varepsilon'_n)$ converge. Or $\sum (a_n \varepsilon'_n) = \sum (\varepsilon_n \,|a_n|)$ d'où la conclusion.

b) Si $\sum |a_n|$ divergeait (par l'absurde), la question 4) donnerait une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\sum |a_n| \varepsilon_n$ diverge et on obtiendrait une contradiction. Ainsi, $\sum |a_n|$ converge.

6) a) Supposons, par l'absurde, que (a_n) n'est pas bornée. Pour tout M et tout N, il existe un entier $n \geq N$ tel que $|a_n| \geq M$ (sinon, la suite $(a_n)_{n \geq N}$ est bornée et $(\ a_n)$ l'est donc aussi). On peut ainsi construire par récurrence une suite n_k telle que $|a_{n_0}| \geq 1$ et

$$\forall k \geq 0, n_{k+1} = \min \left\{ n > n_k / \, |a_n| \geq 2^{k+1} \right\}$$

Soit alors (x_n) telle que

$$\forall k, x_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

les autre x_n étant nuls. $\sum (x_n)$ converge (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$) et

$$\forall k, |x_{n_k} a_{n_k}| \geq 1$$

ce qui montre que $(x_n a_n)$ n'est pas de limite nulle et entraîne la divergence de $\sum (x_n a_n)$ en donnant une contradiction.

b) Par la même I.P.P. discrète qu'au 3) b) on a

$$(*) : \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \left(a_{k+1} - a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k \right) a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ est le terme général d'une série convergente (puisque (ε_k) converge) et donc $\sum (\varepsilon_{k-1} - \ \varepsilon_k)\, a_k$ converge. De plus $\varepsilon_n a_{n+1} \to 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle). $(*)$ montre alors que $\sum (\varepsilon_n \left(a_{n+1} - a_n \right)\ )$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite).

c) En appliquant le résultat de la question 5) b), non pas à (a_n) mais à $(a_{n+1} - a_n)$, qui vérifie bien l'hypothèse de la question 5) puisqu'on vient de montrer que pour toute suite réelle (ε_n) qui tend vers zéro, $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge, on a bien le résultat :

$$\sum |a_{n+1} - a_n| \quad \text{converge}$$

d) Avec le 6) c) et le 3), on a l'équivalence :

$$\boxed{(a_n) \text{ vérifie la propriété } (P_2) \text{ si, et seulement si, } \sum |a_{n+1} - a_n| \text{ converge.}}$$