# DM 2 : Endomorphismes nilpotents et algèbres de Lie

Pour le 26 septembre 2022

## I Généralités sur les endomorphismes nilpotents :

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. $n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$

1) On suppose que $u$ est nilpotent d'indice $d$. Démontrer que $d \leq n$.
2) *Démonstration* géométrique *du fait qu'une matrice Triangulaire Supérieure Stricte (T.S.S.) est nilpotente*
   a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On note $V_0 = \{0\}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $V_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.
   On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(V_k) \subset V_{k-1}$. Montrer que $u$ est nipotent.
   b) *En déduire* qu'une matrice T.S.S. est toujours nilpotente.
3) *Une démonstration du fait qu'un endomorphisme nilpotent peut être représenté par une matrice T.S.S. (comparer au cours du R3 plus tard, ce sera évident !)*
   a) On suppose que $u$ est nilpotent d'indice $d$. Montrer que :
   $$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^{d-1} \subsetneq \ker u^d = E.$$
   b) En reprenant les notations introduites plus haut, en déduire qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u(V_k) \subset V_{k-1}$.
4) Soit $\mathcal{B}_0$ une base de $\mathbb{K}^2$ et $(u, v) \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ dont les matrices respectives dans $\mathcal{B}_0$ sont $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe *pas* de base $\mathcal{B}$ de $E$ dans laquelle les matrices de $u$ et de $v$ soient simultanément T.S.S.
5) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ une matrice (dite « triangulaire par bloc »), où les blocs $A$ et $D$ sont des matrices carrées quelconques, pas forcément de même taille.
   Montrer que $M$ est nilpotente si, et seulement si, $A$ et $D$ le sont.
6) Donner un exemple de matrice nilpotente dont aucune des entrées n'est nulle.

## II Théorème sur les « algèbres de Lie nilpotentes »

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n$.

**Définition (crochet de Lie)** Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, on note $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.
De même pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $[A, B] = AB - BA$.
Une partie $V$ de $\mathscr{L}(E)$ (resp. de $M_n(\mathbb{K})$) est dite *stable par le crochet de Lie* si, et seulement si, pour tout $(u, v) \in V^2$, $[u, v] \in V$. (de même pour les matrices).

**Terminologie :** dans ce problème, on appelle *algèbres de Lie* tout s.e.v. d'un espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ qui est stable par le crochet de Lie.
**Culture :** ces « algèbres d'un type différent » sont très importantes en maths et en physique...

**Propriété utile du crochet de Lie : l'identité de Jacobi** On vérifie (calcul !) que :

$$\forall (u, v, w) \in \mathscr{L}(E)^3,\ [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

**Notation :** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$).
Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $B \in M_n(\mathbb{K})$), on définit $\Phi_u(f) = uf - fu = [u, f]$ (resp. $\Phi_A(B) = AB - BA = [A, B]$).
Le but de cette partie est de démontrer les résultats suivants

**Théorème 1** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n$ et soit $N$ un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$, stable par le crochet de Lie, dont tous les éléments sont nilpotents. Alors il existe un $x \in E \smallsetminus \{0\}$ tel que pour tout $u \in N$, $u(x) = 0$.

Ce théorème a la conséquence, pour nous plus parlante, suivante :

**Théorème 2 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dim. finie et $V$ un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$ stable par le crochet, dont tous les éléments sont nilpotents. Alors il existe une base de $E$ dans laquelle tous les éléments de $V$ sont représentés par des matrices T.S.S.

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\Phi_u : \quad f \in \mathscr{L}(E) \mapsto [u, f]$.
   a) Montrer que $\Phi_u \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
   b) Montrer que si $u$ est nilpotent alors $\Phi_u$ est nilpotent dans $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.
   c) Montrer que $\Phi : \quad \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$, $u \mapsto \Phi_u$ est un « morphisme pour le crochet de Lie », ce qui signifie que :

$$\forall\,(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2,\ \Phi_{[u,v]} = [\Phi_u, \Phi_v].$$

2) Démontrer le théorème 1 dans le cas particulier où $N$ est de dimension 1.

Soit $d \geq 2$. On suppose que le théorème 1 est vrai pour toute algèbre de Lie dont tous les éléments sont nilpotents, de dimension inférieure ou égale à $d-1$. Soit $N$ de dimension $d$ vérifiant les hypothèses du théorème. On remarque que pour chaque $u \in N$, $\Phi_u$ peut être vu comme un endomorphisme de $N$.

3) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $N_1$ de $N$ stable par le crochet de Lie, distinct de $N$ et de $\{0\}$, de dimension maximale.

Soit $S$ un supplémentaire de $N_1$ de $N$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $N_1$ et $(e_{r+1}, \dots, e_d)$ une base de $S$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ la base de $N$ ainsi obtenue. (Attention les $e_i$ sont des endomorphismes !).

4) (i) Montrer que pour tout $u \in N_1$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in M_r(\mathbb{K})$, $B \in M_{r,d-r}(\mathbb{K})$ et $D \in M_{d-r}(\mathbb{K})$.
   On note $\rho(u)$ la matrice $D \in M_{d-r}(\mathbb{K})$.
   (ii) Montrer que l'application $\rho : N_1 \to M_{d-r}(\mathbb{K})$, $u \mapsto \rho(u)$ est une application linéaire qui préserve le crochet i.e. telle que pour tout $(u,v) \in N_1^2$, $\rho([u,v]) = [\rho(u), \rho(v)]$.
5) Montrer qu'il existe un $X_0 \in M_{d-r,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $\rho(u).X_0 = 0$ pour tout $u \in N_1$.
6) En déduire qu'il existe un $v_0 \in S$ non nul tel que $\Phi_u(v_0) \in N_1$ pour tout $u \in N_1$.
7) En déduire que $\dim(N_1) = d-1$.
8) Soit $E_1$ l'ensemble des vecteurs $x$ de $E$ tels que pour tout $u \in N_1$, $u(x) = 0$. Montrer que $E_1$ est un s.e.v. de $E$ stable par tout élément de $N$.
9) En déduire qu'il existe un $x_0 \in E$ non nul tel que pour tout $f \in N$, $f(x_0) = 0$ et conclure pour le théorème 1.
10) En déduire le théorème 2.
   **Remarque :** un s.e.v. de $M_n(\mathbb{K})$ stable par produit sera en particulier stable par crochet.