DM 1 : convergence en moyenne et produits de Cauchy

Pour le lundi 12 septembre

Définition On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ « converge en moyenne » si, et seulement si, en notant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ M_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, la suite (M_n) converge.

Dans ce problème, on pourra utiliser le résultat de cours suivant :

Théorème de Cesaro du cours fin du § I : Si une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers un $\ell \in \mathbb{K}$ alors elle converge aussi en moyenne vers ce même ℓ

1) **Exemples de suites convergeant « seulement » en moyenne : suites périodiques**
Soit (u_n) une suite T-périodique c'est-à-dire telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+T} = u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\mu = \frac{1}{T}\left(u_0 + u_1 + \cdots + u_{T-1}\right)$$
On considère la suite (v_n) de terme général : $v_n = (n+1)M_n - (n+1)\mu$.
   a) Montrer que (v_n) est T périodique.
   b) En déduire que (v_n) est bornée.
   c) Etablir que (M_n) converge et préciser sa limite.

2) **Exemple de suite ne convergent pas en moyenne :**
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall n \in [\![2^k, 2^{k+1} - 1]\!],\ u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$
   a) Calculer $M_{2^{2n}-1}$ pour cette suite (u_n) et déterminer $\lim_{n\to+\infty} M_{2^{2n}-1}$.
   b) Faire de même avec $M_{2^{2n-1}-1}$ et conclure que (M_n) diverge.

3) **Une généralisation de Cesaro :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose
$$w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$
On suppose que (u_n) et (v_n) convergent, vers des limites notées λ et μ.
a) On suppose que $\lambda = 0$. Montrer que (w_n) converge vers 0.
b) Dans le cas général, montrer que (w_n) converge vers $\lambda\mu$.

4) **Cadre classique du produit de Cauchy :** Dans la suite, on considère deux séries complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
On note (c_n) le produit de Cauchy de (a_n) et (b_n) et on pose :
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad M_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_k.$$
On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ *convergent absolument.* On note $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
Quelle est la limite de (M_n) ?

5) **Contre-exemples pour le produit de Cauchy de séries semi-convergentes :**
On va ici donner deux exemples où $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent mais $\sum c_n$ ne converge pas.

a) Exemple 1 : (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, montrer que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent mais que la série $\sum c_n$ n'est pas convergente.

b) Exemple 2 : (a_n) et (b_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = b_n = \binom{-1/2}{n}$, montrer que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent mais que la série $\sum c_n$ n'est pas convergente.
Indication – On pourra utiliser sans dém (5/2 avec dém.) la formule suivante :

$$\forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

6) **Un résultat positif pour le produit de Cauchy dans le cadre général du 5)**
On suppose encore que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent (mais pas forcément absolument) à part cela les notations sont celle du 4).

a) Montrer que (C_n) est le produit de Cauchy de (a_n) et (B_n).
b) Exprimer M_n en fonction des A_k et des B_k, $k \in [\![0,n]\!]$.
c) Quelle est la limite de (M_n) ?

On vient donc de montrer que même si les sommes partielles (C_n) du produit de Cauchy ne convergent pas forcément, elles « convergent en moyenne ».

7) **Un résultat positif pour le produit de Cauchy dans l'hypothèse où $\sum c_n$ converge**
On suppose maintenant que $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent.

Que dire alors de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$?

Remarque : quand vous reprendrez ce D.M. pour les révisions des écrits, vous pourrez redémontrer directement le résultat de cette question grâce au théorème de convergence radiale d'Abel.

8) **Un résultat positif si l'une (au moins) des deux séries est absolument convergente**.
On suppose (par exemple) que $\sum a_n$ est absolument convergente et que $\sum b_n$ est convergente.
On veut montrer que $\sum c_n$ converge vers $A.B$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $C_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + A_n B$.
b) Montrer alors le résultat demandé à l'aide de la majoration :

$$|C_n - AB| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| + |B|.|A_n - A|.$$

9) **Une généralisation assez puissante du théorème de Cesaro (utilisée aussi en probabilités).** Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $(c_{n,p}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ une suite double vérifiant les trois conditions suivantes :

(H_1) $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $c_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(H_2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

(H_3) $\exists\, C > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \leq C$

On va montrer que $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} u_k\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

a) Montrer le résultat pour $\ell = 0$, en utilisant seulement les hypothèses (H_1) et (H_3).
Indication – Preuve « à la Cesaro » en coupant les ε... même si vous n'y arrivez pas, ne vous privez pas d'appliquer ce résultat aux questions suivantes.
b) Conclure dans le cas général.

10) Retrouver le résultat de la question 8 à l'aide de celui de la question 9 en écrivant,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ C_n = A_n B - \Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\beta_k\Big)$$

où $\beta_k = B - B_k$ est le reste d'ordre k de $\sum b_n$ et en appliquant le 9) à $(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\beta_k)$.