DM 1 : Convergence en moyenne du produit de Cauchy, solution

1) a) Par définition :

$$\begin{aligned} v_{n+T} &= \sum_{k=0}^{n+T} u_k - (n+1+T)\mu \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\mu + \sum_{k=n+1}^{n+T} u_j - T\mu \\ &= v_n \end{aligned}$$

Or par T-périodicité $\sum_{k=n+1}^{n+T} u_j$ étant la somme de T valeurs consécutives de (u_n) elle est égale à $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Ainsi les deux derniers termes s'annulent et la conclusion.

b) Une suite périodique prend un nombre fini de valeurs donc est bornée.

c) Comme (v_n) est bornée, $v_n/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $M_n - \mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$

2) a) Par déf. $M_{2^{2n}-1} = \dfrac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2^{2n}-1} u_i = \dfrac{1}{2^{2n}}(1 + \sum_{k\in[\![0,2n[\![, \text{ impair}} 2^{k+1} - 2^k)$ En effet $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ représente le nombre d'éléments de l'intervalle $[\![2^k, 2^{k+1}-1]\!]$ qui comptent chacun pour 1 dans la somme, à condition que k soit impair. Le 1 initial provient du u_0.

En reindexant comme les $k+1$ s'écrivent $2i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$:

$$M_{2^{2n}-1} = \frac{1}{2^{2n}}(1 + \sum_{i=1}^{n} 2^{2i} - 2^{2i-1}) = \frac{1}{2^{2n}}(1 + \sum_{i=1}^{n} 2^{2i-1}) = \frac{1}{2^{2n}}(1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 4^i) = \frac{1}{4^n}(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4-4^{n+1}}{1-4})$$

On en déduit que $M_{2^{2n}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4^n}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4^{n+1}}{3}$ donc $\boxed{M_{2^{2n}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{3}}$.

b) De même $M_{2^{2n-1}-1} = \dfrac{1}{2^{2n-1}}(1 + \sum_{k\in[\![0,2n-1[\![, \text{ impair}} 2^k)$. Le calcul de la parenthèse est identique, la seule chose qui change est donc le $\dfrac{1t}{2^{2n-1}}$ devant la parenthèse.

Ici $\boxed{M_{2^{2n-1}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}}$

Conclusion : (M_n) admet deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes, donc diverge.

3) a) La suite (v_n) est convergente, donc bornée. Notons M un majorant de $(|v_n|)$.

$$|w_n| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}| \leq \frac{M}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Or comme $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ le théorème de Cesaro donne que : $\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on en déduit que $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

b) Pour se ramener au a), on écrit $u_n = \lambda + u'_n$, où (u'_n) converge vers 0.

Alors

$$w_n = \frac{\lambda}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_{n-k} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u'_k v_{n-k} = \frac{\lambda}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u'_k v_{n-k}.$$

Le premier terme converge vers $\lambda\mu$ d'après Cesaro et le second vers 0 d'après le a), d'où le résultat.

4) D'après le cours sur le produit de Cauchy de deux séries ACV, on sait $\sum c_n$ converge absolument et sa somme est AB,
Autrement dit, la suite (C_n) converge vers AB ; d'après le théorème de Cesaro appliqué à (C_n), on a aussi :

$$\boxed{M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} AB.}$$

5) Ici on relâche l'hypothèse de convergence absolue sur $\sum a_n$ et $\sum b_n$ on ne peut plus utiliser la convergence du produit de Cauchy,
a) Exemple avec $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$.
Alors $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k.(-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$
Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $k+1 \leq n+1$, et $n-k+1 \leq n+1$, donc $\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n+1}$.
Mais alors $|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1} = 1$ et donc $\sum c_n$ est grossièrement divergente.
b) Exemple avec $a_n = b_n = \binom{-1/2}{n}$.
(i) Première étape : On commence par vérifier que $\sum a_n$ converge.
Or $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n-1)}{n!} = (-1)^n \alpha_n$ où $\alpha_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$.
Ainsi $\alpha_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha_n < \alpha_n$, donc la suite (α_n) est décroissante.
Enfin on montre que $\alpha_n \sim \frac{k}{\sqrt{n}}$ (avec Stirling), donc $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi la série $\sum \binom{-1/2}{n}$ vérifie le T.S.A. et donc converge.
(ii) Deuxième étape : d'une manière très générale, on va montrer pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n} \quad (*)$$

Pour cela on considère, pour $x \in [0,1[$, $f(x) = (1+x)^\alpha$ et $g(x) = (1+x)^\beta$.
Alors $f(x)g(x) = (1+x)^{\alpha+\beta}$ a pour D.S.E. $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n$.
Et d'autre part son développement est aussi le produit de Cauchy des développements, ce qui donne la conclusion $(*)$ par unicité du D.S.E.
(iii) Troisième étape : on revient à $\alpha = \beta = -1/2$.
Avec $(*)$ ici, on a que pour $a_n = b_n = \binom{-1/2}{n}$, on a $c_n = \binom{-1}{n}$.
Or $c_n = \binom{-1}{n} = (-1)^n$ et donc la série $\sum c_n = \sum (-1)^n$ est divergente.

6) a) $C_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(a_j \sum_{i=0}^{n-j} b_i\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j B_{n-j}$

b) D'après le a), $M_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}B_j\right)$. On procède ensuite comme au a) :

$$M_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(B_j \sum_{k=j}^{n} a_{k-j}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left(B_j \sum_{i=0}^{n-j} a_i\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} A_{n-j}B_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}.$$

c) Les suite (A_n) et (B_n) convergent respectivement vers $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et vers $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
On peut donc appliquer le 3). La suite (M_n) converge vers AB.
N.B. Ce résultat est dû à Cesaro, cf. note historique à la fin du corrigé.

7) **Théorème d'Abel** Par hyp. de cette question, la suite (C_n) converge vers une limite C. Par le théorème de Cesaro rappelé au début de l'énoncé, on sait alors que $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} C$. Or par la question précédente, $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} AB$. Donc $C = AB$.

8) **Théorème de Mertens**

a) Par 5. a), on sait déjà que $C_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}B_i$.

On peut réécrire cette égalité $C_n = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}B = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(B_i - B) + A_nB$ ce qui est l'égalité demandée.

b) La majoration donnée est conséquence immédiate du a) avec l'inégalité triangulaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \tilde{A} < +\infty$, et que $B_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} B$ il existe un i_0 tel que :

$$\forall\, i \geq i_0, \quad |B_i - B| < \varepsilon' = \dots \tag{1}$$

On écrit donc

$$\sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| = \sum_{i=0}^{i_0} |a_{n-i}|.|B_i - B| + \sum_{i=i_0+1}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| \tag{2}$$

Or, i_0 étant ainsi fixé, comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall\, n \geq n_0, \quad |a_{n-i_0}| \leq \varepsilon'' = \dots$$

et comme pour tout $i \leq i_0$, $n - i \geq n - i_0$, on a, mieux :

$$\forall\, n \geq n_0, \forall\ \ i \leq i_0, \quad |a_{n-i}| \leq \varepsilon'' \tag{3}$$

Avec (1) et (3) dans (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \forall\, n \geq n_0, \quad \sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| \quad &\leq \quad \varepsilon' \sum_{i=0}^{i_0} |B_i - B| + \varepsilon' \sum_{i=i_0+1}^{n} |a_{n-i}| \\ &\leq \quad \varepsilon'' \sum_{i=0}^{i_0} |B_i - B| + \varepsilon' \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \end{aligned} \tag{4}$$

C'est maintenant le moment de préciser le choix des ε' et ε' dans (1) et (3).
Bien sûr il faut bien respecter l'ordre des choix et commencer par (1) :

• On choisit donc $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon/2}{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|}$ (on suppose que (a_n) n'est pas la suite nulle sinon tout est trivial).

Ce choix fait, on a i_0 fixé comme dans (1).

• On choisit alors $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon/2}{\sum_{i=0}^{i_0} |B_i - B|}$

Avec ces deux choix, l'inégalité (4) donne :

$$\forall\, n \geq n_0, \quad \sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

On a bien démontré que :

$$\sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6}$$

En revenant alors à l'inégalité donnée par l'énoncé :

$$|C_n - AB| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_{n-i}|.|B_i - B| + |B|.|A_n - A|.$$

comme $|A_n - A| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut bien, par majoration que :

$$\boxed{C_n - AB \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

9) **Théorème de Töplitz (1911)** a) Méthode Cesaro : soit $\varepsilon > 0$.
Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a un n_0 tel que :

$$\forall\, n \geq n_0,\ |u_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2C} \tag{7}$$

On considère alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}u_k\ | &\leq \sum_{k=0}^{n_0} |c_{n,k}|.|u_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |c_{n,k}|.|u_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} |c_{n,k}|.|u_k| + \varepsilon' \sum_{k=n_0+1}^{n} |c_{n,k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} |c_{n,k}|.|u_k| + \varepsilon' C \quad \text{cf. } H_3 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} |c_{n,k}|.|u_k| + \varepsilon/2 \end{aligned} \tag{8}$$

Ensuite on utilise (H_1) pour chaque terme de la première somme dans (8).
Soit $M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0}|)$.
Pour chaque $k \in [\![0, n_0]\!]$, comme $c_{k,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a un N_k tel que :

$$\forall\, n \geq N_k, |c_{n,k}\ | \leq \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2M.(n_0+1)} \tag{9}$$

Soit $N = \max(N_0, \ldots, N_{n_0}, n_0)$, alors par les inégalités (8) et (9) :

$$\forall\, n \geq N,\ |\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}u_k\ | \leq \frac{\varepsilon}{2M(n_0+1)} \sum_{k=0}^{n_0} .|u_k| + \varepsilon/2 \leq \varepsilon \tag{10}$$

ce qui donne la conclusion.
b) Dans le cas général, on écrit $u_n = u'_n + \ell$ et $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}u_k = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}u'_k + \ell \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}$.
Dans cette dernière somme, le première terme $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}u'_k$ tend vers 0 par le a) et le second vers ℓ par (H_2). □

10) On sait déjà, comme vu au 6), que (C_n) est le produit de Cauchy de (a_n) et (B_n) ce qu'on peut écrire :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}B_k$$

En introduisant les restes β_k, comme suggéré par l'énoncé, on a $B_k = B - \beta_k$ et la formule précédente devient :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(B - \beta_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}B - \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\ \beta_k = A_nB - \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\ \beta_k,$$

comme annoncé par l'énoncé.

On va donc appliquer le théorème de Töplitz de la question précédente avec $c_{n,k} = a_{n-k}$ en vérifiant seulement (H_1) et (H_3) car $\beta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour (H_1) : pour chaque k fixé, $a_{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ comme T.G.S.C.

Pour (H_3) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| = \tilde{A}$ d'où la conclusion avec $C = \tilde{A}$.

Ainsi le 9) s'applique pour montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\ \beta_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme $A_n B \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A.B$ on a la conclusion.

Note historique : le résultat du 6) (la convergence en moyenne du produit de Cauchy) est dû à Cesaro dans un article de 1896 (Bulletin des Sciences Mathématiques : « Sur la multiplication des séries »). C'est pour la démonstration de ce résultat que Cesaro démontre le résultat du 3) et donc ce qu'on appelle *théorème de Cesaro* en prépa.

Le résultat du 7) est déjà donné par Abel dans les années 1820 comme conséquence de son théorème de convergence radiale que nous verrons au chapitre série entière.

Le résultat du 8) est appelé théorème de Mertens, publié par Mertens en 1875.

Le résultat du 9) est appelé théorème de Toeplitz, publié par celui-ci en 1911.