

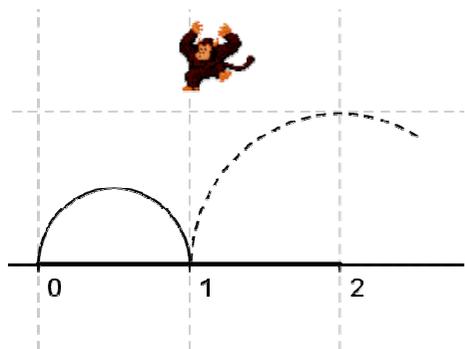
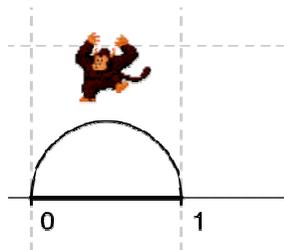
1. Exercices communs

1-a : Zone Europe-Afrique-Asie : Le singe sauteur.

J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

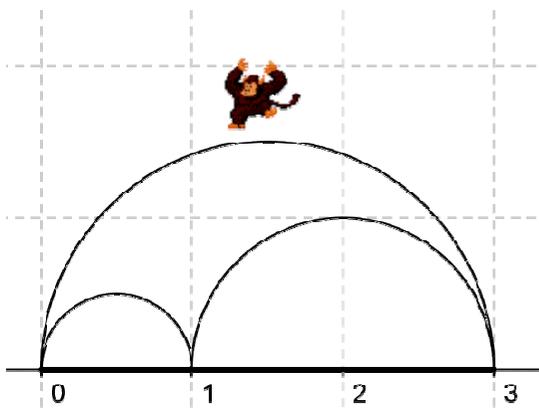
Le nombre n est dit **atteignable** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, ..., n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0 ; 2]$.

Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m , on a : $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par $1+2+3 \dots$

Montrer que $N + 4$ est aussi atteignable.