Complément à l'énoncé d'Olympiade de premières : C.N.S. pour qu'un nombre soit atteignable

Par Romain Bondil, Lycée Joffre Montpellier[1]

Notation : Soit n un nombre atteignable. Il s'écrit donc $n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k k$ où $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ pour tout $k \in [[1, n]]$. On note $S(i) = \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k k$, la *somme partielle*, jusqu'au terme i, des termes de la somme précédente.

Définition : On dira qu'une somme (permettant d'atteindre un entier n) est *obstinée* si « elle recule dès qu'elle le peut ». Mathématiquement cela signifie que pour tout $i \in [[2, n]]$ si $S(i-1) \geq i$ alors $\varepsilon_i = -1$.

Exemple : Par exemple $4 = 1 + 2 - 3 + 4$ est le premier exemple de nombre atteint comme une somme obstinée.

Questions complémentaires

1. Déterminer le plus petit nombre, après 4, qui est somme d'une suite obstinée. On note M ce nombre.
2. Montrer que si n est atteignable comme une somme *non obstinée* alors $n + 4$ est atteignable.
3. Montrer que, à part 4 et M, tout nombre n somme d'une suite obstinée est aussi somme d'une suite non obstinée.
4. Conclure que pour tout $n \geq 20$, n est atteignable si, et seulement si, n est de la forme $4k$ ou $4k + 1$ pour k entier.

Solution des questions d'olympiade

1. $4 = 1 + 2 - 3 + 4$ et à chaque étape, on n'a pas le choix.
2. On n'a pas plus le choix : même dans $[0, 5]$, on doit faire $1 + 2 - 3 + 4$ et on est coincé.
3. $9 = 1+2+3-4+5-6+7-8+9$, on vérifie bien qu'à chaque étape, on ne sort pas de $[0, 9]$. (Il est instructif de raisonner à l'envers, en partant des derniers termes, qui sont contraints.)
4. Soit $N = n^2$ un carré d'entier. (On peut après 9, essayer 16 déjà, l'observation de la somme donnant la solution générale suivante) :
   $1 + 2 + 3 + \cdots + n + [-(n+1) + (n+2)] + [-(n+3) + (n+4)] + \cdots + [-(n^2-1) + n^2] =$
   $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1 + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n^2-n}{2} = n^2$.
5. Si n est atteignable, on a une écriture de n comme $n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k k$ avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$.

   En réduisant cette écriture modulo 2, on a $n \equiv \sum_{k=1}^{n} k\,[2]$ donc $n \equiv \dfrac{n(n+1)}{2}\,[2]$ donc $2n \equiv n(n+1)\,[4]$ et la conclusion $4|n(n-1)$ et donc, comme 4 n'a qu'un seul facteur premier, et n et $n-1$ sont premiers entre eux, $4|n$ ou $4|n-1$.

   Remarque : Cette condition nécessaire ne fait donc pas intervenir la contrainte de « rester dans l'intervalle » !

   Seconde méthode pour le 5 (davantage abordable pour les élèves de premières ?) : Si n est atteignable, alors, avec les notations précédentes, $\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k k = 0$, car le dernier pas ne peut être que $+n$ en partant de 0. (*Dans cette méthode, on utilise donc la contrainte de rester dans l'intervalle.*)
   Dans cette somme, on sépare les termes positifs, dont on note la somme S_+, des termes négatifs dont on note la somme $-S_-$. On a alors $S_+ - S_- = 0$ i.e. $S_+ = S_-$ (1).

1. email : romain.bondil@math.univ-montp2.fr

Or $S_+ + S_- = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (2).

Donc par (1) et (2), on a $2S_+ = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ce qui donne immédiatement que $4|n(n-1)$.

6. Cette question est résolue de manière plus générale au 2. des compléments.

Solution des questions complémentaires

1. On repart de $4 = 1+2-3+4$, et on considère les sommes partielles successives. On obtient $13 = (1+2-3+4+5-6)+(7-8)+(9-10)+(11-12)+13$. (Les parenthèses mettent en valeur le fait qu'après la première parenthèse qui donne 3, on descend de -1 à chaque fois). Ainsi, le second nombre atteignable obstiné est $M = 13$. Le suivant est $M' = 40$, ce sera utile au 3.

2. Si n est un atteignable non obstiné, il existe un i tel que $S(i-1) \geq i$ et $\varepsilon_i = +1$. On considère alors le plus petit entier $j \geq i+1$ tel que $\varepsilon_j = -1$. Ainsi $(\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j) = (+1, -1)$ et $S(j-2) \geq j-1$ car $S(j-2) = S(i-1) + i + \cdots + (j-2) \geq j-1$.

Alors on peut, dans l'écriture $n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k k$, changer le couple $(\varepsilon_{j-1}, \varepsilon_j) = (1, -1)$ en son opposé $(\varepsilon'_{j-1}, \varepsilon'_j) = (-1, 1)$ en respectant la contrainte de l'énoncé : ne pas dépasser zéro à gauche, et ici $n+2$ à droite. On obtient alors $n+2 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon'_k k$, où les autres ε'_k (pour $k \notin \{j-1, j\}$) sont égaux aux ε_k.

En ajoutant alors $[-(n+1)+(n+2)] + [-(n+3)+(n+4)] = +2$, on obtient alors l'écriture de $n+4$ voulue.

Remarque : Si n est obstiné, il se peut que $n+4$ ne soit pas atteignable, c'est le cas pour 4 et 13 car ni 8 ni 17 ne sont atteignables, mais ce sont les seuls obstinés vraiment méchants, comme le montre la suite.

3. Soit donc n somme d'une suite obstinée, $n > 13$. Alors par la remarque du 1., $n \geq 40$.

Le nombre n admet donc une écriture comme somme dont le début est identique à celle de 13 c'est à dire :

$$n = (1+2-3+4+5-6)+(7-8)+(9-10)+(11-12)+13+\sum_{k=14}^{n} \varepsilon_k k \quad (1)$$

Il suffit alors de montrer qu'on peut obtenir 13 comme somme d'une suite non obstinée *sortant par la droite de l'intervalle* $[0, 13]$ mais ne sortant par de $[0, 40]$.

Par exemple : $13 = 1+2+3-4+5+6+7+8+9-10+11+12-13$. Alors :

$$n = 1+2+3-4+5+6+7+8+9-10+11-12-13+\sum_{k=14}^{n} \varepsilon_k k, \quad (2)$$

avec le même terme $\sum_{k=14}^{n} \varepsilon_k k$ que dans (1), donne une écriture légitime de n, qui n'est pas obstinée.

4. La conclusion est facile : pour tout nombre n atteignable $n > 13$, on vient de montrer, par 1. et 3., que $n+4$ est atteignable. Il suffit de montrer que 20 et 21 sont atteignables.

a) Pour 20 c'est facile puisque $20 = 16+4$ et 16 est un carré.

b) On a $21 = 1+2+3+4+5+6-7-8+9-10+11-12+13-14+15-16+17-18+19-20+21$.

La C.N.S. est établie. □

Remarques diverses :

R1 : Finalement, à partir de 20, la contrainte de "rester dans l'intervalle" ne change rien quant aux nombres atteignables, puisque la C.N. $n \equiv 0$ ou $n \equiv 1$ modulo 4 est valable sans cette contrainte !

R2 : Pour être tout à fait complet, donnons l'ensemble des nombres atteignables dans $[[1, 19]]$: $\{1, 4, 9, 13, 16\}$.

R3 : Il est possible de fabriquer un algorithme polynomial (en $O(n^3)$) pour tester si un nombre n est atteignable, et dans ce cas, avoir une de ses décompositions.