Exercice 1 : dénombrement de dés

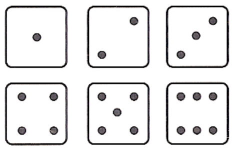
1) Si on dispose de six couleurs, combien de cubes différents peut-on obtenir en peignant chaque face d'une couleur différente ?

(Attention, le *même* cube peut être bougé et donc présenter ses faces de manière différentes !).

2) Depuis l'antiquité, les dés cubiques que l'on utilise pour jouer sont fabriqués en tenant compte de la règle (R) suivante : on répartit les six chiffres de 1 à 6 sur les faces, de telle sorte que la somme des chiffres de deux faces opposées quelconques fait toujours sept.

a) *Sans tenir compte de la façon d'écrire ces chiffres sur les faces*, combien de dés distincts peut-on obtenir en respectant la règle citée ?

b) En fait, sur les faces d'un dé, les chiffres sont symbolisés par les dessins suivants, appelés *ocelles* :



Certains de ces ocelles changent de sens lorsqu'on tourne le dé. En déduire combien de dés différents on peut fabriquer en respectant la règle (R), en distinguant les dés dont les ocelles ne se présentent pas de la même façon.

Exercice 2 : des dés pas ordinaires

On lance deux dés ordinaires : le tableau 1 suivant présente, avec en ligne les résultats possibles du lancé du premier dé, en colonne ceux du second dé, l'ensemble des valeurs prises par la somme des valeurs obtenues pour les deux dés.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Tableau I

Ce tableau conduit aux nombres d'apparitions suivants pour chacune des sommes possibles de 2 à 12 :

Tableau II :

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
nombre d'apparition	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Problème : Le but de cet exercice est de montrer qu'il est possible de fabriquer une *autre* paire de dés cubiques, qui ne sont pas les dés cubiques ordinaires, permettant de retrouver en les lançant exactement le même tableau que le tableau II.

On se donne les règles de construction suivantes :
- les chiffres sont non nuls,
- les chiffres ne sont pas forcément entre 1 et 6,
- on peut y répéter le même chiffre sur deux faces différentes.

Les deux dés de la paire ne sont pas forcément les mêmes.

Les questions précédant la question 4) sont des aides pour arriver à résoudre ce *problème.*

1) *Etude d'un problème plus simple :* on considère deux dés à quatre faces (tétraèdriques réguliers), les faces étant marquées avec les chiffres de 1 à 4. IMAGE DES TETRAEDRIQUE.

a) Donner le tableau des résultats possibles pour les sommes de faces avec leur nombre d'apparition (analogue du tableau II).

b) On essaie de fabriquer une autre paire de dés à quatre faces différents donnant le même tableau II. On essaie le tableau I suivant :

	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
4	5	6	7	7
5	6	7	8	8

.

Ce tableau convient-il ?

c) Fabriquer alors une autre paire de dés à quatre faces différents qui convient !

d) Justifier qu'il n'existe qu'une paire de dés solution du *problème.*

2) *Retour au problème des dés cubiques*

a) *Un invariant :* on considère une paire de dés cubiques solution du *problème* décrit ci-dessus. Montrer que la somme des chiffres écrits sur les faces de ces deux dés fait 42 comme pour une paire de dés ordinaires.

b) Montrer que si on cherche une paire de dés à six faces solution du *problème* ci-dessus, et qu'on ordonne, pour chaque dé, ses faces dans l'ordre croissant dans un tableau comme ci-dessus, il n'est pas possible que les quatre premières faces de deux dés soient les mêmes que celles obtenues à la question 1) d).

c) Donner, sans justification, une paire de dés à six faces répondant au *problème* posé.

On ne demande pas de prouver l'unicité du résultat, mais ce résultat est en effet unique.

Indication : La répartition des 1 et des 2 pour ces dés pas ordinaires n'est pas celle des dés ordinaires.

Solution :

1) a)

somme	2	3	4	5	6	7	8
nombre d'apparition	1	2	3	4	3	2	1

b) Ce tableau ne convient pas car il y a 4 fois la somme 4.

1) **c) et d) ensemble**

N.B. 1 : dans les tableaux ci-dessous les faces sont énumérées dans l'ordre croissant. On parlera du dé vertical et du dé horizontal, pour désigner resp. celui dont les faces sont données verticalement et horizontalement.

N.B. 2 : Cette convention entraîne aussi que dans les tableaux, les chiffres sont toujours croissants vers la droite et vers le bas. Donc une entrée est toujours inférieure ou égale à toutes les entrées à sa droite et en dessous.

Le fait d'avoir un total qui fait 2 exige d'avoir un 1 sur chaque dé. Le fait d'avoir deux totaux 3 demande d'avoir deux fois 2+1 :

• *Par l'absurde* Si on choisit de mettre un 2 sur chaque dé : on doit ensuite pour fabriquer trois fois le total 4, et se distinguer des dés ordinaires, choisir de mettre deux fois 3 sur l'un des deux dés, sans restriction de généralité.

Mais alors comme le plus grand total doit faire huit, et que ce doit être l'endroit en bas à droite du tableau, on sait aussi qu'un a un 5 sur la quatrième face du second dés, ce qui nous donne le tableau suivant :

	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
5	6	7	8	8

Et on voit qu'il *ne convient pas* puisqu'on a deux fois le total 8.

Conclusion : Si on veut des dés différents des dés ordinaires, on *doit commencer* par mettre deux 2 sur l'un des dés et donc le tableau commence par :

	1	2	2	
1	2	3	3	

• Le fait d'avoir trois fois le total 4 impose déjà que la seconde face du dé "vertical" (cf. le N.B.) est un 3 : car sinon, toutes les entrées des deux dernières lignes seraient strictement plus grandes que 4. Donc on a déjà :

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	

Reste à fabriquer deux fois le total 4 : il n'y a que deux possibilités : ou bien on rajoute deux fois encore le 3 sur le dé vertical ou bien on rajoute un 3 sur chaque dé.

Montrons que la première possibilité ne convient pas : on obtiendrait :

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	
3	4	5	5	
3	4	5	5	

et donc trop de totaux valant 5.

Donc *nécessairement* le tableau est de la forme :

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6

Pour obtenir le total maximum qui doit faire 8, la dernière face du dé vertical doit faire 5, et donc nécessairement le tableau est le suivant.

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6
5	6	7	7	8

Réciproquement, il convient !

2) a) **Solution avec le langage probabiliste** Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire "résultat du premier dé" (resp. du second dé) pour les dés cubiques usuels.

Soit Y_1 (resp. Y_2) la variable aléatoire "résultat du premier dé" (resp. du second dé) pour les dés de Sicherman qu'on cherche.

Considérons l'espérance des premières v.a. : $E(X_1) = E(X_2) = \dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \dfrac{21}{6}$.

Par additivité de l'espérance (au programme de première) pour la v.a. $X = X_1 + X_2$, on en déduit que $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 7$.

De même pour $Y = Y_1 + Y_2$, on a $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2)$. Or, on veut que Y et X aient mêmes lois donc même espérance.

Donc on veut que $E(Y) = 7$.

Or comme les dés de Sicherman sont équilibrés, $E(Y_1) = \dfrac{1}{6}(f_1 + f_2 + \cdots + f_6)$ où f_i est le chiffre sur la face i du premier dés donc $E(Y_1) = S_1/6$ et $E(Y_2) = S_2/6$ où S_i est la somme des chiffres du dé i.

Donc $(S_1 + S_2)/6 = 7$ donc $S_1 + S_2 = 42$ comme pour les dés ordinaires.

Solution plus élémentaire : Comme les résultats sont les mêmes, la somme de toutes les cases du tableau (hors les cases "d'entrées") est la même pour le tableau des dés ordinaires et celui des dés de Sicherman.

Pour les dés ordinaires cette somme totale fait (ligne par ligne) :

$S = ((1+1)+(1+2)+\cdots+(1+6))+((2+1)+(2+2)+\cdots+(2+6))+\cdots+((6+1)+\cdots+(6+6))$

En notant $f_1, \ldots, f_6$ les faces du premier dés, S_1 la somme des faces du premier dé et S_2 celles des faces du second dé, on a donc $S = (6f_1 + S_2) + (6f_2 + S_2) + \cdots + (6f_6 + S_2) = 6S_1 + 6S_2 = 6(S_1 + S_2) = 6 \times 42$.

Le même raisonnement vaut pour les dés de Sicherman, en notant $f'_1, \ldots, f'_6$ les chiffres des faces du premier dé et $S'_1 = f'_1 + \cdots + f'_6$ et S'_2 la somme des faces du second dé :

la somme des entrées du tableau des dés de Sicherman vaut encore $6(S'_1 + S'_2)$ et vaut comme elle est égale à celle du tableau pour les dés usuels, on a la conclusion : $S'_1 + S'_2 = 42$.

b) *Par l'absurde*, si on repart du tableau obtenu au 1) :

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6
5	6	7	7	8

Il nous faut maintenant avoir 5 fois le total 6, il nous manque donc deux fois le total 6 dans le tableau.

	1	2	2	3		
1	2	3	3	4		
3	4	5	5	6	$*$	$*$
3	4	5	5	6	$*$	$*$
5	6	7	7	8	$\times$	$\times$
		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

et à cause du principe de croissance dans le tableau (N.B. 2 en début de solution), les cases avec des $\times$ sont interdites pour le total 6. En précisant même un peu ce principe ici, les cases avec des $*$ sont aussi interdites car verticalement il y a croissance stricte de 1 à 3 entre la ligne 1 et la ligne 2 donc le contenu de chaque case de la ligne 2 doit être strictement plus grand que celui de la case de la ligne 1 au-dessus d'elle.

a) **Premier cas** : on rajoute deux 5 sur le dé vertical : on obtient

	1	2	2	3		7
1	2	3	3	4		
3	4	5	5	6		
3	4	5	5	6		
5	6	7	7	8		12
5	6	7	7	8		12
5	6	7	7	8		12

car la contrainte d'avoir 12 comme total maximum face alors la sixième face du dé horizontal à être 7 et cela donne trois fois le total 12 : **cas exclu**.

b) **Deuxième cas (symétrique)** : on rajoute deux 5 sur le dé horizontal : **même contradiction avec le total 12**

c) **Troisième cas :** on rajoute un 5 sur chaque dé, ce qui donne :

	1	2	2	3	5	
1	2	3	3	4	6	
3	4	5	5	6	8	
3	4	5	5	6	8	
5	6	7	7	8		
5	6	7	7	8		
						12

On doit alors fabriquer encore deux fois le total 7 : et donc (à cause des 1) rajouter des faces 6.

Or si on met un 6 sur un des deux dés, à cause de la contrainte du total maximal qui fait 12, on a un 6 sur l'autre dés, et on obtient donc le tableau suivant :

	1	2	2	3	5	6
1	2	3	3	4	6	7
3	4	5	5	6	8	
3	4	5	5	6	8	
5	6	7	7	8		
5	6	7	7	8		
6	7	8	8			12

qui ne convient pas déjà parce qu'il donne six fois le total 8.

Conclusion : *On a épuisé les cas possibles. On ne peut fabriquer des dés de Sicherman en partant des dés à quatre faces du 1).*

c) **Résultat sans justification :**

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

Comment on peut trouver avec ce qui précède :

Lemme (donné dans l'indication) Si jamais on commence par :

	1	2
1	2	3
2	3	4

, on tombe sur les dés standard.

Preuve du lemme plus loin.

Application du lemme : On doit donc commencer par :

	1	2	2	
1	2	3	3	

et par la question 3), on ne doit pas placer les 3 comme pour les dés à quatre faces, i.e. pas comme suit :

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6

(car à ce stade, on n'a plus le choix pour la dernière ligne et on a le dés à 4 faces), donc nécessairement, on doit avoir :

	1	2	2	3	3	
1	2	3	3	4	4	
3	4	5	5	6	6	

• Il manque deux fois le total 5, on doit donc rajouter deux faces 4.

Premier cas : on met deux faces 4 sur les dés vertical : on obtient le tableau suivant :

	1	2	2	3	3	
1	2	3	3	4	4	
3	4	5	5	6	6	
4	5	6	6	7	7	
4	5	6	6	7	7	

, qui ne convient pas car on y a 6 fois le total 6.

Donc on est nécessairement dans le :

Deuxième cas : on met une face 4 sur chaque dé : on obtient le tableau suivant :

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8

Mais alors comme la case en bas à droite fait 12, on sait que la dernière face du dé vertical fait 8.

Ceci donne déjà le tableau

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
8	9	10	10	11	11	12

Comme il manque encore un total 6, on doit avoir une face 5 sur le dés vertical et donc :

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
8	9	10	10	11	11	12

Comme il manque un total 7, la face manquante doit être un 6, d'où *l'unicité* du candidat solution possible.

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

. On vérifie qu'il convient.

Preuve du lemme i.e. de la validité de l'indication : *Montrons que si on commence par*

	1	2
1	2	3
2	3	4

, on tombe sur les dés standard.

1ère étape : Montrons que si on prolonge ce petit tableau en

	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5

on ne peut construire des dés solutions du problème.

En effet à partir de ce nouveau tableau on a besoin d'obtenir 4 fois le total 5 : pour cela il faut rajouter deux faces qui valent 4. Or si on les met sur le dé horizontal, on a déterminé le premier dés. Mais alors, la dernière face du dés vertical vaudra 8 et on aura deux fois total 12, ce qui est exclu.

Donc on est obligé de prolonger le tableau précédent comme suit :

	1	2	3	3	4
1	2	3	4	4	5
2	3	4	5	5	6
4	5	6	7	7	8

On a alors besoin d'obtenir encore 3 fois le total 6, donc en rajoutant des faces 5. Pour la même raison que ci-dessus, on ne peut pas les mettre toutes les trois sur le dé vertical car cela compléterait le dé vertical, et donnerait trois fois le total maximum 12. Donc on est obligé d'en mettre 2 sur le dé vertical et 1 sur le dé horizontal ce qui donne le tableau :

	1	2	3	3	4	5
1	2	3	4	4	5	6
2	3	4	5	5	6	7
4	5	6	7	7	8	9
5	6	7	8	8	9	10
5	6	7	8	8	9	10

Alors à cause du total maximum qui fait 12 la dernière face est prescrite et on obtient le tableau :

	1	2	3	3	4	5
1	2	3	4	4	5	6
2	3	4	5	5	6	7
4	5	6	7	7	8	9
5	6	7	8	8	9	10
5	6	7	8	8	9	10
7	8	9	10	10	11	12

qui ne convient pas puisqu'on a une seule fois le total 11 par exemple !

2ème étape : A l'issue de la première étape, on sait donc qu'on doit nécessairement prolonger le petit tableau de départ

	1	2
1	2	3
2	3	4

, en

	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

On doit prolonger le tableau pour obtenir deux fois encore le total 5. La seule alternative au placement des dés standard est (sans restriction de généralité) :

	1	2	3	4	4
1	2	3	4	5	5
2	3	4	5	6	6
3	4	5	6	7	7

Montrons que ce tableau ne peut se prolonger en une solution du problème :

En effet, on doit encore construire deux fois le total 6 donc rajouter deux faces qui font 5.

• Sous-cas 1 : si on rajoute un 5 sur chaque dé : on a

	1	2	3	4	4	5
1	2	3	4	5	5	6
2	3	4	5	6	6	7
3	4	5	6	7	7	8
5	6	7	8	9	9	10

. Alors reste à fabriquer 3 fois le total 7 et c'est impossible car il n'y a plus que deux faces à rajouter.

• Sous cas 2 : si on rajoute deux cinq sur le dé vertical (il est exclu de les rajouter sur le dé horizontal qui a déjà cinq faces remplies).

On obtient alors

	1	2	3	4	4
1	2	3	4	5	5
2	3	4	5	6	6
3	4	5	6	7	7
5	6	7	8	9	9
5	6	7	8	9	9

Reste alors à fabriquer trois fois le total 7 avec seulement deux faces disponibles : impossible.

Fin donc de la deuxième étape.

Troisième étape : A l'issue de la deuxième étape, on sait qu'on doit nécessairement prolonger notre petit tableau initial en le tableau standard :

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

On doit encore fabriquer deux fois le total 6. Or si on mettait deux faces 5 sur le même dé, on compléterait ce dés, et on aurait nécessairement deux fois le total maximum 12, ce qui est exclut.

On en déduit immédiatement qu'on ne peut compléter ce tableau qu'en le tableau des dés standard (OUF). $\square$

Appendice : une autre méthode, avec les fonctions génératrices (d'après Wikipedia)

Généralités : Pour une variable aléatoire X à valeurs entières dans $[[1,n]]$ on définit son “polynôme générateur” :

$$G_X(T)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)T^k.$$

Pour deux variables aléatoires indépendantes X et Y, on remarque que : $G_{X+Y}(T)=G_X(T)\times G_Y(T)$, puisque pour tout k, $P(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$.

Ici : Considérons X_1 représentant le lancé du premier dé et X_2 celui du second dé, on considère $X=X_1+X_2$.

On sait que $G_{X_1}=G_{X_2}=\dfrac{1}{6}(T+T^2+\cdots+T^6)$ Donc $G_X=\dfrac{1}{36}(T+T^2+\cdots+T^6)^2$.

On cherche deux autres var. aléatoires Y_1,Y_2 tels que $G_{Y_1}.G_{Y_2}=G_X$.

Pour cela on cherche une décomposition du polynôme $36G_X$ en un produit $P.Q$ de deux polynômes à coefficients *positifs* tels que, pour chaque polynôme, la somme de tous les coefficients fasse 6 : en effet chaque dé est *équilibré* et donc les coefficients de G_{Y_1} doivent s'écrire $a_i/6$ où a_i est le nombre de faces portant le nombre i, le nombre total de faces étant la somme des a_i.

Or la somme des coefficients pour un polynôme P est simplement la valeur $\widetilde{P}(1)$. On veut donc que $\widetilde{P}(1)=\widetilde{Q}(1)=6$.

Or $6G_{X_1}=T(T+1)(T^2+T+1)(T^2-T+1)$ (D.P.I. dans $\mathbb{Z}[T]$).

Donc $36G_X=T^2(T+1)^2(T^2+T+1)^2(T^2-T+1)^2$.

• A cause de la contrainte qu'aucun des deux dés ne doit avoir de face avec un 0, chacun des polynômes P et Q cherché admet un T en facteur.

• Comme $\widetilde{T+1}(1)=2$ et $\widetilde{T^2+T+1}(1)=3$ et $\widetilde{T^2-T+1}(1)=1$ et qu'on veut que $\widetilde{P}(1)=\widetilde{Q}(1)=6$, on est sûr que P et Q ont chacun un facteur $(T+1)$ et un facteur (T^2+T+1).

Ainsi on sait déjà que $P=T(T+1)(T^2+T+1)P_1$ et $Q=T(T+1)(T^2+T+1)Q_1$ avec $P_1Q_1=(T^2-T+1)^2$.

Le cas où $P_1=Q_1=T^2-T+1$ est celui des dés ordinaires. Il ne reste donc plus que la possibilité $P_1=(T^2-T+1)^2$ et $Q_1=1$.

On obtient donc $P=T(T+1)(T^2+T+1)(T^2-T+1)^2=(T^8+T^6+T^5+T^4+T^3+T)$ et $Q=T(T+1)(T^2+T+1)=(T^4+2T^3+2T^2+T)$.

Remarque : *On comprend bien aussi le fait que la solution à quatre faces n'est pas la restriction de la solution à 6 faces, puisque le troisième polynôme cyclotomique* $(T^4-1)/(T-1)$ *ne divise pas le cinquième* $(T^6-1)/(T-1)$.