

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE I - U.F.R. M.I.M.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Discipline: Mathématiques

ECOLE DOCTORALE de Mathématiques et Informatique de Marseille

présentée et soutenue publiquement

par

Romain BONDIL

le 10 juin 2002

Géométrie des problèmes de multiplicité et équisingularité dans un idéal

Directeur de thèse :

M. LÊ Dũng Tráng

RAPPORTEURS

Mme Monique LEJEUNE-JALABERT Directeur de recherche, Université de Versailles
M. Mark SPIVAKOVSKY Directeur de recherche, Université de Toulouse

JURY

M. Paul-Jean CAHEN	Professeur, Université Aix-Marseille III
M. LÊ Dũng Tráng	Professeur, Université de Provence
Mme Monique LEJEUNE-JALABERT	Directeur de recherche, Université de Versailles
M. Mark SPIVAKOVSKY	Directeur de recherche, Université de Toulouse
M. Bernard TEISSIER	Directeur de recherche, Université de Paris VII
M. David TROTMAN	Professeur, Université de Provence

Remerciements singuliers et pluriels

Ma première rencontre avec Lê Dũng Tráng date de novembre 1996, alors que je venais lui demander un sujet de mémoire de D.E.A. A l'occasion de ce mémoire, son souci constant de me permettre de dégager des concepts (géométriques ou combinatoires) au-delà des descriptions calculatoires m'a séduit et a participé à ma décision d'entreprendre une thèse.

Au cours de cette thèse, j'ai eu bien davantage l'occasion de profiter de la personnalité de mathématicien de Lê Dũng Tráng, d'abord de son extraordinaire intuition qui traverse les difficultés techniques, ensuite de l'étendue de sa curiosité et de sa culture mathématique, qui donnent libre champ à ses étudiants de s'orienter vers tel aspect de la théorie des singularités. Sur le plan humain, j'ai profité chez Tráng, outre sa patience, de son optimisme constant : il m'a appris que, certainement, sans optimisme on ne peut pas démontrer de théorème. Le sien me paraît indestructible, et si je ne suis parfois pas sorti de son bureau plus assuré techniquement, j'y ai toujours retrouvé cette assurance de la valeur de l'activité mathématique, activité qui me semble chez lui extraordinairement naturelle!

J'ai eu aussi la chance de rencontrer Bernard Teissier au tout début de cette thèse, et de bénéficier de ses conseils et de ses encouragements. Ensuite, Bernard Teissier n'a cessé de suivre et soutenir mes différents travaux par son invitation à la conférence internationale de Saskatoon d'abord, puis par son accueil, patient, clairvoyant et disponible même pour les points les plus techniques, au séminaire de l'Institut de Chevaleret.

La préparation de ces séminaires me permit de passer au crible les détails des travaux présentés ici. Ils furent aussi l'occasion de rencontre avec (notamment) M. Vaquié, O. Piltant, A. Reguera, et bien sûr Monique Lejeune-Jalabert. Je remercie chacun d'eux pour les conversations qu'ils m'ont accordé, et les mathématiques que j'y ai apprises.

Les travaux de Monique Lejeune-Jalabert ont eu une grande influence sur moi. Le survey [LJ] d'une part, et ses travaux avec G. Gonzalez-Sprinberg d'autre part, m'ont ouvert la compréhension des propriétés des familles de courbes, et ont motivé mes travaux pour réunir ces deux points de vues. Dans chacun de ces articles de Monique Lejeune-Jalabert, j'ai retrouvé le même soin du détail et de la clarté d'exposition : de tout cela je veux la remercier, ainsi, bien sûr que du travail de rapporter cette thèse qu'elle a bien voulu accepter.

Les travaux de Mark Spivakovsky, et notamment ses "sandwichs", ont également nourri ma formation, et aussi certains projets non aboutis... pour l'instant! J'ai été très honoré qu'il ait accepté la charge de rapporteur de cette thèse. Je dois dire que j'ai bénéficié d'un rapporteur exceptionnel qui non content de relever une erreur dans un résultat intermédiaire, m'a aussi donné la solution pour y palier en améliorant ainsi substantiellement la fin du premier chapitre.

L'algèbre commutative est le substrat technique d'une partie de cette thèse : je remercie Paul-Jean Cahen pour son cours d'algèbre commutative et quelques discussions "divisorielles". Je suis heureux qu'il ait accepté de faire partie de ce jury sur une thèse dont les deux premiers chapitres voudraient être une *algèbre figurée* (cf. [Ei] p. 23)...

Je dois à David Trotman ma première rencontre avec la théorie des singularités (réelles) en été 1995, lors de mon stage de première année d'E.N.S. Qu'il me soit permis ici de le remercier de cette première expérience. Je le remercie aussi comme directeur de l'école doctorale, pour les opportunités de déplacements à Nice, Trieste, Paris et Saskatoon, qui m'ont été données.

A l'Université de Nice, je veux remercier les professeurs J. Briançon, Ph. Maisonobe, et M. Merle, qui m'avaient ouvert le monde des singularités des courbes encore lors d'un stage en 1996. Durant ma thèse, j'ai retrouvé avec plaisir cette université lors des séminaires Nice-Marseille, puis à l'occasion d'une invitation informelle de Michel Merle, qui m'a écouté une journée entière!

A l'I.M.L. de Marseille, je veux remercier Jean-Paul Brasselet et Anne Pichon pour l'organisation d'un groupe de travail... à reprendre! Merci aussi à Jean-Paul pour son cours torique, et sa disponibilité toujours souriante même pour m'accepter en conférencier de dernière minute au C.I.R.M.

Au C.M.I. enfin, j'ai bénéficié aussi des cours et des conversations de G. Dloussky et K. Oeljeklaus, ainsi que de celles de leurs élèves Dan Zaffran et Laurent Bruasse. Par delà la distinction analytique/algébrique ou local/global, certains objets communs ressurgissent avec surtout la préoccupation de faire de la géométrie.

Pour revenir au domaine des singularités, je veux aussi remercier tout spécialement les élèves

de Lê D.T. et B. Teissier que j'ai rencontrés à Marseille et à Paris. En tout premier lieu, je remercie très chaleureusement mon ami Jawad Snoussi pour sa présence au début de ma thèse, pour l'introduction au domaine des singularités des surfaces que sa propre thèse a constitué pour moi, et par dessus tout pour toutes les questions que nous avons échangées par email ou de vive voix depuis quatre ans. Je veux ensuite remercier Meral Tosun, Fathi Youcef, Patrick Popescu-Pampu, Pedro González-Pérez, pour ces moments privilégiés de discussions sur des thèmes singuliers, pour leur écoute, leurs questions ou leurs explications. Parmi ceux qui sont encore en cours de thèse, je souhaite bon courage à Jean Pagnon et Eric Akeke : merci spécialement à Jean pour sa ténacité (jointe à celle de Lê) à nous ouvrir le monde des singularités des orbites nilpotentes, malgré ma propre lenteur à y rentrer.

Parmi les autres compagnons-thésards du C.M.I, je veux remercier tout spécialement Guillaume Valette et Dwi Juniati. Merci à Guillaume pour avoir partagé chacun à nos bureaux ces dures heures de début d'après-midi, que venaient rythmer Baudelaire, Rimbaud, ou bien Brassens ou Gaston Berger... alors que la machine à café *nous versait son poison pour qu'il nous reconforte*. Merci à Yuni, pour son sourire, parce qu'elle a « toujours gardé le courage », son exemple rendant illusoire nos petites déprime : *terima kasih banyak*.

Merci à tous ceux qui sont passés dans mon bureau pour m'« embêter avec leurs problèmes » et ainsi m'ouvrir à d'autres mathématiques : Sylvain (merci aussi pour Linux), Jérôme, Emmanuel...

Le travail de cette thèse a été fait pour l'essentiel à Marseille, au Centre de Mathématiques et d'Informatique; je voudrais en remercier ici tous les responsables (passés et présents) pour les conditions de travail excellentes dont j'ai pu bénéficier ici, notamment l'accès permanent à l'*univers* (voir p. 183) et à la tranquillité de ma cellule R 122. Un merci spécial à Noelle Tabarracci pour sa faculté à régler tous nos problèmes, et à Anna Wojciechowska et Gérard Henry pour les livres et les ordinateurs respectivement.

Malgré son confort, l'univers de la cellule R 122 ne suffisait pas. Merci au soleil et au vent sur les Calanques et la Sainte Victoire, à tous ceux qui ont tracés des voies sur ces falaises; merci à Gérard pour les discussions à rallonge sur les voies du week-end, et quand le temps était trop court pour sortir, merci aux amis de la salle GRIMPER : ça fait du bien quelques blocs entre deux lemmes!

Merci enfin à ma famille et mes amis, notamment pour tout le temps que, grâce à eux, je n'ai pas consacré à cette thèse ! Un merci particulier à mon frère Frédéric pour l'exemple de sa ténacité dans sa propre thèse. Merci à mes parents pour leur soutien, et spécialement à ma mère, à qui je dédie cette thèse avec l'ensemble de mes efforts pour étudier, qui ne sont qu'une modeste réponse à tout ce qu'elle a pu nous donner.

Loin de la surface des choses, j'adresse enfin à mon épouse Marie un merci qui n'est destiné qu'à elle seule, comme le murmure d'un fin silence entre nous.

Table des matières

I Propriétés géométriques d'éléments génériques dans un idéal	9
Introduction	11
1 Éléments superficiels et géométrie	17
1.1 Généralités sur les éclatements	20
1.1.1 Construction de l'éclatement d'un idéal	20
1.1.2 Transformée faible comme section par une hypersurface	22
1.1.3 Équation de la transformée faible	24
1.1.4 Fibre au-dessus de l'idéal maximal	24
1.1.5 Notion de transformée stricte	26
1.1.6 Dimension dans les éclatements	27
1.1.7 Décomposition primaire de R et éclatement	28
1.2 Invariants de Hilbert-Samuel d'un idéal	29
1.2.1 Fonctions et polynômes de Hilbert-Samuel	29
1.2.2 Caractéristique d'Euler, résolutions	31
1.2.3 Éléments superficiels	32
1.3 Éléments transverses, approche algébrique	35
1.3.1 Définitions et motivations	35
1.3.2 Deux suites exactes	37
1.3.3 Sorite d'égalité dans $\text{in}_I(f).G(I,R) \subset \text{in}_I(fR)$	38
1.3.4 Injectivité de la multiplication par \bar{f} dans $G(I,R)$	40
1.3.5 Caractérisation des éléments F -transverses	42
1.3.6 Caractérisation des éléments P^1 -transverses	44
1.3.7 Éléments superficiels et P^0 -transversalité	44
1.4 Géométrie des éléments superficiels	46
1.4.1 Traduction géométrique de la notion d'élément superficiel	46
1.4.2 Approche géométrique de la caractérisation de Kirby	50
2 Éléments v-superficiels	57
2.1 Définition et exemples	57
2.1.1 Définition avec la transformée faible	57
2.1.2 Caractérisation dans $G(I,R)$	59
2.1.3 Un exemple d'élément v -superficiel non superficiel	59
2.2 Théorie géométrique de la multiplicité	60
2.2.1 Multiplicités de modules	60
2.2.2 Un théorème de Flenner-Vogel	61
2.2.3 Applications à la multiplicité $e(I/f, R/f)$	62
2.3 Éléments v -superficiels et réductions	65
2.3.1 Réduction et clôture intégrale	65

2.3.2	Conditions équivalentes pour avoir une réduction	66
2.3.3	Application de la condition (DZ) : élément v^0 -superficiel	71
2.3.4	Cas des idéaux m -primaires : v^0 -superficiel équivaut à v -superficiel	73
2.3.5	Application : théorème de Rees	74
2.3.6	Conditions v et v^0 pour les idéaux non m -primaires	76
2.3.7	Cas où la largeur analytique est maximale : un exemple	78
2.3.8	Cas où la largeur analytique est minimale : équidimensionnalité et théorème de Boeger	80
2.4	Passage à l'éclatement normalisé	82
2.4.1	Cadre des anneaux réduits	82
2.4.2	Clôture intégrale des idéaux et normalisation	83
2.4.3	Obtention de \bar{I} à partir de l'éclatement normalisé	84
2.4.4	Caractérisation des éléments v -superficiels sur \bar{S}_I	86
3	Éléments généraux	89
3.1	Pinceaux et familles de courbes	90
3.1.1	D'un pinceau à une famille plate de courbes	90
3.1.2	Propriétés topologiques des familles plates de courbes complexes	91
3.1.3	Conditions de résolutions simultanées	92
3.2	Directions exceptionnelles	95
3.2.1	Définitions	95
3.2.2	Éléments généraux vus dans une résolution	100
3.2.3	Éléments généraux et composantes de Tyurina	102
3.3	Nombre de Milnor	104
3.3.1	Calcul du nombre de Milnor d'un élément général	104
3.3.2	Première caractérisation	106
3.3.3	Caractérisation des éléments généraux par le nombre de Milnor	107
3.3.4	Cas de la dimension supérieure	113
A	Schémas projectifs	115
A.1	Structure de schéma projectif	115
A.2	Sous-schémas fermés	116
A.3	Un morphisme canonique	117
A.4	Morphismes de schémas projectifs	117
A.5	Cas particulier des plongements fermés	117
A.6	Modules \tilde{M} sur $\text{Proj } A$	118
A.7	« Bons » anneaux gradués	119
B	Questions de dimensions	121
B.1	Dimension de l'espace total de l'éclatement	121
B.2	Dimension des sous-schémas de Cartier	122
B.3	Biéquidimensionnalité	124
B.4	Dimensions des Spec et Proj d'anneaux gradués	125
B.5	La dimension des fibres	126
C	Calculs avec Singular	127
C.1	Ordre monomial et bases standard	128
C.1.1	Ordre monomial	128
C.1.2	Exemples d'ordres monomiaux	129
C.1.3	Quelques propriétés des ordres monomiaux	131

C.1.4	Notion de base standard	131
C.2	Lien avec la notion de I -base standard	132
C.2.1	Notion de I -base standard	132
C.2.2	M -Bases standard et ordres locaux raffinant la valuation	133
C.2.3	Calculs des cônes normaux pour un idéal non maximal	135
C.3	Applications : polynômes de Hilbert-Samuel	137
C.3.1	Du local au global	137
C.3.2	Fonction de Hilbert d'anneaux gradués $G(m, R)$	137
C.3.3	Code utilisé	138
C.3.4	Fonction de Hilbert pour un idéal m -primaire $I \neq m$	138
C.4	Algorithmes avec des ordres globaux	138
C.4.1	Calcul de décomposition primaire	138
C.4.2	Images d'applications, méthode d'élimination	139
 II Résolution des surfaces par éclatements normalisés		141
1	Introduction	143
1.1	Résolution des singularités des courbes	143
1.2	Cas des singularités de dimension supérieure	144
1.3	Cas particulier des surfaces	144
1.4	Le théorème démontré ici	145
1.5	Sommaire	147
2	Éclatement normalisé d'une surface complexe	148
2.1	Singularités de courbes et de surfaces	148
2.2	Normalisation	149
2.3	Éclatement (et éclatement normalisé) d'une singularité en O	150
3	Systèmes de paramètres génériques	151
3.1	Multiplicité et projections génériques	152
3.2	Clôture intégrale des idéaux et éclatements normalisés	153
3.3	Clôture intégrale et multiplicité	155
3.4	Éclatements de systèmes de paramètres	155
4	Discriminant et nombre de Milnor	156
4.1	Discriminant comme idéal de Fitting	156
4.2	Nombre de Milnor des courbes complexes	157
4.3	Nature du discriminant Fitting	160
4.4	Calcul de la partie divisorielle du discriminant	161
4.5	Un calcul de discriminant Fitting	162
5	Cône tangent et sections hyperplanes	164
5.1	Cône tangent	164
5.2	Notion de section hyperplane	165
5.3	Sections v -superficielles	166
5.4	Sections hyperplanes générales	170
6	Propriétés des singularités minimales	171
6.1	Singularités minimales de dimension 1	172
6.2	Singularités minimales de surface	174
7	Calcul du discriminant après un éclatement	176
8	Application au théorème de résolution	178
8.1	La paire (ν, γ)	178
8.2	Méthode de Jung avec projections génériques	178

8.3	Application : réduction au cas minimal	179
8.4	Le cas des singularités minimales	180
9	Perspectives	180
Bibliographie		183

Première partie

Propriétés géométriques d'éléments génériques dans un idéal

Introduction

Comme indiqué par la table des matières, la thèse se compose de deux parties intitulées respectivement :

I Propriétés géométriques d'éléments génériques dans un idéal

II Résolution des surfaces par éclatements normalisés

La partie I, formée de trois chapitres (avec trois annexes insérées pour la commodité du lecteur) constitue le travail principal de la thèse, que l'on va présenter dans l'introduction qui suit. Au moment de la rédaction de ces lignes, le résultat principal du chapitre 3 a seulement été publié sous la forme d'une Note en commun avec Lê D.T., intitulée¹: *Caractérisations des éléments superficiels d'un idéal* (citée [B-L]).

La partie II est à quelques modifications près, la reproduction du texte d'un article en commun avec Lê D.T., cité [RES] dans la bibliographie.

Cette seconde partie possède sa propre introduction (p. 143 et seq.). Disons seulement ici qu'il s'agit d'un texte introductif à la résolution des singularités des surfaces (complexes) contenant l'exposé d'une méthode originale de résolution (décrite aux § 7 et 8), que l'on a fait précéder d'une présentation détaillée de différents aspects classiques de la théorie des singularités de surfaces (des § 1 à 5: éclatements, multiplicités, discriminants, nombres de Milnor, cônes tangents, et sections hyperplanes).

Un autre point important de la partie II, qui justifie aussi son incorporation à la suite de la partie I, est qu'on y trouve aussi (surtout au § 6) un exemple frappant d'application des résultats de la théorie de la multiplicité (donnés dans la partie I au § 2.2.3) dans le cas de l'étude des singularités minimales de surfaces. Le lecteur trouvera ainsi au II § 6, la démonstration d'un certain nombre de propriétés des singularités minimales de surfaces (données sans démonstration dans [Ko]).

La suite de l'introduction va exposer le contenu de la première partie de la thèse.

Propriétés géométriques d'éléments génériques dans un idéal (d'un anneau local)

L'objet étudié

i) Étude d'une singularité – On a rajouté dans le titre ci-dessus la précision que l'on se place dans un *anneau local*, c'est-à-dire un anneau commutatif avec unité possédant un unique idéal maximal (on supposera en outre cet anneau *noethérien*). Dans les deux premiers chapitres, on ne suppose initialement rien de plus sur cet anneau. Cependant, si

1. un peu improprement puisqu'il y est davantage question d'éléments *v*-superficiels que d'éléments superficiels... (voir plus loin la définition de ces termes).

R est notre anneau local, on pense plutôt à lui comme à un objet géométrique « local », qui est le schéma affine $\text{Spec } R$ associé², que l'on appelle aussi *une singularité*.

On s'intéresse donc aux singularités de manière très large dans ces deux premiers chapitres, alors qu'au chapitre 3, on considère de manière beaucoup plus particulière les *anneaux locaux analytiques normaux de dimension deux* c'est-à-dire géométriquement les germes de surfaces complexes normales.

Avant que les deux premiers chapitres ne prennent leur vie propre, ils ne devaient que servir de préliminaires généraux à l'exposé du chapitre 3 qui détaille un résultat sur les surfaces normales présenté dans la Note [B-L]. Les techniques et les idées utilisées dans ce chapitre 3 sont parfois très particulières à la dimension deux, cependant le résultat principal fait sens en dimension quelconque (à condition de se restreindre au cas des intersections complètes, pour définir un nombre de Milnor)³.

ii) Éléments d'un idéal – Il faut ensuite noter que pour cette étude d'une singularité, on s'intéresse aux « éléments d'un idéal » de notre anneau local. Ici, il me paraît souhaitable vis-à-vis du lecteur sans goût particulier pour l'algèbre, de souligner que la motivation originelle se trouve là encore dans l'étude exposée au chapitre 3. Il s'agissait initialement de mieux comprendre les propriétés des *pinceaux de courbes*⁴ tracés sur une singularité de surface normale, en prolongement du travail de J. Snoussi dans sa thèse [Sn-1] (Chap. 5).

Il est assez facile de définir une notion naturelle d'« élément général » dans un pinceau de courbes, par exemple, numériquement, comme toutes les courbes de nombre de Milnor minimum. Cependant si l'on est sur une surface (S, O) et qu'on considère deux courbes f, g définissant un idéal (f, g) de même multiplicité que l'idéal maximal et deux autres courbes (f', g') avec la même propriété, on a envie de comparer les propriétés des éléments généraux respectifs des pinceaux $\alpha f + \beta g$ et $\alpha' f' + \beta' g'$.

On s'aperçoit alors que pour comparer des pinceaux entre eux, on a avantage à considérer plutôt *les idéaux* engendrés par ces pinceaux (et même les *clôtures intégrales* de ces idéaux) (cf. notamment § 3.3.2).

On y gagne un certain nombre de résultats d'invariance (par exemple le nombre de Milnor minimal dans l'idéal est atteint comme nombre de Milnor minimal dans tout pinceau qui engendre une *réduction* de l'idéal).

Ce point de vue des idéaux englobe aussi celui développé dans le cadre de l'étude des familles de germes de courbes planes avec la théorie des idéaux complets de O. Zariski (cf. [S-Z] App. 5, [Li-4] et [LJ]).

Finalement on peut dire qu'étudier les singularités à partir des idéaux de l'anneau local considéré, c'est étudier les familles linéaires de *diviseurs de Cartier* tracés sur cette singularité, ce qui plus restrictif que l'étude générale des familles de diviseurs de Weil tracés sur cette même singularité (comparer e.g. à [G-L1]).

iii) Trois conditions génériques – Si R est un anneau local noethérien d'idéal maximal m , et dans le cas particulier où I est un idéal m -primaire, alors le quotient I/mI est un R/m -espace vectoriel de dimension finie.

Ainsi, si l'on étudie des propriétés des éléments $f \in I$ qui ne dépendent que de la classe de f dans I/mI , on dira qu'une telle propriété est *générique* si elle définit un ensemble générique (contenant un ouvert dense pour la topologie de Zariski) de l'espace vectoriel I/mI .

Dans la thèse, on étudie (essentiellement) trois propriétés vérifiant cette condition de

2. resp. l'espace analytique $\text{Specan } R$ si R est un anneau analytique

3. et est déjà vérifié en dimension supérieure dans certains cas particuliers, voir la fin du chapitre 3

4. c'est-à-dire les familles de courbes de la formes $\alpha f + \beta g = 0$, où α, β varient dans \mathbb{C} et f, g sont deux germes de fonctions

généricité, qui correspondent à chacun des trois chapitres. Ces trois conditions définissent trois types d'éléments d'un idéal I :

- 1) les éléments superficiels,
- 2) les éléments v -superficiels,
- 3) les « éléments généraux » (avec une définition bien particulière⁵).

Nature de l'étude

i) Des conditions géométriques – Un premier point fondamental dans notre point de vue est que les trois conditions précédentes sont données par des *conditions géométriques* c'est-à-dire comme des conditions qui s'expriment sur l'éclatement ou l'éclatement normalisé de l'idéal I .

La définition des *éléments superficiels* est due à P. Samuel et admet plusieurs expressions algébriques « élémentaires » mais pas forcément transparentes. **Dans le chapitre 1**, nous explicitons le cadre et les outils géométriques permettant de traduire cette définition pour un élément $f \in I$ comme une condition géométrique d'incidence d'un « hyperplan »⁶ associé à f avec l'espace de l'éclatement de l'idéal I . Il apparaît que la compréhension en ces termes de la définition de Samuel permet de mieux en utiliser les propriétés : notamment on donne une nouvelle formulation assortie d'une démonstration « géométrique » d'une caractérisation des éléments superficiels due originellement à D. Kirby, qui donne des propriétés importantes (comme la P^0 -transversalité, cf. § 1.4.2).

Compte-tenu de l'interprétation des éléments superficiels donnée au chapitre 1, on peut définir une propriété plus faible des éléments d'un idéal que l'on appelle *v -superficialité*, à cause de sa caractérisation (dans le cas particulier des anneaux réduits) par les valuations de l'élément le long des composantes exceptionnelles de l'éclatement normalisé de I . L'étude des *éléments v -superficiels* fait l'objet du **chapitre 2**. L'utilisation d'une condition géométrique sur l'éclatement normalisé pour étudier les clôtures intégrales des idéaux (et donc aussi les problèmes de multiplicité) dans le cadre des anneaux réduits, rejoint le point de vue développé notamment par M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier dans leur séminaire ([LJ-Te]), mais l'intérêt d'une définition plus générale, pour les anneaux non nécessairement réduits, apparaît rapidement si l'on s'intéresse par exemple aux propriétés des sections du cône tangent (non nécessairement réduit) à une variété singulière : cela est illustré dans l'étude faite pour les singularités minimales dans la deuxième partie (cf. [RES] § 6) où le chapitre 2 sert en quelque sorte de yoga sur les multiplicités des sections hyperplanes.

Enfin, **au chapitre 3**, on introduit, dans le cadre des surfaces complexes, et avec des arguments de transversalité, les *éléments généraux* d'un idéal qui sont des éléments v -superficiels vérifiant en outre une propriété de transversalité. Les éléments généraux de l'idéal maximal d'une surface normale sont exactement, en fixant un plongement de la surface pour que l'élément en question soit une section hyperplane, les sections hyperplanes qui ne sont pas limites d'hyperplans tangents (cf. [Sn-2]).

ii) Des conditions ayant une caractérisation numérique – Le second point fondamental est qu'à chacune des propriétés géométriques énumérées ci-dessus correspond (ou presque) une caractérisation *numérique*.

Précisément, **au chapitre 1**, on explique comment les éléments superficiels sont reliés à l'étude des polynômes de Hilbert-Samuel (notés $P_{I,R}^1$ et $P_{I,R}^0$), et on caractérise les éléments

5. la terminologie est issue de celle de « section hyperplane générale » utilisée par Lê et Teissier : les sections hyperplanes générales (définies comme « non limites d'hyperplans tangents ») ne sont autres que les éléments généraux de l'idéal maximal au sens de notre définition.

6. ou plutôt d'une hypersurface de degré s si $f \in I^s - I^{s+1}$

$P_{I,R}^1$ -transverses (c'est-à-dire les éléments $f \in I$ pour lesquels on peut obtenir le polynôme de Hilbert-Samuel $P_{I/f,R/f}^1$ comme une différence des valeurs du polynôme $P_{I,R}^1$) comme les éléments superficiels non diviseurs de zéros. On montre aussi que les éléments superficiels sont P^0 -transverses mais on ignore si cette propriété caractérise les éléments superficiels.

Au chapitre 2, on montre comment les éléments v -superficiels sont reliés à la théorie de la multiplicité pour les idéaux m -primaires, et d'autre part comment une variante de la v -superficialité, appelée v^0 -superficialité, est reliée naturellement à la notion de dépendance intégrale des idéaux. Ce point de vue est particulièrement important d'une part pour certains arguments du chapitre suivant, et d'autre part parce qu'il conduit à des démonstrations nouvelles des théorèmes de Rees et Böger sur le lien entre multiplicité et dépendance intégrale.

Alors que la notion d'élément v -superficiel était déjà présente dans la Note [B-L] et appliquée au problème de dépendance intégrale, on doit ici souligner l'influence du livre récent de H. Flenner, L. O'Carroll et W. Vogel: *Joins and Intersection* (cité [FOV]) pour ce qui concerne la théorie de la multiplicité, et par ricochet, l'application aux théorèmes de Rees et Böger.

Enfin, **au chapitre 3**, le théorème principal caractérise les éléments généraux d'un idéal comme les éléments à nombre de Milnor minimum.

Cette caractérisation numérique, telle quelle, ne peut s'étendre en dimension supérieure, sauf pour les intersections complètes. Mais même dans ce cas, on ignore comment l'obtenir pour un idéal m -primaire autre que l'idéal maximal (voir le § 3.3.4 pour le cas de l'idéal maximal).

La part des idéaux m -primaires et comment aller plus loin

Le **chapitre 3** est consacré seulement aux idéaux m -primaires: cela est lié à sa motivation originelle qui était d'avoir une théorie unique comprenant la théorie des pinceaux de courbes de \mathbb{C}^2 et la théorie des pinceaux de courbes sur une surface normale esquissée dans [Sn-1] qui n'étudiait que les pinceaux engendrant un idéal de même multiplicité que l'idéal maximal de la surface.

En revanche, dans l'étude des deux premiers chapitres, on a essayé de développer le plus possible le cas général des idéaux non m -primaires. **Dans le chapitre 1**, les caractérisations géométriques des éléments superficiels sont données en toute généralité, alors que celles dépendant des invariants de Hilbert-Samuel se limitent au cas m -primaire. De même, **dans le chapitre 2**, le lien entre élément v -superficiel et clôture intégrale est donné en toute généralité, ce qui permet de comprendre des distinctions qui n'apparaissent pas dans le cas m -primaire (cf. les exemples § 2.3.7 et 2.3.8), et même si le lien avec la multiplicité n'est donné que dans le cas m -primaire, cela a aussi des conséquences pour les idéaux non m -primaires (théorème de Böger).

Pour aller plus loin, parmi les *invariants numériques* connus pour les idéaux non m -primaires, il semble que la j -multiplicité de [FOV] (introduite comme un coefficient dans le calcul du *cycle de Vogel* en théorie de l'intersection) soit assez significative pour donner des généralisations de résultats de type Rees-Böger: on renvoie à l'article récent de H. Flenner et M. Manaresi ([Fl-Ma]) où il est montré que pour $J \subset I$ deux idéaux quelconques d'un anneau local (complet équidimensionnel) la condition *J est une réduction de I* est équivalente à l'égalité $j(IR_p, R_p) = j(JR_p, R_p)$ pour tous les $p \in \text{Spec } R$.

Rôle des annexes face aux motivations de la thèse

La première partie comprend trois annexes numérotées A,B,C. Elles ne contiennent aucun résultat nouveau mais la nature de leur contenu est assez différent de l'une à l'autre.

Le contenu de **l'annexe A** est très classique: il s'agit d'un glossaire sur les schémas projectifs. Suivant l'expression consacrée (cf. [EGA] ou l'introduction de [Kl-Th]) il ne s'agit que de géométrie algébrique élémentaire.

La motivation de cette annexe A s'enracine dans celle du chapitre 1 (et aussi du chapitre 2): *décrire dans un langage géométrique ce que l'on écrit d'habitude seulement en terme d'algèbre commutative*⁷ (par exemple éviter le recours au lemme d'Artin-Rees en le réduisant, au pire, au fait qu'un éclatement est vide si, et seulement si, l'idéal est nilpotent) pensant que ce cadre géométrique donne des formulations plus « naturelles ».

On notera que cela ressemble beaucoup à la motivation du plus difficile [Kl-Th], qui s'intéresse aux multiplicités de Buchsbaum-Rim et dont le contenu doit sûrement, pour qui l'a compris, redonner comme cas particulier les résultats sur la multiplicité et la clôture intégrale du chapitre 2 (pas ceux du chapitre 1 qui sont de nature différente), également par des méthodes géométriques.

Dans [Kl-Th], le langage de la « géométrie algébrique élémentaire » sert parfois de repoussoir au lecteur peu averti, même motivé! La nature plus classique des objets étudiés ici (multiplicité de Samuel et non de Buchsbaum-Rim) fait espérer à l'auteur de la présente thèse que le lecteur (et l'auteur lui-même!) pourra utiliser ce travail comme préliminaire à la compréhension géométrique des problèmes de multiplicités, domaine visiblement en pleine activité comme le souligne le récent travail de Simis, Ulrich et Vasconcelos (cf. [SUV]) qui donne des preuves plus simples de résultats de [Kl-Th].

L'annexe B intitulé *Questions de dimensions* est de nature assez technique: elle étudie un certain nombre de *vérités* intuitives (i.e. vraies pour les schémas de type fini sur un corps!) pour le comportement de la notion de dimension dans les schémas généraux. Disons seulement que le goût de l'auteur pour « les anneaux généraux » vient certainement de l'inconfort que donne, dans l'apprentissage des singularités, la diversité des cadres d'étude, toujours locaux (anneaux analytiques, complets, localisés d'anneaux affines...) donc toujours un peu « à côté » de la géométrie algébrique classique...

En outre, sans doute à cause de la communauté de motivation soulignée ci-dessus,⁸ cette annexe B rejoint en partie les considérations sur la dimension de [Kl-Th] § 3.

Enfin, **l'annexe C** est d'une tout autre nature, puisqu'elle se veut un glossaire sur les méthodes d'algèbre commutative assistée par ordinateur que l'on a pu utiliser dans les deux premiers chapitres, et des commandes de logiciel SINGULAR correspondantes. Comme souligné dans l'introduction de ladite annexe, si les manuels sont aujourd'hui nombreux pour l'utilisation des bases de Gröbner dans les anneaux de polynômes, la manipulations des *bases standard* dans les anneaux localisés est beaucoup plus récente, ce qui m'a fait apparaître la nécessité de cet appendice.

7. je remercie Lê D.T. pour son soutien et son exemple dans cette démarche de vouloir s'attacher au caractère géométrique ...

8. cf. la note 7

Chapitre 1

Éléments superficiels, polynômes de Hilbert-Samuel et géométrie

I am a deeply superficial person.
Andy Warhol (1928–1987)

Introduction

Historique

La notion d'élément superficiel a été introduite par P. Samuel pour les idéaux m -primaires d'un anneau local dans son article: *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique* (cf. [Sa] p. 182). Comme indiqué par le titre de cet article, l'objectif de Samuel était la théorie de la multiplicité, et plus précisément de fonder une théorie de la multiplicité valable dans les anneaux locaux (noethériens) généraux, en définissant la multiplicité d'un idéal comme le coefficient directeur de ce qui est maintenant appelé son polynôme de Hilbert-Samuel (cf. infra).

Les éléments superficiels d'un idéal m -primaire I d'un anneau local R apparaissaient alors comme des éléments $f \in I$ (qui ont le mérite d'exister toujours) pour lesquels la multiplicité $e(I, R)$ se transmet à l'idéal I/f de l'anneau quotient R/f , c'est-à-dire pour lesquels on a l'égalité :

$$e(I, R) = e(I/f, R/f). \quad (1.1)$$

Grâce à (1.1), on peut étudier la multiplicité par récurrence jusqu'à la dimension zéro.

Par ce procédé, Samuel résolvait le problème posé par les formules précédentes (en termes de longueurs) pour la multiplicité: ces formules échouaient sur le problème du traitement des composantes immergées (cf. l'exemple de Macaulay dans [Sa] p. 191), mais cela nécessitait naturellement d'autoriser des éléments superficiels *diviseurs de zéro*.¹

Les deux motivations de ce chapitre

Remarque préliminaire – La définition donnée par Samuel des éléments superficiels d'un idéal I fait encore sens si on ne suppose pas que I est un idéal m -primaire. Aussi les caractérisations géométriques qui sont présentées dans le i) ci-dessous sont-elles développées

1. Ce problème avait aussi été résolu par l'approche de Chevalley dans [Chv], mais seulement pour les systèmes de paramètres dans un anneau complet réduit, contenant une copie de son corps résiduel. On consultera aussi l'historique de [HIO] (6.7)

pour un idéal I quelconque (non nilpotent), puis on spécifie les propriétés supplémentaires du cas m -primaire.

En revanche, la propriété (1.1) de transmission de la multiplicité n'a, telle quelle, de sens que dans le cas I m -primaire. Malgré l'existence de théories généralisant cet énoncé au cas non m -primaire (pour lesquelles on renvoie à la multiplicité généralisée de [HIO] § 3, à la j -multiplicité de [FOV] Chap. 6, et à la notion de multiplicité mixte e.g. dans [Sw]), l'étude de la transversalité pour les invariants de Hilbert-Samuel présentée dans le ii) suivant se place dans le cadre des idéaux m -primaire, qui semble de toute façon une première étape nécessaire.

i) Géométrie des éléments superficiels – La première motivation de ce chapitre provient de la constatation que la définition de Samuel, une fois simplifiée via le langage des anneaux gradués (cf. déf. 1.2.7) s'exprime de manière particulièrement naturelle dans le langage de la géométrie projective. Précisément, si on note $G(I,R)$ l'anneau gradué $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$, un élément $f \in I^s - I^{s+1}$ est superficiel si, et seulement si, en notant :

$$\mathcal{E}_I := \text{Proj}(G(I,R)),$$

le schéma projectif associé à $G(I,R)$, l'application $\widetilde{m}_f : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(s)$ déduite de la multiplication $m_f : G(I,R) \rightarrow G(I,R)(s)$ par la classe de $f \in I^s/I^{s+1}$, est *injective* (cf. prop. 1.4.1).

Cependant, avec cette formulation, il reste à comprendre le sens géométrique de l'application \widetilde{m}_f , ce qui est possible en considérant le schéma \mathcal{E}_I comme le *diviseur exceptionnel* de l'éclatement $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ de I dans $\text{Spec } R$, et en introduisant la *transformée faible* de f sur S_I .

La notion de transformée faible (la terminologie provient de [Hk-2] p. 142) est ici un outil essentiel, qui semble mal connu dans la littérature. (Elle apparaît sous la forme de transformée virtuelle dans le cas particulier de l'étude des amas de points cf. e.g. [LJ]).

Le paragraphe 1.1 est destiné à la mise en place du langage géométrique nécessaire (on renvoie aussi à l'appendice A) : au § 1.1.1, on rappelle la construction de l'éclatement d'un idéal, puis on introduit la notion de transformée faible dont on donne diverses caractérisations (comme section par une hypersurface au § 1.1.2, ou en terme d'équations homogènes au § 1.1.3). Le contenu des sections 1.1.4 à 1.1.6 est plus classique, mais utile par la suite (cf. la table des matières).

Le § 1.4 est consacré à l'étude géométrique des éléments superficiels.

Le langage introduit dans le § 1.1 permet d'obtenir à la prop. 1.4.5 la caractérisation géométrique suivante :

Proposition (1.4.5). *Si I est un idéal d'un anneau noethérien R , un élément $f \in I$ est superficiel, si et seulement si, en notant $(f)^\#$ sa transformée faible sur S_I on a la propriété :*

$$\text{Supp}((f)^\#) \cap \text{Ass}(\mathcal{E}_I) = \emptyset,$$

où $\text{Supp}((f)^\#)$ désigne le support de la transformée faible et $\text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ l'ensemble des points associés au schéma \mathcal{E}_I .

Bien entendu, cette caractérisation n'a d'intérêt que si elle permet de mieux comprendre la construction et les propriétés des éléments superficiels. Cela se vérifie d'abord sur les exemples de déterminations d'éléments superficiels, les premiers étant donnés à la page 49, d'autres interviendront dans les chapitres suivants (e.g. p. 65). En fait, ces exemples utilisent la caractérisation plus pratique du corollaire 1.4.6 dans le cas des idéaux m -primaires.

Ensuite parce que cette approche donne de nouvelles caractérisations des éléments superficiels : ainsi au § 1.4.2, on caractérise les éléments superficiels comme ceux pour lesquels

les transformées faibles et strictes coïncident, et qui ne sont dans aucun idéal associé à R ne contenant pas I (théorème 1.4.22). Ce critère est l'analogie géométrique d'un critère algébrique obtenu par D. Kirby dans [Ki] (que le lecteur trouvera ici au thm. 1.3.14), mais les preuves sont ici totalement différentes.

ii) Éléments transverses pour un invariant – Si on suppose que I est un idéal m -primaire, on peut dire qu'un élément $f \in I$ vérifiant la propriété $e(I/f, R/f) = e(I, R)$ (cf. (1.1)) est *transverse* pour la multiplicité, ou encore *e-transverse*.

En vérité, cette propriété n'est pas spécifique aux éléments superficiels, et on caractérisera au chap. 2 l'ensemble des éléments *e-transverses* d'un idéal.

Cependant, on a déjà évoqué le fait que la multiplicité $e(I, R)$ était définie à partir du (des) polynôme(s) de Hilbert-Samuel de l'idéal I . Précisément, on définit la fonction de Hilbert $F_{I,R}^0(n) = l_R(I^n/I^{n+1})$, et la fonction de Samuel $F_{I,R}^1(n) = l_R(R/I^n)$, dont on montre que leurs valeurs respectives coïncident, pour n assez grand, avec celles de fonctions polynômes notées respectivement $P_{I,R}^0$ et $P_{I,R}^1$ (théorème de Hilbert-Samuel, voir thm. 1.2.1).

Au § 1.2, on rappelle toutes ces définitions et on donne les différentes approches possibles pour montrer le thm. 1.2.1. La preuve la plus rapide est esquissée à la suite de l'énoncé du théorème au § 1.2.1.

Au § 1.2.2, on donne une deuxième preuve qui repose sur l'identification des valeurs $F_{I,R}^0(n)$ pour n assez grand avec celles de la caractéristique d'Euler-Poincaré cohomologique $\chi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n))$, qui se trouve être une fonction polynôme pour tout n (thm. 1.2.5).

Au § 1.2.3, on introduit la définition des éléments superficiels: on y admet le résultat démontré plus loin que, pour un élément $f \in I$ superficiel, la fonction $F_{I,R}^0$ vérifie:

$$\forall n \geq n_0, \quad F_{I/f, R/f}^0(n) = F_{I,R}^0(n) - F_{I,R}^0(n-s). \quad (1.2)$$

Cela donne bien sûr une troisième preuve du thm. 1.2.1, mais surtout cette preuve est nécessaire pour identifier le degré d du polynôme de Hilbert $P_{I,R}^0$ avec la dimension de Krull $\dim(R) - 1$.

Ainsi, on voit apparaître l'intérêt des éléments $f \in I$ vérifiant des égalités du type de (1.2).

Précisément, on dira que si $f \in I^s - I^{s+1}$ l'élément $f \in I$ est F^i (resp. P^i)-transverse si, et seulement si, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'égalité:

$$F_{I/f, R/f}^i(n) = F_{I,R}^i(n) - F_{I,R}^i(n-s).$$

(resp. la même égalité en remplaçant les F^i par des P^i).

Le § 1.3 est consacré à la caractérisation des éléments transverses pour les invariants F^i et P^i .

Les cas de la F^i -transversalité (cf. § 1.3.5) et de la P^1 -transversalité (cf. § 1.3.6) sont assez faciles si on dispose d'une certaine pratique de l'algèbre dans les anneaux gradués.

Aussi, on a jugé utile de rassembler du § 1.3.2 au § 1.3.4 toute une série de lemmes « multiformes » dans la littérature ou le folklore: plus précisément on s'intéresse aux propriétés algébriques de la multiplication par un élément dans un anneau gradué (cf. § 1.3.2), en étudiant sous quelles conditions le conoyau de cette multiplication correspond à ce qu'on veut (§ 1.3.3), et l'influence des propriétés du noyau sur le conoyau (§ 1.3.4).

A l'instar de l'auteur, le lecteur pourra se servir des sorites déclinés dans ces sections (1.3.3) et (1.3.4) comme d'un dictionnaire entre le langage des *conducteurs* utilisé par les algébristes et le langage plus imagé de la géométrie: à titre d'exemple ce dictionnaire permettra au lecteur de comprendre géométriquement le théorème de Kirby (cf. [Ki]) rappelé

(et déjà à moitié traduit) au thm. 1.3.14 (voir le § 1.4.2 pour cette approche géométrique, cf. le i) précédent).

On finit enfin par donner le résultat (annoncé au (1.2) ci-dessus) que les éléments superficiels sont P^0 -transverses : la première preuve donnée (§1.3.7) est indirecte et peu satisfaisante du point de vue intuitif. Heureusement, la caractérisation de Kirby donne un point de vue direct : si f est superficiel, le conoyau de la suite exacte déduite de la multiplication par f :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(-s) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{I/f}}$ de sorte qu'en prenant la caractéristique d'Euler-Poincaré dans cette suite exacte, on obtient la P^0 transversalité (grâce aux égalités $P_{I,R}^0(n) = \chi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n))$, resp. $P_{I/f,R/f}^0(n) = \chi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{I/f}}(n))$).

1.1 Généralités sur les éclatements

A Frenchman once suggested to me that the French translation « éclater » was chosen « pour faire peur aux gens ».

D. Eisenbud, in *Commutative Algebra ...* (cf. [Ei]), Chap. 5.

1.1.1 Construction de l'éclatement d'un idéal

La construction de l'éclatement est une application de la construction des schémas projectifs rappelée dans l'appendice A.

Cette construction est bien connue, mais on veut fixer ici les notations utilisées par la suite. On se contente en outre de définir les éclatements de schémas affines, ce qui nous suffira dans le cadre local où nous nous placerons (on renvoie à [EGA] II §8 ou [E-H] IV.2, pour le cas général). Dans ce cadre affine, on peut utiliser comme références élémentaires [HIO] §12 ou [Ii] §7.10.

Soit R un anneau noethérien et I un idéal de R . On définit la R -algèbre :

$$B(I,R) := R[It] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n t^n,$$

graduée par les puissances de t , avec par convention $I^0 = R$.

Par construction, l'anneau $B(I,R)$ est engendré comme R -algèbre par les éléments de degré 1, et l'hypothèse R noethérien entraîne que c'est une R -algèbre de type fini. De la sorte, $B(I,R)$ est un *bon anneau gradué pour faire de la géométrie* au sens de la définition A.7.1.

Définition 1.1.1. Le morphisme structural (cf. prop. A.3.1) :

$$e_I : \text{Proj}(R[It]) \rightarrow \text{Spec } R,$$

est appelé *l'éclatement* de l'idéal I dans l'anneau R ou éclatement du schéma $S := \text{Spec } R$ le long de I (ou encore, le long du sous-schéma $V(I)$ défini par I dans S).

On notera $S_I := \text{Proj}(R[It])$ l'espace total de l'éclatement de S le long de I .

Remarque 1.1.2. Notons les deux cas particuliers suivants :

- si l'idéal $I = (f)$ est principal et engendré par un élément f *non diviseur de zéro*, alors e_I est un isomorphisme $S_I \simeq S$ (cf. e.g. [Ii] Prop. 3.2). La réciproque est vraie d'après la prop. 1.1.4 ii) infra.
- $S_I = \emptyset$ si, et seulement si, l'idéal I est nilpotent, i.e. il existe un entier m tel que $I^m = 0$ (cf. rem. A.1.4).

On note $V(I)$ le sous-schéma défini par I dans $S = \text{Spec } R$. La préimage schématique $\mathcal{E}_I := (e_I)^{-1}(V(I))$ de $V(I)$ par l'éclatement e_I s'obtient par définition (cf. [Ii] § 1.22 b), comme le produit fibré :

$$\mathcal{E}_I = S_I \times_R R/I \simeq \text{Proj}(G(I,R)),$$

où l'on note :

$$G(I,R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / I^{n+1},$$

la R -algèbre graduée associée à la filtration de R par les puissances de I .

Avant d'énoncer la propriété fondamentale des éclatements, on rappelle encore une terminologie :

Définition 1.1.3.

i) Si X est un schéma, et Y est un sous-schéma de X , on dira que Y est un *sous-schéma localement principal* de X s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec } A_i$ dans lesquels $Y \cap U_i$ est défini par un idéal principal $(f_i) \subset A_i$.

ii) On dira que Y est un *sous-schéma de Cartier* de X s'il vérifie le i) et qu'en plus tous les $f_i \in A_i$ sont non diviseurs de zéro.

Une terminologie plus standard pour le ii) est de dire que Y est un diviseur de Cartier effectif de X . La terminologie pratique de « sous-schéma de Cartier » est celle utilisée dans [E-H] (IV-15).

On peut maintenant énoncer :

Proposition 1.1.4. i) *Le sous-schéma \mathcal{E}_I est un sous-schéma de Cartier de S_I .*

ii) *Si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme tel que $f^{-1}(V(I))$ est un sous-schéma de Cartier, alors il existe un morphisme, unique, $g : X \rightarrow S_I$, tel que $f = e_I \circ g$.*

(La propriété universelle donnée au ii) est souvent prise comme définition des éclatements (cf. [Hk-2] Ch. 0, § 2 et [E-H] IV-16)).

Preuve: i) En effet, par construction des Proj, l'espace S_I est recouvert par les cartes affines d'anneaux $B(I,R)_{(xt)}$ pour $x \in I$, où $B(I,R)_{(xt)}$ désigne le localisé homogène (cf. déf. A.1.2).

Il est facile de vérifier l'isomorphisme suivant (cf. e.g. [HIO] (12.6)) :

$$B(I,R)_{(xt)} \simeq R[I/x].$$

On peut se limiter à $x \in \{h_0, \dots, h_r\}$, pour une famille (h_0, \dots, h_r) qui engendre l'idéal I (cf. lem. A.1.3 i)).

L'anneau $R[I/h_i]$ est réduit à zéro si, et seulement si, h_i est nilpotent. Donc S_I est recouvert par les $\text{Spec } R[I/h_i]$ avec h_i non nilpotent dans R . Dans ce cas, h_i est non diviseur de zéro dans $R[I/h_i]$ (par construction de l'anneau des fractions), et on a l'égalité

$$I.R[I/h_i] = h_i.R[I/h_i],$$

ce qui signifie que le schéma \mathcal{E}_I défini par la préimage de I sur S_I est un sous-schéma de Cartier (déf. 1.1.3).

ii) Pour montrer la propriété universelle énoncée au ii), il faut d'abord étendre la définition de l'éclatement d'un idéal dans un schéma affine à la notion plus générale d'éclatement d'un faisceau cohérent d'idéaux sur un schéma quelconque : on peut le faire par localisation (cf. e.g. [Ii] (7.10)). (On ne se servira nulle part ailleurs de cette construction globale).

Ensuite si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme (avec X localement noethérien), on peut considérer l'idéal $\mathcal{J} = I.\mathcal{O}_X$ et l'éclatement $X_{\mathcal{J}}$ de \mathcal{J} sur X . On a alors un morphisme naturel $X_{\mathcal{J}} \rightarrow X \times_S S_I$ qui par projection sur S_I donne un morphisme $g : X_{\mathcal{J}} \rightarrow S_I$.

Si \mathcal{J} est localement principal, en appliquant la remarque 1.1.2 i) localement, on a l'isomorphisme: $X_{\mathcal{J}} \simeq X$, ce qui donne bien le morphisme $g : X \rightarrow S_I$ recherché. \square

Notion de transformée faible

La définition 1.1.6 qui va suivre introduit la notion de *transformée faible* d'un élément $f \in I$ dans un éclatement, notion qui jouera un rôle fondamental par la suite. La terminologie *transformée faible* est due à H. Hironaka (cf. [Hk-2] p. 142).

Une autre terminologie possible aurait été celle de *transformée virtuelle* (à cause de son lien avec la notion classique de transformée virtuelle d'une courbe plane dans la théorie d'Enriques cf. e.g. [LJ] §2).

On précise d'abord une notation :

Notation 1.1.5. Soient Y et Y' deux sous-schémas localement principaux d'un schéma X (cf. déf. 1.1.3 i)) définis localement par des équations f_i (resp. f'_i) dans les cartes affines $\text{Spec } A_i$ de X . Si Y' est un sous-schéma (nécessairement fermé) de Y , on distinguera les deux objets suivants :

- i) le sous-schéma localement principal $Y - Y'$ défini dans chaque carte $\text{Spec } A_i$ par le quotient $(f_i/f'_i) \in A_i$,
- ii) le sous-schéma différence $Y \setminus Y'$ défini comme le sous-schéma ouvert de Y complémentaire du fermé Y' .

(Ainsi dans le cas des sous-schémas de Cartier (cf. déf. 1.1.3 ii)), le sous-schéma $Y - Y'$ correspond à la différence dans le groupe des diviseurs de Cartier, qui est effective avec notre hypothèse Y' sous-schéma de Y .)

Cette notation étant précisée, on peut formuler la définition voulue :

Définition 1.1.6. Soit $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ l'éclatement d'un idéal I dans un anneau noethérien R . Pour un élément $f \in I$, on notera aussi (f) le sous-schéma de $\text{Spec } R$, défini par $\text{Spec } R/(f)$.

i) On appellera *transformée totale* de f par e_I , et on notera $(f)^*$, la préimage schématique: $(e_I)^{-1}(f)$.

On rappelle aussi qu'on note $\mathcal{E}_I = (e_I)^{-1}(V(I))$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement e_I .

ii) Si $f \in I^s - I^{s+1}$ est un élément d'ordre s de I , il est direct (voir la preuve de la prop. 1.1.8) que le sous-schéma de Cartier $s\mathcal{E}_I$ est un sous-schéma de la transformée totale $(f)^*$, de sorte que suivant la notation 1.1.5 i), on peut définir le sous-schéma localement principal :

$$(f)^{\#} = (f)^* - s\mathcal{E}_I. \quad (1.3)$$

On appellera *transformée faible* de f sur S_I , le sous-schéma localement principal $(f)^{\#}$ ainsi défini. (C'est un sous-schéma de Cartier si f est non diviseur de zéro dans R).

1.1.2 Transformée faible comme section par une hypersurface

On conserve les notations du § 1.1.1 précédent. Le choix de $r+1$ générateurs (h_0, \dots, h_r) de I permet de définir une surjection de R -algèbres graduées :

$$s : R[X_0, \dots, X_r] \rightarrow R[h_0t, \dots, h_rt],$$

par :

$$X_i \mapsto h_i t \quad \text{pour } i = 0, \dots, r.$$

Le morphisme associé à s (suivant la déf. A.4.1) définit (cf. lem. A.5.1) un *plongement fermé* au-dessus de $\text{Spec } R$,

$$i : S_I \rightarrow \mathbb{P}_R^r, \quad (1.4)$$

de l'éclatement S_I dans l'espace projectif \mathbb{P}_R^r . Dire que ce plongement est « au-dessus de $\text{Spec } R$ » signifie qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S_I & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_R^r \\ \downarrow & \swarrow & \\ \text{Spec } R & & \end{array}$$

qui donne par restriction au-dessus de $V(I) = \text{Spec } R/I$ un plongement

$$j : \mathcal{E}_I \rightarrow \mathbb{P}_{R/I}^r,$$

du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I .

Définition 1.1.7. Si $I = (h_0, \dots, h_r)$, à une décomposition (non-unique) d'un élément $f \in I$ sous la forme :

$$f = \sum_{i=0}^r a_i h_i, \quad \text{avec } a_i \in R,$$

on associe un hyperplan

$$H_f : \sum_{i=0}^r a_i X_i$$

de l'espace projectif \mathbb{P}_R^r , qui est le sous-schéma fermé de \mathbb{P}_R^r défini par l'idéal homogène $(\sum_{i=0}^r a_i X_i)$.

Alors, suivant la définition A.5.2, la préimage de $i^{-1}(H_f)$ par le plongement $i : S_I \rightarrow \mathbb{P}_R^r$ (défini au (1.4)) est définie par l'idéal image $(\sum_{i=0}^r a_i h_i t)$ dans $B(I, R)$, idéal homogène principal. La proposition suivante explicite $i^{-1}(H_f)$ comme un sous-schéma localement principal.

On rappelle que, suivant la déf. A.5.2, on utilisera aussi pour $i^{-1}(H_f)$ la notation $i^*(H_f)$ (et on parlera du pull-back du sous-schéma localement principal H_f) ou encore $H_f \cap S_I$ (et on parlera de l'intersection schématique de H_f avec S_I), les trois notations (et terminologies) étant ici synonymes.

L'écriture en carte affine des sous-schémas fermés de l'espace projectif, donnée au lemme A.2.1, donne immédiatement :

Proposition 1.1.8. Pour tout élément $f \in I$, le pull-back $H_f \cap S_I$ défini à la déf. 1.1.7 coïncide avec la différence, (au sens de la notation 1.1.5 i)) :

$$H_f \cap S_I = (f)^* - \mathcal{E}_I, \quad (1.5)$$

Si $f \in I - I^2$, on retrouve la transformée faible $(f)^\#$ définie au (1.3).

Preuve: Dans une carte $U_i = \text{Spec } R[I/h_i]$ de S_I : $(f)^*$ est défini par $f.R[I/h_i]$ et \mathcal{E}_I par $I.R[I/h_i] = h_i.R[I/h_i]$. Ainsi $(f)^* - \mathcal{E}_I$ est défini par $(f/h_i).R[I/h_i]$ (cf. notation 1.1.5 i)).

On a dit à la déf. 1.1.7, que $H_f \cap S_I$ est défini globalement par l'idéal homogène de $(\sum_{j=0}^r a_j h_j t)$ de $R[It]$. D'après l'équation (A.5) du lemme A.2.1, l'équation de $H_f \cap S_I$ dans la carte locale $B(I, R)_{(h_i t)}$ de S_I est donnée par

$$\left(\sum_{j=0}^r a_j h_j t \right) / (h_i t) = f/h_i,$$

d'où la conclusion. □

Proposition 1.1.9 (Cas des éléments d'ordre s).

De manière générale, si $f \in I^s - I^{s+1}$, (on dit f est d'ordre s pour I), alors f a une écriture (non-unique) sous la forme :

$$f = P_s(h_0, \dots, h_r),$$

où P_s est un polynôme homogène de degré s à coefficients dans R .

Soit alors sH_f l'hypersurface de degré s de \mathbb{P}_R^r définie par P_s . On a alors l'égalité suivante sur S_I :

$${}^sH_f \cap S_I = (f)^* - {}_s\mathcal{E}_I = (f)^\#$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la transformée faible introduite à la déf. 1.1.6.

Preuve: Identique à celle de la proposition 1.1.8 précédente: les équations locales du sous-schéma associé à la forme homogène $P_s(h_0t, \dots, h_rt)$ de degré s sont dans chaque carte U_i de la forme $P_s(h_0, \dots, h_r)/h_i^s$, où le numérateur est encore l'équation locale de $(f)^*$ et le dénominateur celle de ${}_s\mathcal{E}_I$. \square

1.1.3 Équation de la transformée faible

Proposition 1.1.10. Si I est un idéal d'un anneau noethérien R , et f est un élément d'ordre s de I , c'est-à-dire $f \in I^s - I^{s+1}$, alors la transformée faible $(f)^\#$ de f sur S_I , définie à la déf. 1.1.6, peut encore être vue comme le sous-schéma de $S_I = \text{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n t^n)$ défini par l'idéal (homogène) engendré par ft^s , qui est isomorphe à $\text{Proj}(B(I, R)/ft^s \cdot B(I, R))$.

Preuve: C'est une reformulation en terme d'équations de la prop. 1.1.9: sH_f est défini par l'idéal $P_r(X_0, \dots, X_r)$ et son pull-back sur S_I par i est donc défini (idem déf. 1.1.7) par l'idéal $P_r(h_0t, \dots, h_rt) = s(P_r(X_0, \dots, X_r))$ de $B(I, R)$ (où $s : R[X_0, \dots, X_r] \rightarrow B(I, R)$ est la surjection définissant i).

La proposition 1.1.9 dit que ce pull-back est la transformée faible $(f)^\#$. \square

Sur le diviseur exceptionnel

On rappelle que l'on note $G(I, R)$ l'anneau gradué: $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / I^{n+1}$.

Remarque 1.1.11. On note $\pi : B(I, R) \rightarrow G(I, R) = B(I, R)/(I)B(I, R)$ la surjection canonique. Le morphisme associé à π est le plongement fermé canonique (cf. lem. A.5.1 :

$$j_I : \mathcal{E}_I \rightarrow S_I,$$

et on peut (suivant la déf. A.5.2) définir le pull-back $(j_I)^*((f)^\#)$ du sous-schéma $(f)^\#$ de S_I sur \mathcal{E}_I : puisque $(f)^\#$ est défini par (ft^s) dans $B(I, R)$, alors $(j_I)^*((f)^\#)$ est défini par $\pi(ft^s) = \bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ la forme initiale de f dans $G(I, R)$, ce que l'on note encore :

$$(j_I)^*((f)^\#) = \text{Proj}(G(I, R)/\bar{f} \cdot G(I, R)). \quad (1.6)$$

1.1.4 Fibre au-dessus de l'idéal maximal**Plongement dans \mathbb{P}_k^r**

On suppose ici que R est local, d'idéal maximal m , et on note O l'unique point fermé de $\text{Spec } R$, défini par l'idéal m .

On notera :

$$\mathcal{E}_I^0 = (e_I)^{-1}(O) = \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / mI^n\right),$$

la fibre de O pour l'éclatement e_I .

On remarque que le plongement $i : S_I \rightarrow \mathbb{P}_R^r$ (cf. §1.1.2) étant défini au-dessus de $\text{Spec } R$, il induit au-dessus de O , un plongement :

$$i_o : \mathcal{E}_I^0 \rightarrow \mathbb{P}_k^r,$$

en notant $k = R/m$ le corps résiduel de R . Précisément, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_k^r & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}_R^r \\ i_o \uparrow & & \uparrow i \\ \mathcal{E}_I^0 & \xrightarrow{j_e} & S_I \end{array}$$

En outre, pour un élément $f \in I$, et un hyperplan $H_f : \sum a_i X_i$ de \mathbb{P}_R^r comme §1.1.2, on peut aussi définir l'hyperplan $H_f^0 : \sum \bar{a}_i X_i$ de \mathbb{P}_k^r où \bar{a}_i est la classe de a_i modulo m . Par définition (cf. déf. 1.1.7), H_f^0 est l'intersection schématique :

$$H_f^0 = H_f \cap \mathbb{P}_k^r.$$

Alors la commutativité des pull-back

$$(j \circ i_o)^* = (i \circ j_e)^*$$

de H_f , donne l'égalité des intersections schématiques (cf. déf. A.5.2) :

$$(H_f \cap S_I) \cap \mathcal{E}_I^0 = H_f^0 \cap S_I. \quad (1.7)$$

NOTA BENE – Ces pull-back définissent un sous-schéma localement principal de \mathcal{E}_I , qui en général n'est pas un sous-schéma de Cartier (et dont le support peut contenir des composantes irréductibles de \mathcal{E}_I).

Cas où I est m -primaire

On suppose ici que I est un idéal m -primaire de R . Dans ce cas, en notant entre $|\cdot|$ les schémas réduits sous-jacents à un schéma, on a : $|\text{Spec } R/I| = \text{Spec } k = \{O\}$.

On en déduit pour les préimages $\mathcal{E}_I^0 = (e_I)^{-1}(O)$ et $\mathcal{E}_I = (e_I)^{-1}(V(I))$ l'égalité des schémas réduits :

$$|\mathcal{E}_I^0| = |\mathcal{E}_I|. \quad (1.8)$$

On notera \mathcal{E} ce schéma réduit sous-jacent à \mathcal{E}_I^0 et \mathcal{E}_I . En particulier, on a les inclusions $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_I^0 \subset \mathcal{E}_I$.

Pour prouver (1.8), il suffit d'observer que :

$$|\mathcal{E}_I| = |S_I \times_{\text{Spec } R} \text{Spec}(R/I)| = ||S_I| \times_{\text{Spec } R_{red}} |\text{Spec } R/I||,$$

la dernière égalité provenant de [EGA] I (5.1.8). On peut alors remplacer $|\text{Spec } R/I|$ par $\text{Spec } k$ dans cette dernière expression, et on obtient $|\mathcal{E}_I^0|$. \square

1.1.5 Notion de transformée stricte

Définition pour toute modification

Définition 1.1.12. On appelle modification de $S = \text{Spec } R$, de centre I , un morphisme birationnel, propre, $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$, qui induit un isomorphisme :

$$\pi : X \setminus \pi^{-1}(V(I)) \rightarrow S \setminus V(I).$$

Pour un sous-schéma fermé $T \subset S$, la différence $T \setminus V(I)$ hérite d'une *unique* structure de schéma comme ouvert de T , et avec cette convention, on peut définir :

Définition 1.1.13. Si $\pi : X \rightarrow S$ est une modification de centre I , et T est un sous-schéma fermé de S , on définit la *transformée stricte* T' de T par π , comme l'*adhérence schématique* de la préimage par π de $T \setminus V(I)$, ce que l'on note :

$$T' = \overline{(\pi)^{-1}(T \setminus V(I))}^{sch}.$$

Remarque 1.1.14.

- i) L'adhérence schématique d'un sous-schéma est par définition le plus petit sous-schéma fermé le contenant.
- ii) Compte-tenu de l'unicité de la structure de sous-schéma ouvert, on peut aussi comprendre le schéma $(\pi)^{-1}(T \setminus V(I))$ comme la différence $\pi^{-1}(T) \setminus \pi^{-1}(V(I))$. Pour la même raison, dans cette différence, la structure de schéma de $V(I)$ n'intervient pas, mais seulement son support.

Naturalité pour les éclatements

Dans le cas où la modification π considérée ci-dessus est l'éclatement de I dans S , on rappelle la propriété de naturalité suivante (en réalité beaucoup plus générale que ce que le cadre affine nous restreint à dire ici, cf. l'exposé particulièrement clair de [E-H] IV-21) :

Proposition 1.1.15. Avec les notations de la définition 1.1.13, si $\pi : X \rightarrow S$ est l'éclatement e_I de I dans $S = \text{Spec } R$, si T est le sous-schéma fermé $\text{Spec } R/J$ de S , et si I' est l'idéal $I + J/J$ définissant $T \cap V(I)$ dans l'anneau R/J de T , alors la restriction de e_I à la transformée stricte T' de T , i.e. :

$$e_{I|T'} : T' \rightarrow T,$$

coïncide avec l'éclatement $e_{I'}$ de I' dans T .

Dans ce cadre affine, on peut expliciter la preuve de la proposition 1.1.15 précédente de la manière suivante : un sous-schéma fermé $T \subset \text{Spec } R$ est défini par un idéal J de R . Alors la transformée stricte de T dans S_I est définie par l'idéal homogène (avec les notations de [HIO] (4.4)) :

$$B(I, J \subset R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (J \cap I^n) t^n = J.R[t] \cap B(I, R), \quad (1.9)$$

dans l'anneau gradué $B(I, R)$.

On peut alors énoncer la proposition 1.1.15 sous la forme d'un isomorphisme (direct)

$$B(I, R)/B(I, J \subset R) \simeq B((I + J)/J, R/J), \quad (1.10)$$

où le membre de droite est l'anneau de l'éclatement de $I' = (I + J)/J$ dans $T = \text{Spec } R/J$.

1.1.6 Dimension dans les éclatements

On note $\text{Min}(R)$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de R .

Définition 1.1.16. On dit que l'anneau R (resp. le schéma $S = \text{Spec } R$) est *équidimensionnel* si pour tout idéal premier minimal $p \in \text{Min}(R)$, on a l'égalité $\dim R/p = \dim R$, c'est-à-dire si toutes les composantes irréductibles de $S = \text{Spec } R$ sont de dimension $d = \dim R$.

Le lemme facile suivant est montré dans [HIO] (4.5) :

Lemme 1.1.17. *L'ensemble des idéaux premiers homogènes minimaux de $B(I, R)$ est exactement l'ensemble des idéaux $B(I, p \subset R)$ (cf. (1.9)) pour $p \in \text{Min}(R)$.*

Autrement dit, les composantes irréductibles de l'éclatement S_I de $V(I)$ dans $\text{Spec } R$ sont les éclatées des composantes irréductibles $S_i = \text{Spec } R/p_i$ de $\text{Spec } R$ le long de l'intersection schématique $V(I) \cap S_i$ (définie par l'idéal I/p_i de R/p_i).

Ainsi, les composantes irréductibles de S_I sont les schémas

$$(S_i)_I = \text{Proj } B(I, R)/B(I, p_i \subset R) = \text{Proj } B(I + p_i/p_i, R/p_i), \quad (1.11)$$

où les $p_i \in \text{Min}(R)$.

Mais R/p_i étant intègre, l'éclatement de $(I + p_i)/p_i$ définit un morphisme birationnel surjectif de schémas intègres (cf. e.g. [EGA] II (8.1.4)) :

$$(e_I)_{|(S_i)_I} : (S_i)_I \rightarrow \text{Spec } R/p_i,$$

dès que l'idéal $(I + p_i)/p_i$ est non nul, c'est-à-dire si l'idéal I n'est pas inclus dans p_i .

La définition suivante (cf. [EGA] IV (5.6.1)) introduit une classe (très large cf. la rem. 1.1.19 qui suit) d'anneaux noethériens pour laquelle on peut déduire des considérations précédentes la dimension des composantes $(S_i)_I$:

Définition 1.1.18. Un anneau R est dit *caténaire* si étant donnés deux idéaux premiers $p \subset q$ de R , toutes les chaînes maximales d'idéaux premiers entre p et q ont la même longueur.

Un anneau R est dit *universellement caténaire* si toute R -algèbre de type fini est caténaire (voir les caractérisations dans [EGA] IV 5.6.1).

Comme la notion d'anneau universellement caténaire se localise, on dit qu'un schéma X est universellement caténaire si pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ l'est.

Remarque 1.1.19. La classe des anneaux universellement caténaires est très large : en effet elle contient tous les quotients d'anneaux réguliers (cf. [EGA] IV (5.6.4)) (ou plus généralement les quotients d'anneaux Cohen-Macaulay), elle est, on l'a dit, stable par localisation (cf. loc. cit.), et enfin tout quotient d'un anneau universellement caténaire est encore universellement caténaire.

Le théorème géométrique suivant est une conséquence de la formule de l'altitude de Nagata (cf [Ei] (13.8)). L'énoncé se trouve dans [EGA] IV (5.6.6) (où la condition (5.6.6.2) est vérifiée dans l'hypothèse f surjectif) :

Théorème 1.1.20. *Si Y est un schéma intègre universellement caténaire, si X est un schéma intègre et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, birationnel, surjectif, alors on a l'égalité*

$$\dim X = \dim Y.$$

Dans notre situation, si R est un anneau universellement caténaire, et $p_i \in \text{Min}(R)$, alors si $I \not\subset p_i$, le morphisme

$$e_I : (S_i)_I \rightarrow \text{Spec } R/p_i,$$

vérifie les hypothèses du théorème 1.1.20, donc

$$\dim(S_i)_I = \dim R/p_i. \quad (1.12)$$

On obtient ainsi la description simple suivante :

Corollaire 1.1.21. i) *D'après la discussion précédente, si R est un anneau universellement caténaire et I est un idéal de R , alors l'éclatement S_I de I est la réunion des éclatements $(S_i)_I$ de I sur les composantes $S_i = \text{Spec } R/p_i$ de S (cf. l'égalité (1.11)), et chacune de ces composantes $(S_i)_I$ est :*

- soit vide si $I \subset p_i$,
- soit de même dimension que S_i d'après (1.12).

ii) *En particulier si R est un anneau équidimensionnel de dimension d et universellement caténaire, alors l'éclatement S_I est équidimensionnel de dimension d (ou vide si, et seulement si, I nilpotent).*

iii) *Si, outre les hypothèses du i), on suppose que R est local alors le schéma \mathcal{E}_I comme sous-schéma de Cartier de S_I est équidimensionnel de dimension $\dim(S_i)_I - 1$ sur chaque composante irréductible de S_I . En particulier si on est dans les hypothèses du ii), avec R local, le schéma \mathcal{E}_I est équidimensionnel de dimension $d - 1$.*

Preuve: Le i) et le ii) sont conséquences directes de la discussion précédente. Pour le iii), on doit vérifier qu'un diviseur de Cartier sur chaque schéma irréductible $(S_i)_I$ est équidimensionnel de dimension $\dim(S_i)_I - 1$: contrairement à l'intuition cela n'est pas évident : on renvoie à l'appendice B pour la preuve de ce fait, et un contre-exemple si on ne suppose pas R local. \square

Si on ne suppose pas R universellement caténaire, on ne sait pas en général passer des résultats algébriques donnant les dimensions des anneaux $B(I,R)$ et $G(I,R)$ valables pour tout anneau noethérien (cf. Appendice B.4) à des résultats sur la dimension des schémas projectifs associés S_I et \mathcal{E}_I (resp. $\text{Proj } B(I,R)$ et $\text{Proj } G(I,R)$), cf. loc. cit. Une exception toutefois, le cas où l'idéal I est m -primaire dans un anneau local noethérien (R,m) quelconque (cf. rem. B.4.2) :

Proposition 1.1.22. *Si (R,m) est un anneau local noethérien de dimension d et I est un idéal m -primaire de R , alors on sait d'après la prop. B.4.1) que l'anneau $G(I,R)$ est aussi de dimension d et on peut en déduire que $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I,R)$ est de dimension $d - 1$ c'est-à-dire a au moins une composante irréductible de dimension $d - 1$.*

Preuve: Comme I est m -primaire, R/I est un anneau d'Artin : on peut utiliser la théorie de la dimension pour les anneaux gradués sur un anneau d'Artin (via le polynôme de Hilbert) cf. § 1.2.² \square

Avertissement. Compte-tenu de ce qui précède, sauf pour l'étude des idéaux m -primaires, dès qu'on aura besoin d'utiliser un résultat sur la dimension de \mathcal{E}_I on se placera dans le cadre où R est local, universellement caténaire.

1.1.7 Décomposition primaire de R et éclatement

Les considérations élémentaires suivantes seront utiles pour prouver du théorème 1.4.22 à la fin de ce chapitre.

2. La différence géométrique est que dans ce cas $\text{Spec } G(I,R)$ est le cône sur $\text{Proj } G(I,R)$ de sommet un seul point, ce qui rend facile de prouver que $\dim \text{Proj } G(I,R) = \dim \text{Spec } G(I,R) - 1$.

Si on considère un anneau noethérien R et un idéal I de R , et qu'on considère une décomposition primaire de (0) (cf. e.g. [Ei] chap. 3) :

$$(0) = \bigcap_{i=1}^l Q_i, \quad (1.13)$$

où les Q_i sont des idéaux primaires, alors il est direct (cf. l'équation (1.9)) qu'en terme d'idéaux définissant les transformées strictes :

$$(0) = B(I, (\bigcap_{i=1}^l Q_i) \subset R) = \bigcap_{i=1}^l B(I, Q_i \subset R),$$

et, en utilisant la notation plus simple (où I est sous-entendu) :

$$B(Q_i) := B(I, Q_i \subset R),$$

on en déduit :

$$B(I, R) = B(I, R) / (\bigcap_{i=1}^l B(Q_i)). \quad (1.14)$$

Définition 1.1.23. Soit R un anneau noethérien, pour lequel on fixe une décomposition primaire de (0) comme au (1.13). On note $S = \text{Spec } R$, et $S_i = \text{Spec } R/Q_i$ les composantes primaires de S (pour $i = 1, \dots, l$).

On considère I un idéal de R , S_I l'éclatement de I dans S , et on note $(S_i)_I = \text{Proj } B((I + Q_i)/Q_i, R/Q_i)$ l'éclatement de $(I + Q_i)/Q_i$ dans S_i .

On dira que le schéma $S_I = \text{Proj } B(I, R)$ est l'*union schématique*³ des schémas éclatés $(S_i)_I$ définis, d'après (1.10) par :

$$(S_i)_I = \text{Proj } B(I, R) / B(Q_i),$$

et on notera :

$$S_I = (S_1)_I \cup \dots \cup (S_l)_I,$$

pour signifier qu'on a l'écriture de $B(I, R)$ donnée au (1.14).

1.2 Invariants de Hilbert-Samuel d'un idéal

1.2.1 Fonctions et polynômes de Hilbert-Samuel

Dans [Sa] (Thm. 9, p. 176), P. Samuel introduit, pour un idéal m -primaire I d'un anneau local (R, m) , la fonction $F_{I,R}^1$ suivante, que l'on appellera ici la *fonction de Samuel* de l'idéal I :

$$F_{I,R}^1(n) = l_R(R/I^n). \quad (1.15)$$

où $l_R(R/I^n)$ désigne la longueur comme R -module de R/I^n .

Si on considère la différence

$$F_{I,R}^1(n+1) - F_{I,R}^1(n) = l_R(R/I^{n+1}) - l_R(R/I^n) = l_R(I^n/I^{n+1}),$$

3. cette terminologie n'est pas standard, contrairement à celle d'intersection schématique. On dit ici que l'union schématique de deux sous-schémas fermés définis par des idéaux a et b est par définition le sous-schéma fermé défini par $a \cap b$. Une autre possibilité est de considérer le sous-schéma fermé (plus gros) défini par l'idéal produit $a.b$.

on observe que cette différence est égale à la *fonction de Hilbert* de l'anneau gradué $G(I, R) = \bigoplus_n I^n/I^{n+1}$ (cf. § 1.1.1), définie comme

$$F_{I,R}^0(n) = l_{R/I}(I^n/I^{n+1}) = l_R(I^n/I^{n+1}), \quad (1.16)$$

où la notion générale de fonction de Hilbert d'un anneau gradué est donnée dans le théorème-définition suivant, dû à Hilbert et Samuel :

Théorème-Définition 1.2.1. *Soit $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_n$ un anneau gradué, dont la partie homogène G_0 de degré 0 est un anneau d'Artin, et qui est engendré comme G_0 -algèbre par un nombre fini (disons $r + 1$) d'éléments de G_1 . Alors, la fonction de Hilbert de G définie pour tout entier n par*

$$F_G(n) = l_{G_0}(G_n), \quad (1.17)$$

coïncide pour n assez grand avec un polynôme, dit polynôme de Hilbert de G , que l'on notera $P_G(n)$, et que, dans le cas particulier de la fonction de Hilbert $F_{I,R}^0$ de l'anneau $G(I, R)$, on notera $P_{I,R}^0$.

En complément à la relation (1.16), on doit aussi noter qu'inversement la fonction $F_{I,R}^0$ détermine la fonction $F_{I,R}^1$ via la relation :

$$F_{I,R}^1(n) = F_{I,R}^0(0) + F_{I,R}^0(1) + \cdots + F_{I,R}^0(n-1). \quad (1.18)$$

On en déduit immédiatement à partir du théorème 1.2.1, le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2. *La fonction de Samuel $F_{I,R}^1$ définie au (1.15) coïncide également avec un polynôme pour n assez grand. On notera $P_{I,R}^1$ ce polynôme, et la relation (1.16) se transmet à P^0 et P^1 , ce que l'on donne l'égalité :*

$$P_{I,R}^0 = \Delta P_{I,R}^1, \quad (1.19)$$

où $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$.

Définition 1.2.3. Les deux polynômes $P_{I,R}^0$ et $P_{I,R}^1$ seront appelés les polynômes de Hilbert-Samuel de l'idéal m -primaire I dans R .

La preuve la plus rapide du résultat du thm-déf. 1.2.1 se fait de la manière suivante : on considère que G est un quotient de l'anneau $S = G_0[X_0, \dots, X_r]$ par un idéal homogène, en particulier est un S -module gradué de type fini (monogène en fait), et on montre le résultat pour tous les S -modules gradués de type fini, par récurrence sur le nombre $r + 1$ d'indéterminées (via la suite exacte de multiplication par X_r , cf. [Se-2] p. II-23 ou [Ei] § 1.9). On obtient même que le degré du polynôme obtenu est majoré par $r + 1$ (cf. loc. cit.).

Le problème de cette preuve est qu'elle ne suffit pas à décrire de nombreuses informations contenues dans le polynôme de Hilbert-Samuel $P_{I,R}^0$. Il existe deux autres approches plus précises et géométriquement plus significatives redonnant en particulier le résultat du thm-déf. 1.2.1.

Le premier point de vue, qui remonte à Hilbert [Hl] (dans le cas où G_0 est un corps), consiste à considérer une résolution libre de G comme $G_0[X_0, \dots, X_r]$ -module, et à calculer P_G comme une caractéristique d'Euler. Cette méthode et les invariants géométriques associés font l'objet du § 1.2.2 ci-dessous.

Le second point de vue, qui est celui de Samuel (cf. [S-Z] Tome 2, p. 285), consiste à faire une récurrence directement à partir de l'anneau $G(I, R)$ plutôt que dans $(R/I)[X_1, \dots, X_r]$, en remplaçant la suite exacte de multiplication par X_r par celle de multiplication par des éléments particuliers de I , les *éléments superficiels* de I . Ce second point de vue et sa signification géométrique font l'objet du § 1.2.3 ci-dessous (et § seq.).

1.2.2 Caractéristique d'Euler, résolutions

Cas où G_0 est un corps, syzygies

(On suit ici l'exposé de [E-H] III 3.1 et 3.3). La preuve originale par Hilbert du thm-déf. 1.2.1 dans le cas où G_0 est un corps, repose sur son théorème des syzygies (cf. [HI] et [Ei] (1.13) et Chap. 19) dont on rappelle l'énoncé :

Théorème 1.2.4. *Si K est un corps, qu'on note $S = K[X_0, \dots, X_r]$ et G est un S -module gradué de type fini, alors G admet une résolution finie par des S -modules gradués libres de type fini,*

$$0 \rightarrow E_{r+1} \rightarrow E_r \rightarrow \dots \rightarrow E_1 \rightarrow G \rightarrow 0,$$

avec $E_i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} S(-b_{i,j})$, où les $b_{i,j}$ sont des entiers naturels, et où pour un entier b , la notation $S(-b)$ désigne le S -module gradué dont la composante de degré $n \in \mathbb{Z}$, notée $[S(-b)]_n$ coïncide avec la composante de degré $n - b$ de S , notée S_{n-b} .

Ce point de vue donne directement, par additivité de la fonction de Hilbert F_M dans une suite exacte, et le calcul de la fonction de Hilbert des S -modules libres, la conclusion du théorème 1.2.1 (cf. [E-H] III 3.3). Cependant, il donne aussi d'autres invariants, les $b_{i,j}$ du théorème ci-dessus, dont on montre (cf. e.g. [Ei] Ex. A3.18) qu'ils sont indépendants de la résolution minimale choisie pour G , et appelés *nombre de Betti de G* . Ces invariants sont plus fins que la fonction de Hilbert (cf. [E-H] III 3.3 (5)), mais on ne les étudiera pas ici.

Passage au cas où G_0 est un anneau d'Artin

On ne saurait espérer de théorème analogue au théorème 1.2.4 si G_0 est un anneau d'Artin (cf. la caractérisation cohomologique des anneaux réguliers [Se-2] IV D ou [Ei] (19.12)) : en particulier on ne peut définir de nombres de Betti (cf. ci-dessus) pour les schémas projectifs $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I, R)$ au-dessus du spectre $\text{Spec } R/I$ de l'anneau d'Artin R/I .

En revanche, pour le calcul de la fonction de Hilbert, Samuel a montré (dans [Sa] Thm. 8 p. 173) qu'on peut se ramener du cas où G_0 est un anneau d'Artin au cas où G_0 est un corps.

On va donner dans le paragraphe qui suit une preuve différente de celle de Samuel (loc. cit.), en partant d'un point de vue géométrique (cf. [EGA] III, § 2.5) qui au départ peut sembler un peu éloigné, mais qui donne ainsi une interprétation géométrique aux valeurs du polynôme de Hilbert P_G d'un anneau gradué G . Comme, dans toute la suite, on ne s'intéresse qu'aux anneaux gradués G de la forme $G(I, R)$ pour un idéal I m -primaire dans un anneau local (R, m) , pour faciliter les références futures, on se contente d'explicitier cette interprétation pour les anneaux $G(I, R)$ et le polynôme de Hilbert $P_{I, R}^0$ correspondant.

Définition cohomologique du polynôme $P_{I, R}^0$

On reprend les notations du § 1.1.2, c'est-à-dire qu'on considère un idéal I m -primaire dans un anneau local (R, m) de dimension d , des générateurs (h_0, \dots, h_r) de I et le plongement $i : \mathcal{E}_I \rightarrow \mathbb{P}_{R/I}^r$, associé à la surjection de R/I -algèbres graduées de $(R/I)[X_0, \dots, X_r]$ dans $G(I, R)$ qui envoie les X_i sur les $\overline{h_i}$, classes des h_i dans I/I^2 (cf. § 1.1.2).

Pour tout $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}$ -module cohérent \mathcal{F} , on considère l'invariant cohomologique suivant (cf. [EGA] III, § 2.5) :

$$\chi_{R/I}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{d-1} l_{R/I}(\mathbb{H}^i(\mathcal{E}_I, \mathcal{F})), \quad (1.20)$$

appelé *caractéristique d'Euler-Poincaré* du faisceau \mathcal{F} , où les H^i désignent les groupes de cohomologie, et les longueurs considérées sont finies (car les $H^i(\mathcal{E}_I, \mathcal{F})$ sont des R/I -modules de type fini, cf. [EGA] III (2.2.2)), et $d-1$ est la dimension de \mathcal{E}_I (cf. thm. 1.2.6 ii) infra).

Le plongement $i : \mathcal{E}_I \rightarrow \mathbb{P}_{R/I}^r$ est équivalent à la donnée du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(1)$ sur \mathcal{E}_I , et on exprime dans le cas particulier de ce faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(1)$ un résultat en fait général pour les faisceaux cohérents \mathcal{F} sur \mathcal{E}_I (cf. la preuve ci-dessous) :

Théorème 1.2.5.

i) La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_{R/I}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n))$ coïncide pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ avec les valeurs $P(n)$ d'un polynôme P .

D'autre part, la cohomologie des espaces projectifs donne les résultats suivants :

ii) Pour n assez grand, $\chi_{R/I}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n)) = l_{R/I}(\Gamma(\mathcal{E}_I, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n)))$,

iii) Pour n assez grand, $\Gamma(\mathcal{E}_I, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n)) \simeq I^n/I^{n+1}$.

On déduit du ii) et iii) que la caractéristique d'Euler Poincaré coïncide pour n assez grand avec la fonction de Hilbert $F_{I,R}^0$ définie au thm.-déf. 1.2.1.

On déduit alors du i) que la caractéristique d'Euler-Poincaré est exactement le polynôme de Hilbert-Samuel $P_{I,R}^0$ défini au thm.-déf. 1.2.1, ce qui donne une interprétation géométrique aux valeurs de $P_{I,R}^0$, par exemple, $P_{I,R}^0(0) = \chi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I})$.

Preuve: (Esquisse)

i) On considère plus généralement l'invariant d'Euler-Poincaré d'un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}$ -module cohérent \mathcal{F} comme dans (1.20). La preuve du i) dans [EGA] III (2.5.3), consiste à se ramener par l'additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré, au cas des faisceaux tels que

$$m.\mathcal{F} = 0. \quad (1.21)$$

où m désigne l'idéal maximal de R .

On rappelle qu'au § 1.1.4, on a défini le sous-schéma \mathcal{E}_I^0 de \mathcal{E}_I comme la fibre schématique $(e_I)^{-1}(O)$, où $O \in \text{Spec } R$ est le point fermé.

Si on note j l'inclusion $\mathcal{E}_I^0 \rightarrow \mathcal{E}_I$ (qui est au-dessus de l'inclusion de $\text{Spec } R/m$ dans $\text{Spec } R/I$), les faisceaux qui vérifient la condition (1.21) s'écrivent alors comme des images directes :

$$\mathcal{F} = j_*(\mathcal{F}'),$$

d'un faisceau cohérent \mathcal{F}' de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I^0}$ -modules.

On en déduit que $\chi_{R/I}(\mathcal{F}(n)) = \chi_{R/m}(\mathcal{F}'(n))$.

Ceci est la version géométrique de l'argument de réduction de Samuel annoncé au paragraphe précédent.

On est donc ramené au cas où $G_0 = R/m$, et dans ce cas, on peut utiliser le théorème des syzygies (cf. 1.2.4) et encore l'additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré (cf. [EGA] III loc. cit.) pour se ramener à une combinaison linéaire de caractéristique d'Euler-Poincaré d'espaces projectifs, qui sont polynomiales.

Le ii) est conséquence directe du théorème fondamental sur la cohomologie des espaces projectifs ([EGA] III (2.2.2) iii)) à savoir qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ les $H^q(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(n)) = 0$ pour $q > 0$. Le iii) s'en déduit aussi (cf. [EGA] III (2.3.1) ou [Ii] Prop. 7.6). \square

1.2.3 Éléments superficiels

La section précédente a donné une interprétation géométrique du polynôme de Hilbert-Samuel $P_{I,R}^0$ dans le plongement de \mathcal{E}_I dans $\mathbb{P}_{R/I}^r$. On donne ici l'interprétation du degré de ce polynôme :

Théorème-Définition 1.2.6. Soit (R, m) un anneau local noethérien, et I un idéal m -primaire de R . Si on écrit le terme de plus haut degré de $P_{I,R}^0(X)$ sous la forme

$$\frac{e(I,R)}{(d-1)!} X^{d-1},$$

alors :

- i) le degré (noté $d-1$) de $P_{I,R}^0$ coïncide avec la dimension combinatoire $\dim \mathcal{E}_I$ du schéma $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I,R)$ (au sens de [AC] VIII § 1, c'est-à-dire la longueur maximale d'une chaîne de fermés irréductibles).
- ii) D'après la prop. 1.1.22, on a l'égalité $\dim \mathcal{E}_I = \dim R - 1$, aussi le i) se traduit aussi en disant que le degré de $P_{I,R}^0$ égale $\dim R - 1$.
- iii) Le coefficient $e(I,R)$ est un entier positif appelé multiplicité de I dans R , ou degré du schéma projectif \mathcal{E}_I dans $\mathbb{P}_{R/I}^r$.

Le fait que le degré de $P_{I,R}^0$ coïncide avec $\dim \mathcal{E}_I$ nécessite une méthode de calcul de $P_{I,R}^0$ par induction, fournie par les éléments superficiels de P. Samuel. La formulation suivante est donnée dans [AC] VIII § 7 No. 5 Def. 2 et rem. 1 seq. :

Définition 1.2.7. Un élément $f \in I^s$ est superficiel de degré s , si, et seulement si, il existe un entier n_0 tel que la multiplication par la classe \bar{f} de f dans I^s/I^{s+1} est injective de $I^n/I^{n+1} \rightarrow I^{n+s}/I^{n+s+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

La théorie des idéaux premiers homogènes associés à un anneau gradué (cf. [Ei] § 3.5, ou [AC] IV § 3) donne immédiatement la caractérisation suivante des éléments superficiels :

Proposition 1.2.8. Un élément $f \in I^s - I^{s+1}$ est superficiel si, et seulement si, sa classe $\bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ n'appartient à aucun des idéaux premiers homogènes associés à $G(I,R)$ autre que l'idéal irrelevant (cf. (A.2) page 115) :

$$G(I,R)_+ = \bigoplus_{n \geq 1} I^n/I^{n+1}.$$

Le lemme d'évitement des idéaux premiers dans un anneau gradué (cf. [AC] IV § 3) dit qu'on peut trouver un élément homogène de degré > 0 évitant un ensemble fini d'idéaux premiers homogènes dont l'union n'est pas $G(I,R)_+$ entier. Cela donne immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.9. Soit I un idéal d'un anneau noethérien R . Il existe des éléments superficiels de I (d'un certain ordre). On verra qu'il peut ne pas en exister pour un ordre s fixé (cf. l'exemple de Samuel p. 49), mais que si $k = R/m$ est infini, il en existe de tous ordres (cf. lemme 1.4.9).

Les éléments superficiels introduits par Samuel ont la propriété très forte suivante, qui permet en particulier de démontrer le i) du théorème 1.2.6 précédent) :

Théorème 1.2.10. Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local noethérien (R, m) , et $f \in I^s - I^{s+1}$ est un élément d'ordre s de I .

On rappelle qu'on note $G(I,R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$ et donc aussi

$$G(I/f, R/f) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (I/f)^n / (I/f)^{n+1}.$$

On note encore $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I,R)$ et $\mathcal{E}_{I/f} = \text{Proj } G(I/f, R/f)$ les schémas projectifs correspondants.

Si f est un élément superficiel de I , alors :

- i) en terme de dimension d'espaces topologiques : $\dim \mathcal{E}_{I/f} = \dim \mathcal{E}_I - 1$,

ii) en terme de fonctions de Hilbert-Samuel : la fonction de Hilbert-Samuel $F_{I/f,R/f}^0$ est reliée à la fonction $F_{I,R}^0$ par la relation :

$$\forall n \geq n_0, \quad F_{I/f,R/f}^0(n) = F_{I,R}^0(n) - F_{I,R}^0(n-s). \quad (1.22)$$

Preuve: Cette proposition sera démontrée au § 1.3.7. □

De cette proposition, on déduit immédiatement le i) du thm. 1.2.6 puisque :

- \mathcal{E}_I est vide (i.e de dimension -1) si, et seulement si, $\text{Spec } R$ est de dimension zéro (cf. prop. 1.1.22), i.e. R est un anneau d'Artin, et donc I est nilpotent, donc $F_{I,R}^0(n) = 0$, pour $n \geq n_0$.
- si \mathcal{E}_I est non vide, la proposition précédente permet de montrer que $\dim \mathcal{E}_I$ et $\deg P_{I,R}^0$ coïncident par induction.

On déduit aussi du thm. 1.2.10 le iii) du théorème 1.2.6, toujours par induction, puisque (1.22) donne que pour f superficiel $e(I/f, R/f) = e(I, R)$, ce qui permet de se ramener au cas où $\dim R = 0$, pour lequel $e(I, R)$ est la longueur $l(R)$ de l'anneau d'Artin R , strictement positive. □

Remarques sur le cas des modules

Si M est un R -module et I est un idéal de R , on peut définir le $G(I, R)$ -module gradué :

$$G(I, M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n M / I^{n+1} M. \quad (1.23)$$

Les notions d'invariants de Hilbert-Samuel et d'éléments superficiels se généralisent de la manière suivante :

Remarque 1.2.11 (Pour les éléments superficiels).

Si M est un module de type fini sur un anneau local (R, m) et I un idéal de R , on peut définir un élément $f \in I^s - I^{s+1}$ de degré s dans I comme *superficiel dans I relativement à M* si, et seulement si, la multiplication par la classe $\bar{f} \in I^s / I^{s+1}$ est injective de

$$I^n M / I^{n+1} M \rightarrow I^{n+s} M / I^{n+s+1} M,$$

pour n assez grand (i.e. (TN)-injective).

Avertissement. Toutes les considérations sur les éléments superficiels de ce chapitre 1 s'adaptent sans mal à ce cas plus général (y compris les considérations géométriques du § 1.4, en considérant les modules $G(I, M)$ associés, au sens de l'appendice A.6). Compte-tenu du caractère direct de cette adaptation, et du fait que nulle application dans la thèse ne justifiait ce cas plus général, on a choisi pour la simplicité des notations de se cantonner au cas qui est celui de la définition 1.2.7.

Remarque 1.2.12 (Pour les invariants de Hilbert-Samuel).

De même si I est un idéal d'un anneau local (R, m) et M est un module de type fini sur R tel que M/IM est de longueur finie, on peut définir (cf. e.g. [Se-2]) les fonctions de Hilbert-Samuel de l'idéal I relativement au module M et les polynômes associés : on renvoie au § 2.2.1 pour le rappel de ces notions, qui seront utilisées au chapitre 2.

1.3 Élément transverse pour un invariant, approche algébrique

1.3.1 Définitions et motivations

Au cours § 1.2, on a défini les invariants de Hilbert-Samuel suivants pour un idéal m -primaire I d'un anneau local noethérien (R, m) , que l'on cite dans l'ordre décroissant (au sens où chacun détermine ceux qui le suivent) : la fonction de Samuel $F_{I,R}^1$ (équivalente à la donnée de la fonction de Hilbert $F_{I,R}^0$), le polynôme de Hilbert-Samuel $P_{I,R}^1$, le polynôme de Hilbert $P_{I,R}^0$, la multiplicité $e(I, R)$, la dimension $\dim R$ de l'anneau R (qui ne dépend pas du choix de I !).

On va définir un élément $f \in I$ comme *transverse* pour un des invariants cités ci-dessus si l'on peut « dériver » l'invariant correspondant pour l'idéal I/f de l'anneau local R/f à partir de celui de I dans R . Précisément :

Définition 1.3.1. On dira qu'un élément f d'un idéal I , m -primaire dans un anneau local noethérien (R, m) est d'ordre s si $f \in I^s - I^{s+1}$. On dira qu'un tel élément d'ordre s est

- i) F -transverse (resp. P^1 , resp. P^0)-transverse, si on a la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{I/f, R/f}^0(n) = F_{I,R}^0(n) - F_{I,R}^0(n-s). \quad (1.24)$$

(resp. en remplaçant F^0 par P^1 , resp. P^0 dans (1.24), mais pour les P^i cela donne une égalité de polynômes).

- ii) e -transverse si on a les deux relations

$$\dim R/f = \dim R - 1, \quad (1.25)$$

$$e(I/f, R/f) = s e(I, R). \quad (1.26)$$

- iii) sécant (plutôt que dim-transverse) si on a seulement la relation (1.25) sur les dimensions.

Remarque 1.3.2.

i) Noter que pour la F -transversalité, on n'a pas distingué F^0 et F^1 et que dans (1.24) on peut remplacer F^0 par F^1 , car ces deux fonctions définies sur \mathbb{N} se déterminent l'une l'autre (cf. (1.16) et (1.18)).

ii) Il est clair une fois encore que les propriétés énumérées dans la définition précédente sont données dans l'ordre décroissant, au sens où chacune implique les suivantes.

iii) La terminologie *d'élément transverse* pour les invariants de Hilbert-Samuel, reprend celle utilisée par U. Orbanz (dans [Or], cf. aussi [HIO] §32), elle-même issue de celle utilisée par O. Zariski dans [Za-5] (cf. déf. 2.3. et § 3 loc. cit.).

L'étude entreprise ici, motivations, résultats et méthodes

Du point de vue des résultats :

La première motivation de ce § 1.3 est la caractérisation des éléments vérifiant les différentes conditions de transversalité énumérées au i) de la définition 1.3.1, c'est-à-dire la F -transversalité, la P^1 et la P^0 -transversalité. L'étude de la e -transversalité est reportée au chapitre 2.

On a ainsi les résultats suivant :

– pour la F -transversalité : dans le cadre des idéaux m -primaires, le critère de F -transversalité est un résultat classique, facile à obtenir, qui est un cas particulier de celui

de Orbanz (qui étudie des idéaux non m -primaire cf. e.g. [HIO] (32.4)) mais que nous rappelons pour être complet au § 1.3.5.

– pour la P^1 -transversalité, on montre au § 1.3.6 que les éléments P^1 -transverses sont exactement les éléments superficiels non diviseurs de zéro.

– pour la P^0 -transversalité, au § 1.3.7, on donne deux démonstrations du fait que les éléments superficiels sont P^0 -transverses. *En revanche, l'auteur ignore s'il existe des éléments P^0 -transverses autres que les superficiels.*

Du point de vue des méthodes

L'étude de la transversalité pour les invariants de Hilbert-Samuel est reliée à l'étude des deux suites exactes de multiplications rappelées aux § 1.3.2 : les suites (1.27) et (1.29) loc. cit.

On est alors naturellement amené à formuler un certain nombre de conditions⁴ algébriques sur un élément $f \in I$ reliées à l'injectivité et/ou à la surjectivité dans ces suites exactes, et à ces conditions « pour n assez grand » (cf. § 1.3.3 et § 1.3.4).

Certaines de ces conditions se formulent dans l'anneau gradué $G(I,R)$ et peuvent se traduire dans l'anneau R en utilisant la notion de *conducteur* (cf. déf. 1.3.3), d'autres ne peuvent se formuler que dans l'anneau R .

La seconde motivation de ce § 1.3 est d'explicitier les équivalences, faciles ou moins faciles, entre les conditions exprimées en termes de *conducteurs* et celles en termes d'*anneaux gradués*, et en particulier celles particulières aux cas où on a une propriété « pour tout n assez grand ».

L'étude de la P^1 -transversalité est une conséquence facile de cette étude minutieuse.

Comme souligné dans l'introduction du chapitre, cette seconde motivation est d'avoir un glossaire entre les expressions des livres ou articles d'algèbre (cf. e.g. [Ki], [Sy-3]) et le langage plus imagé de la géométrie des anneaux gradués, (cf. le § 1.4 pour cette géométrie).

Du point de vue des démonstrations

– *les conducteurs et Artin-Rees* – pour prouver les sorites et les caractérisations qui suivent, on n'a pas hésité, dans ce § 1.3, à utiliser l'arsenal algébrique (élémentaire) des conducteurs, et du lemme d'Artin-Rees (via le lemme 1.3.12), car il s'agit des preuves les plus élémentaires.

– *les phénomènes cachés par les conducteurs et Artin-Rees* – on souligne cependant aux remarques 1.3.10 et 1.3.15 que ce recours aux conducteurs et/ou à Artin-Rees pour démontrer des résultats dont les hypothèses et conclusions s'expriment simplement à l'intérieur de l'anneau gradué $G(I,R)$ cachent la compréhension des phénomènes. Un autre exemple de phénomène caché est donné à la scholie page 38.

– *l'explicitation des phénomènes cachés* ne relève pas de ce paragraphe 1.3, même si le glossaire constitué ici est un pas important.

- L'explicitation d'une preuve géométrique du résultat de Kirby sera donnée au § 1.4.2, ce qui résout aussi le miracle de la scholie page 38.
- Pour le mystère de la remarque 1.3.10, il faudra attendre le chapitre 2, où il sera éclairci comme conséquence d'un résultat général dû à Flenner et Vogel (cf. § 2.2 cor. 2.2.3).

Bien entendu, on ne prétend pas avoir élucidé tous les « mystères gradués »

4. désignées comme *sorites*

1.3.2 Deux suites exactes

Définition 1.3.3. Dans ce qui suit, on désigne par $(I : J)$ et on appelle conducteur de l'idéal J dans l'idéal I , dans un anneau R , l'ensemble :

$$(I : J) = \{x \in R, J.x \subset I\}.$$

Suite exacte de multiplication par f

Si $f \in I^s \setminus I^{s+1}$ est un élément d'ordre s d'un idéal I d'un anneau R , et si $n \geq s$ est un entier, on peut considérer la multiplication par f des éléments $x + I^{n-s}$ de R/I^{n-s} , en posant $f.(x + I^{n-s}) = fx + I^n$, la classe de fx dans R/I^n (qui ne dépend pas du représentant $x \in R$ choisi pour $x + I^{n-s}$), et on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow (I^n : f)/I^{n-s} \rightarrow R/I^{n-s} \xrightarrow{f} R/I^n \rightarrow R/((f) + I^n) \rightarrow 0, \quad (1.27)$$

dans laquelle le conoyau s'écrit encore :

$$R/((f) + I^n) \simeq (R/(f))/((I/(f))^n).$$

Ceci donne immédiatement en terme de fonctions de Samuel le lemme suivant :

Lemme 1.3.4. Soit I un idéal m -primaire dans (R, m) local noethérien, et $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s . Alors les fonctions de Samuel F^1 de I dans R et de I/f dans R/f sont reliées par l'égalité, pour tout $n \geq s$:

$$F_{I,R}^1(n) - F_{I,R}^1(n-s) = F_{I/f,R/f}^1(n) - l_R((I^n : f)/I^{n-s}). \quad (1.28)$$

Suite exacte de multiplication par \bar{f}

D'abord une précision terminologique (voir aussi l'annexe, §C.2) :

Définition 1.3.5. On considère encore $f \in I^s \setminus I^{s+1}$ un élément d'ordre s d'un idéal I d'un anneau R , et on note $\bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ la classe de f dans l'anneau gradué $G(I, R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$. Cette classe \bar{f} est aussi appelé *forme initiale de f dans $G(I, R)$* , et donc notée aussi $\text{in}_I(f) = \bar{f}$.

Alors, pour $n \geq s$, on a la suite exacte de multiplication par \bar{f} (dans $G(I, R)$ en restriction à la composante de degré $n-s$) :

$$0 \rightarrow ((I^{n+1} : f) \cap I^{n-s})/I^{n-s+1} \rightarrow I^{n-s}/I^{n-s+1} \xrightarrow{\bar{f}} I^n/I^{n+1} \rightarrow \mathcal{C}_n \rightarrow 0 \quad (1.29)$$

où cette fois l'interprétation du conoyau \mathcal{C}_n demande un peu plus de prudence. Par définition, \mathcal{C}_n est la composante de degré n de l'anneau gradué quotient :

$$G(I, R)/(\bar{f}.G(I, R)), \quad (1.30)$$

On utilisera la notation suivante :

$$\mathcal{C}_n = [G(I, R)/\bar{f}.G(I, R)]_n. \quad (1.31)$$

L'avertissement suivant s'impose :

Avertissement. En général, l'anneau quotient donné en (1.30) est bien différent de l'anneau $G(I/f, R/f)$ que l'on aimerait avoir comme conoyau dans la suite exacte (1.29).

En effet, on rappelle :

Proposition-Définition 1.3.6. *Si I est un idéal d'un anneau R et $J \subset I$ est un idéal contenu dans I , et si on note $\text{in}_I(J)$ l'idéal⁵ de $G(I,R)$ engendré par les formes initiales des éléments de J , alors on a, par construction des algèbres graduées, l'isomorphisme (cf. [HIO] (8.8)) :*

$$G(I/J, R/J) \simeq G(I, R) / \text{in}_I(J). \quad (1.32)$$

Ici, on considère l'idéal principal $J = f.R$, et ce qu'il faut comprendre à travers l'Avertissement précédent est qu'en général, l'idéal $\text{in}_I(f.R)$ n'est pas engendré par la forme initiale $\text{in}_I f$ dans $G(I, R)$, c'est-à-dire qu'on peut avoir une inclusion stricte :

$$\text{in}_I(f).G(I, R) \subset \text{in}_I(fR). \quad (1.33)$$

On peut encore formuler ceci en disant que la surjection canonique :

$$G(I, R) / \bar{f}.G(I, R) \rightarrow G(I/f, R/f). \quad (1.34)$$

n'est pas en général un isomorphisme.⁶

Exemple – Si $R = k[x, y]/(x^2 - y^3)$ et $I = m = (x, y)$, alors en prenant $f = x$, $\bar{f} \in I/I^2$ vérifie $\bar{f}^2 = 0$ (car c'est la classe de x^2 dans I^2/I^3 par définition du produit dans $G(I, R)$, or $x^2 = y^3 \in I^3$) donc l'idéal engendré par \bar{f} ne contient pas $\text{in}(x^2) \in I^3/I^4$ qui est, en revanche, dans $\text{in}(fR)$.

Scholie. Comme on a dérivé l'égalité (1.28) de la suite exacte (1.27), on aimerait dériver une égalité sur les fonctions F^0 à partir de (1.29). D'après la déf. 1.2.7, les *éléments superficiels* de I sont exactement ceux pour lequel le noyau est nul dans (1.29) pour n assez grand. Dans ce qui suit, on étudie dans un premier temps des critères donnant l'égalité (pour n assez grand) entre le conoyau C_n et $G(I/f, R/f)$ (§ 1.3.3), puis on revient sur la condition de superficialité (§ 1.3.4) pour constater que ces critères sont miraculeusement vérifiés pour f superficiel, de sorte que, quand on a l'injectivité dans (1.29), on a automatiquement le bon conoyau!

1.3.3 Sorite d'égalité dans l'inclusion $\text{in}_I(f).G(I, R) \subset \text{in}_I(fR)$.

Un petit jeu de définitions (conducteurs et produit dans $G(I, R)$) donne le premier sorite suivant :

Lemme 1.3.7. *Soit I un idéal d'un anneau R . Soit $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . Les conditions suivantes sont équivalentes pour un entier $n \geq s$ donné :*

- i) $(I^n : f) = I^{n-s}$,
- ii) l'annulateur $\text{Ann}(f)$ (défini comme $(0 : (f))$) est inclus dans I^{n-s} , et on a l'égalité

$$I^n \cap (f) = f.I^{n-s}. \quad (1.35)$$

A son tour, l'égalité (1.35) seule implique les deux assertions équivalentes suivantes

- iii) les deux idéaux $\text{in}(f)G(I, R)$ et $\text{in}(fR)$ ont la même composante de degré n dans $G(I, R)$,

5. cet idéal est noté $G(I, J \subset R)$ dans [HIO] § (8.7) qu'on utilise ici comme référence, sauf pour cette notation (cf. aussi la notation $B(I, J \subset R)$ qu'on a adoptée au § 1.1.5).

6. elle l'est cependant si \bar{f} est non diviseur de zéro dans $G(I, R)$, cf. 1.3.5 ci-dessous.

iv) on a l'égalité des composantes de degré n des anneaux gradués

$$[G(I,R)/\text{in}(f)G(I,R)]_n = [G(I/f,R/f)]_n.$$

La preuve est un exercice facile dans les anneaux gradués :

Preuve: i) \Rightarrow ii) : il est clair que $\text{Ann}(f) = (0 : (f)) \subset (I^n : f)$ d'où la première assertion du ii). Dans la seconde, l'inclusion non triviale est $I^n \cap (f) \subset fI^{n-s}$. Or un $h \in I^n \cap (f)$ s'écrit $h = fg$ comme élément de (f) et donc $g \in (I^n : f)$ car $h \in I^n$. Le i) donne alors que $g \in I^{n-s}$, ce qu'il fallait démontrer.

ii) \Rightarrow i) : Soit $g \in (I^n : f)$, on a $f.g \in I^n$ et d'après (1.35) il existe $h \in I^{n-s}$ tel que $f.g = f.h$ donc $g - h \in \text{Ann}(f) \subset I^{n-s}$ par hypothèse, d'où $g \in I^{n-s}$.

(1.35) \Rightarrow iii) : par définition la composante de degré n de $\text{in}(fR)$ dans $G(I,R)$ est :

$$[\text{in}(fR)]_n = ((f) \cap I^n) / I^{n+1}.$$

Aussi, si on suppose (1.35), tout élément $\bar{h} \in [\text{in}(fR)]_n$ est la classe de $h \in I^n \cap (f)$, $h \notin I^{n+1}$ qui s'écrit $h = f.g$ avec $g \in I^{n-s}$, et par définition du produit dans $G(I,R)$, $\bar{h} = \bar{f}\bar{g}$ (car $h \notin I^{n+1}$), d'où iii).

Enfin, iii) \Leftrightarrow iv) est seulement la traduction de (1.32). \square

Si maintenant, on considère les mêmes conditions mais simultanément pour tous les entiers $n \geq n_0$, on obtient le sorite plus fin suivant, qui est celui annoncé dans le titre de ce paragraphe :

Lemme 1.3.8. *Soient I un idéal d'un anneau local noethérien (R,m) , et $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\forall n \geq n_0, (I^n : f) = I^{n-s}$,
- ii) f est non diviseur de zéro et on a l'égalité :

$$\forall n \geq n_0, I^n \cap (f) = fI^{n-s}. \quad (1.36)$$

A son tour, l'égalité (1.36) seule est équivalente aux deux assertions équivalentes suivantes :

- iii) les deux idéaux $\text{in}(f)G(I,R)$ et $\text{in}(fR)$ ont la même composante de degré n dans $G(I,R)$, pour tout $n \geq n_0$,
- iv) on a pour tout $n \geq n_0$, l'égalité des composantes de degré n des anneaux gradués

$$[G(I,R)/\text{in}(f)G(I,R)]_n = [G(I/f,R/f)]_n.$$

Scholie. La différence majeure, non triviale, entre les deux lemmes précédents est que l'implication (1.35) \Rightarrow iii) du lemme 1.3.7 est remplacée par une *équivalence* (1.36) \Leftrightarrow iii) au lemme 1.3.8 (cf. aussi la preuve ci-dessous).

Démonstration. L'équivalence i) \Leftrightarrow ii) se transmet directement de celle du lemme 1.3.7 en remarquant que dans (R,m) local noethérien, le lemme d'intersection de Krull (cf. e.g. [Ei] 5.4) donne que l'intersection

$$\bigcap_{n \geq n_0} I^{n-s} = (0).$$

De même, l'implication (1.36) \Rightarrow iii) est donnée par le lemme 1.3.7.

Reste à montrer l'implication réciproque : on suppose donc iii) et on considère un élément $g \in I^n \cap (f)$, où $n \geq n_0$.

Soit $m \geq n$ l'ordre de g i.e. $g \in I^m - I^{m+1}$. Alors $\bar{g} = \text{in}(g) \in \text{in}(fR)$ donc s'écrit $\bar{g} = \bar{f} \cdot \bar{h}$ par iii), avec h un élément d'ordre $m - s$ de I . De cette égalité dans $G(I, R)$, on déduit $g - fh \in I^{m+1}$, soit encore $g \in fI^{m-s} + I^{m+1} \subset fI^{n-s} + I^{n+1}$. Ainsi, on a traduit iii) par l'inclusion :

$$(f) \cap I^n \subset fI^{n-s} + I^{n+1}.$$

En intersectant le second membre avec l'idéal (f) , on en déduit :

$$(f) \cap I^n \subset fI^{n-s} + (f) \cap I^{n+1}. \quad (1.37)$$

(cette distributivité est appelée *loi modulaire de Dedekind* dans [S-Z] Tome 1 p. 137!).

Mais, dans (1.37), le terme $(f) \cap I^{n+1}$ est, par le même raisonnement, inclus dans l'idéal $fI^{n+1-s} + (f) \cap I^{n+2}$. De sorte que par une récurrence immédiate, on déduit de (1.37) l'inclusion :

$$(f) \cap I^n \subset fI^{n-s} + (f) \cap I^{n+k},$$

pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. On conclut alors avec le théorème d'intersection de Krull qu'on a l'inclusion cherchée : $(f) \cap I^n \subset fI^{n-s}$. \square

1.3.4 Injectivité de la multiplication par \bar{f} dans $G(I, R)$

On commence par un cas facile, celui de l'injectivité en tout degré :

Éléments \bar{f} non diviseurs de zéros dans $G(I, R)$

La définition du produit dans $G(I, R)$ et le sorite (lem. 1.3.8) donnent immédiatement (cf. [HIO] (13.10) pour un énoncé plus général sur les suites d'éléments de R) :

Lemme 1.3.9. *Soit I un idéal d'un anneau local noethérien (R, m) . Soit $f \in I^s \setminus I^{s+1}$ et $\bar{f} = \text{in}(f)$ sa forme initiale dans $G(I, R)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) *l'élément \bar{f} est non diviseur de zéro dans $G(I, R)$,*
- ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(I^n : f) = I^{n-s}$,*
- iii) *l'élément f de R est non diviseur de zéro, et on a l'isomorphisme :*

$$G(I, R)/\bar{f}.G(I, R) \simeq G(I/f, R/f).$$

Preuve: i) \Leftrightarrow ii) est direct. Noter que dans ii), si $n < s$, par convention $I^{n-s} = 0$, donc la condition est triviale.

Pour ii) \Leftrightarrow iii) on applique le lemme 1.3.8, avec $n_0 = s$. Remarquons que par convention, $I^0 = R$ et plus généralement $I^{-k} = R$ si $k > 0$. Aussi les conditions $(I^n : f) = I^{n-s}$ sont triviales pour $n \leq s$. De la même façon, les composantes de degré $k < s$ des deux anneaux gradués dans le iii) coïncident toujours pour $f \in I^s - I^{s+1}$, car $[\text{in}(fR)]_k = [\text{in}(f)G(I, R)]_k = 0$.

\square

Remarque 1.3.10. Le passage par l'expression en terme de conducteur (ii) pour montrer l'équivalence entre (i) et (iii) n'est peut-être pas très élégant. On aimerait quelque chose de plus « géométrique ». Au chapitre 2 cor. 2.2.3, on montrera que l'équivalence i) \Leftrightarrow iii) peut se déduire directement d'un théorème de Flenner-Vogel (thm. 2.2.2) étudiant ce que deviennent les suites exactes de R -modules quand on prend les gradués associés.

Éléments superficiels et conducteurs

La proposition suivante est l'analogie de la première partie du lemme 1.3.9 quand on affaiblit la condition sur \bar{f} (cf. déf. 1.2.7) :

Lemme 1.3.11. *Soit (R, m) local noethérien et I un idéal m -primaire de R . On a les deux caractérisations suivantes :*

i) *Un élément $f \in I^s \setminus I^{s+1}$ est superficiel dans I si, et seulement si, il existe deux entiers c et n_0 tels que :*

$$\forall n \geq n_0, \quad (I^n : f) \cap I^c = I^{n-s}. \quad (1.38)$$

ii) *Un élément $f \in I^s \setminus I^{s+1}$ est superficiel dans I et non diviseur de zéro dans R , si et seulement si, il existe un entier n_2 tel que :*

$$\forall n \geq n_2, \quad (I^n : f) = I^{n-s}. \quad (1.39)$$

Preuve: Le i) est direct : si f vérifie (1.38) et \bar{g} est de degré $n - s - 1 \geq c$ dans $G(I, R)$, alors l'égalité $\bar{f} \cdot \bar{g} = 0 \in I^{n-1}/I^n$ donne pour un représentant $g \in I^{n-s-1}$ de \bar{g} , que le produit $f \cdot g \in I^n$, donc que $(I^n : f) \cap I^c$ contient un élément $g \in I^{n-s-1} - I^{n-s}$ ce que contredit l'hypothèse (1.38). On raisonne de même pour la réciproque.

Pour le ii), on utilise le résultat suivant qui se déduit directement du théorème d'Artin-Rees (cf. [S-Z] Cor. 1 p. 272, et Rem. b p. 273) :

Lemme 1.3.12. *Si I est un idéal d'un anneau noethérien R , et $f \in I$, alors il existe un entier k tel que pour tout $n \geq k$ on ait :*

$$(I^n : (f)) \subset I^{n-k} + (0 : f). \quad (1.40)$$

Grâce à ce lemme, dans le cas où f est non diviseur de zéro, on obtient l'inclusion :

$$(I^n : (f)) \subset I^{n-k}.$$

Cette inclusion et l'égalité (1.38) donnent l'égalité (1.39) demandée. La réciproque est évidente. \square

Grâce à ce passage par le conducteur (comparer à la rem. 1.3.10), on déduit immédiatement le critère suivant :

Corollaire 1.3.13. *Un élément $f \in I$ d'ordre s , est superficiel dans I et non diviseur de zéro dans R , si et seulement si, f est non diviseur de zéro dans R et la surjection canonique (1.34) associée à l'inclusion $\text{in}(f) \cdot G(I, R) \subset \text{in}(fR)$ (cf. (1.33)) i.e.*

$$G(I, R) / \text{in}(f)G(I, R) \rightarrow G(I/f, R/f),$$

qui est un épimorphisme d'anneaux gradués, est un isomorphisme sur les composantes de degré assez grand.

Démonstration. Compte-tenu de l'expression (1.39) du lemme précédent, on peut appliquer l'équivalence i) \Leftrightarrow ii) (et la variante iv)) du lemme 1.3.8. \square

Une question naturelle soulevée par le corollaire précédent est alors : la condition f superficiel suffit-elle à avoir l'isomorphisme $G(I/f, R/f) \simeq G(I/f, R/f)$ en degré assez grand ?

La caractérisation suivante, due à D. Kirby (cf. [Ki] Thm. 3) (pour i) \Leftrightarrow ii)) répond par l'affirmative à cette question :

Théorème 1.3.14. Soit I un idéal d'un anneau local noethérien (R, m) , et $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . On note $(0 : I^\infty) = \cup_{n \in \mathbb{N}} (0 : I^n)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) f est un élément superficiel de I ,
- ii) $I^n \cap (f) = fI^{n-s}$ pour $n \geq n_0$, et la multiplication par f de $R/(0 : I^\infty) \rightarrow R/(0 : I^\infty)$ est injective.
- iii) $[G(I/f, R/f)]_{n \geq n_0} \simeq [G(I, R)/\bar{f}.G(I, R)]_{n \geq n_0}$ et f n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à R ne contenant pas I .

Démonstration. i) \Leftrightarrow ii) : Kirby démontre l'équivalence de ii) avec la condition (1.38):

$$(I^n : f) \cap I^c = I^{n-s},$$

caractérisant les éléments superficiels (cf. lem. 1.3.11 i)).

Pour montrer i) \Rightarrow ii), Kirby utilise la même inclusion (1.40) qu'au lemme 1.3.12, donnée par le théorème d'Artin-Rees, pour montrer $I^n \cap (f) = fI^{n-s}$. Le reste est laissé en exercice (ou bien se reporter à [Ki] p. 24-25).

Dans ii) \Leftrightarrow iii), l'équivalence de $I^n \cap (f) = fI^{n-s}$ pour $n \geq n_0$ avec $[G(I/f, R/f)]_{n \geq n_0} \simeq [G(I, R)/\bar{f}.G(I, R)]_{n \geq n_0}$ est donné par le lemme 1.3.8.

Pour l'équivalence des deux autres conditions dans ii) et iii) : d'après e.g. [Ei] § 3.6, l'idéal $(0 : I^\infty)$, qui est aussi noté $H_I^0(R)$, vérifie la propriété suivante en termes d'idéaux premiers associés :

$$\text{Ass}(R/H_I^0(R)) = \{p \in \text{Ass}(R), p \not\supseteq I\}.$$

Aussi la seconde condition : f non diviseur de zéro dans $R/H_I^0(R)$ du ii) est bien équivalente à la seconde condition du iii). \square

Remarque 1.3.15. La preuve précédente, bien qu'élémentaire, utilise le lemme d'Artin-Rees, via l'inclusion (1.40), et n'est pas très « visuelle ». Une démonstration géométrique de ce résultat sera donnée au théorème 1.4.22.

1.3.5 Caractérisation des éléments F -transverses

On utilise ici le lemme facile 1.3.9 de la section précédente pour expliciter la condition de F -transversalité.

Proposition 1.3.16. Si I est un idéal d'un anneau (R, m) local noethérien, $f \in I^s \setminus I^{s+1}$, et $\bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ est la classe de f dans $G(I, R)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) \bar{f} est non diviseur de zéro dans $G(I, R)$,
- ii) f est non diviseur de zéro dans R , et on a l'isomorphisme :

$$G(I/f, R/f) \simeq G(I, R)/\bar{f}G(I, R).$$

Si I est m -primaire, ces deux propriétés sont encore équivalentes à :

- iii) f est F -transverse, c'est-à-dire qu'on a pour tout entier $n \geq s$ l'égalité :

$$F_{I/f, R/f}^1(n) = \Delta^s F_{I, R}^1(n).$$

Preuve:

i) \Leftrightarrow ii) : Ce n'est qu'une redite de l'équivalence i) \Leftrightarrow iii) du lemme 1.3.9. i) \Leftrightarrow iii) est donné en remplaçant 1.3.9 i) \Leftrightarrow ii), dans (1.28). \square

Remarques sur la nature arithmétique de l'anneau $G(I,R)$

D'après la proposition 1.3.16 ci-dessus, l'existence d'éléments F -transverses dépend de la nature arithmétique de $G(I,R)$: il se peut que tous les éléments de $G(I,R)$ soient des diviseurs de zéros, même pour un « bon anneau » R et pour $I = m$, et ceci dès la dimension 1 comme le montre l'exemple suivant dû à J. Sally (cf. [Sy-2]).

Proposition 1.3.17 (Sally).

Soit k un corps et R l'anneau local $k[[t^6, t^7, t^{15}]]$. C'est l'anneau local d'une courbe formelle intersection complète de dimension de plongement 3. Cependant l'anneau gradué $G(m,R)$ n'est pas Cohen Macaulay : précisément la classe de l'élément t^{29} dans m^3/m^4 annule tous les éléments de l'idéal maximal $G(m,R)_+ = \bigoplus_{i>0} m^i/m^{i+1}$, i.e. cet idéal maximal est associé à $G(m,R)$.

Preuve:

a) Une première preuve que R est un anneau d'intersection complète :

D'après un critère dû à E. Kunz (cf. [Ku]) l'anneau R , qui est un anneau de semi-groupe, est Gorenstein (cf. [Ei] Chap. 21) car le semi-groupe engendré par 6,7,15 est symétrique (cf. [Ku]).

Comme R est de dimension 1, c'est le quotient de $K[[X,Y,Z]]$ par un idéal de hauteur 2. D'après un résultat de J.P. Serre (cf. [Se-3] ou [Ei] (21.20)), si un tel quotient est Gorenstein, c'est une intersection complète.

b) Une preuve par le calcul du résultat du a) :

En considérant l'anneau global $S = k[t^6, t^7, t^{15}]$, on peut par la méthode d'élimination (voir l'appendice C.4.2) calculer explicitement l'idéal I tel que $S = k[X,Y,Z]/I$.

On obtient alors qu'on peut écrire S comme :

$$k[X,Y,Z]/(Y^3 - XZ, X^5 - Z),$$

et son complété $R = \hat{S} = k[[t^6, t^7, t^{15}]]$ s'écrit encore :

$$R = k[[X,Y,Z]]/(Y^3 - XZ, X^5 - Z).$$

c) Le résultat sur $G(m,R)$ est direct : avec $m = (t^6, t^7, t^{15})$, on vérifie que $t^{29} \in m^3 - m^4$ et $t^{29}.m \subset m^5$. \square

Remarque 1.3.18 (Cas des hypersurfaces). Disons que $R = S/(f)$ est un anneau local d'hypersurface si S est un anneau régulier de dimension d et $f \in S$. Dans ce cas, en notant m l'idéal maximal de R , l'anneau gradué $G(m,R) \simeq k[X_1, \dots, X_d]/(\text{in}(f))$ est toujours Cohen-Macaulay.

Démonstration. Comme S est régulier de dimension d , en notant M son idéal maximal, on a (cf. e.g. [S-Z] Ch. VIII § 11) :

$$G(M,S) \simeq k[X_1, \dots, X_d],$$

en particulier c'est un anneau intègre, donc $\text{in}(f) \in G(M,S)$ est non diviseur de zéro. On peut alors appliquer le lemme 1.3.9 qui donne que :

$$G(m,R) \simeq G(M,S)/(\text{in}_M(f)),$$

ce qui donne aussi $G(m,R)$ Cohen-Macaulay. \square

Si $G(I, R)$ est Cohen-Macaulay, les éléments F -transverses permettent par récurrence de ramener le calcul de la fonction de Samuel au cas de la dimension zéro (cf. [Sy-2] Introduction). On renvoie e.g. à [RES] § 5 pour un exemple de l'importance de la connaissance de la nature arithmétique du cône tangent donné par $G(m, R)$.

Un exemple de $G(I, R)$ non Cohen-Macaulay avec R régulier

L'exemple suivant est donné dans [Vas-1], 5.1.16 :

Exemple 1.3.19. Soit $R = k[[x, y]]$ et l'idéal m -primaire $I = (x^3, y^3, x^2y)$. Alors $G(I, R)$ (qui est de dimension deux, cf. 1.1.22) est de profondeur 1.

1.3.6 Caractérisation des éléments P^1 -transverses

De l'étude algébrique du lemme 1.3.11, on va déduire immédiatement la caractérisation suivante :

Proposition 1.3.20. *Pour un idéal m -primaire I d'un anneau local noethérien (R, m) , et un élément $f \in I^s \setminus I^{s+1}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) f est P^1 -transverse (cf. déf. 1.3.1),
- ii) f est un élément superficiel de I , non diviseur de zéro dans R .

Preuve: D'après l'équation (1.28), la P^1 transversalité est équivalente à la condition (1.39) du lemme 1.3.11. D'où la conclusion d'après ce lemme. \square

Exemple d'élément P^1 -transverse non F -transverse – Dans l'anneau local $R = k[[t^4, t^5, t^{11}]]$, l'élément $f = t^4$ a sa classe $\bar{f} \in m/m^2$ qui est un diviseur de zéro dans $G(m, R)$ (en effet, $t^4 \cdot t^{11} = t^{15} \in m^3$). D'après la prop. 1.3.16, f n'est donc pas F -transverse, et en effet, on a $F_{m, R}^0(2) = 3$ alors que $F_{m/f, R/f}^1(2) = 4$. En revanche, f est un élément superficiel de l'idéal maximal m de R , (vérifier l'injectivité de $m_{\bar{f}}$ à partir de m^3/m^4) et R est intègre, donc il est P^1 -transverse (vérification directe aussi).

1.3.7 Éléments superficiels et P^0 -transversalité

Première preuve que les éléments superficiels sont P^0 -transverses

La première approche donnée ici est due à P. Samuel et repose sur l'expression du lemme 1.3.11 (cf. [S-Z] Ch. VIII, § 8) :

Si I est un idéal m -primaire d'un anneau local noethérien (R, m) , et $f \in I$ est un élément superficiel d'ordre s , la caractérisation (1.38) en terme de conducteurs :

$$(I^n : f) \cap I^c = I^{n-s}, \quad (1.38)$$

donnée au lemme 1.3.11, donne immédiatement dans l'équation (1.28) du § 1.3.2:

$$F_{I/f, R/f}(n) = \Delta^s F_{I, R}(n) - l_R((I^n : f)/I^{n-s}), \quad (1.28)$$

le résultat suivant :

Proposition 1.3.21. *Si $f \in I$ est un élément superficiel d'ordre s , il existe un entier c , (le même qu'au lemme 1.3.11), tel qu'on a l'encadrement pour tout $n \geq n_0$,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^s F_{I, R}^1(n) \leq F_{I/f, R/f}^1(n) \leq \Delta^s F_{I, R}^1(n) + F_{I, R}^1(c), \quad (1.41)$$

Preuve: La preuve est donnée dans [S-Z] Ch. VIII, § 8, lem. 4 :

$$(I^n : f)/I^{n-s} = (I^n : f)/((I^n : f) \cap I^c) = ((I^n : f) + I^c)/I^c,$$

la dernière égalité étant donnée par le théorème d'isomorphisme usuel, (cf. [S-Z] Chap. III, § 4 Thm. 5).

Donc en termes de longueurs,

$$l((I^n : f)/I^{n-s}) = l((I^n : f) + I^c)/I^c \leq l(R/I^c) = F_I^1(c).$$

□

On en déduit immédiatement :

Corollaire 1.3.22. *Si $f \in I$ est un élément superficiel d'ordre s , il existe une constante $C_f \in \mathbb{N}$ telle que*

$$P_{I/f, R/f}^1 = \Delta^s P_{I, R}^1 + C_f, \quad (1.42)$$

ce qui donne que f est P^0 -transverse i.e. l'égalité de polynômes :

$$P_{I/f, R/f}^0 = \Delta^s P_{I, R}^0. \quad (1.43)$$

Exemple 1.3.23 (d'élément superficiel diviseur de zéro).

Dans $R = k[[x, y]]/(x^2, xy)$, pour $I = m$, l'anneau gradué associé est $G(m, R) = k[x, y]/(x^2, xy)$. L'élément y est superficiel : la multiplication par la classe de y est injective de $m^i/m^{i+1} \rightarrow m^{i+1}/m^{i+2}$ dès que $i \geq 2$ (car dans ce cas $m^i/m^{i+1} \simeq k\bar{y}^k$), et y est diviseur de zéro dans R .

Remarque 1.3.24. L'exemple précédent, qui est celui d'un cône est très particulier : R est l'anneau local au sommet du cône $\text{Spec } G(m, R)$, et donc l'idéal maximal m est un idéal associé à R . On pourrait se dire qu'en choisissant un exemple plus fin, il existe des éléments superficiels pour I , diviseurs de zéros dans R , sans que m soit associé à R (i.e. que tous les éléments de m soient des diviseurs de zéro). On va voir ci-dessus (cor. 1.3.27) que cela ne peut pas se produire dans le cas des idéaux m -primaires.

Deux conséquences du résultat de D. Kirby

Une première conséquence du théorème de D. Kirby (thm. 1.3.14) est une démonstration directe de la P^0 -transversalité des éléments superficiels :

Corollaire 1.3.25 (du thm. 1.3.14). *Si f est un élément superficiel de l'idéal I , alors dans la suite exacte (1.29), le noyau est nul pour tous les entiers $n \geq n_0$ et le conoyau $[G(I, R)/\bar{f}.G(I, R)]_n$ est isomorphe à $[G(I/f, R/f)]_n$ pour $n \geq n_0$. En « passant aux longueurs » dans (1.29), on obtient que f est P^0 -transverse.*

Remarque 1.3.26. J'ignore si, réciproquement, tous les éléments P^0 -transverses sont superficiels.

Grâce à la théorie de la décomposition primaire ([Ei] §3.6), le résultat du thm. 1.3.14 permet aussi une meilleure compréhension de la notion d'élément superficiels diviseurs de zéro (cf. l'exemple 1.3.23 et la rem. seq.).

En effet, dans [Ei] §3.6, l'idéal $(0 : I^\infty)$ est aussi noté $H_I^0(R)$ et on montre qu'il vérifie la propriété suivante : si

$$(0) = \bigcap_{i \in \mathcal{P}} Q_i, \quad (1.44)$$

est la décomposition primaire de (0) dans R , et si on note P_i les idéaux premiers associés aux Q_i , alors ([Ei] prop. 3.13 a) :

$$H_I^0(R) = \bigcap_{P_i \not\supset I} Q_i. \quad (1.45)$$

Corollaire 1.3.27. *Dans le cas particulier où I est un idéal m -primaire, m est le seul idéal premier contenant I , et l'équation (1.45) donne les deux cas suivants:*

- i) *Ou bien m est un idéal premier associé à R ,*
 - ii) *Ou bien m n'est pas associé à R , et dans ce cas $H_I^0(R) = (0)$ d'après (1.44) et (1.45).*
- Alors, dans le cas i) tous les éléments $f \in m$ sont diviseurs de zéros, et dans le cas ii), la condition du thm. 1.3.14 donne que tous les éléments superficiels sont non diviseurs de zéro.*

1.4 Géométrie des éléments superficiels

Thus even a hazy understanding of the Grothendieck ideology can be an incisive weapon, which I fear may not pass on to the next generation.

M. Reid, in *Hyperplane sections and Related Topics*, L'Aquila, 1988.

La définition des éléments superficiels donnée à la déf. 1.2.7 via la multiplication par la classe \bar{f} de f dans l'anneau gradué $G(I,R)$ admet une traduction géométrique agréable (suppression de la condition « à partir d'un certain rang ») que l'on donne à la prop. 1.4.1.

Via la notion de points associés, on peut reformuler cette condition géométrique en une condition d'évitement d'un certain nombre de mauvais points du schéma \mathcal{E}_I (points génériques de composantes irréductibles et immergées), donnée à la prop. 1.4.5.

L'objet géométrique clef pour cette étude est la notion de *transformée faible* introduite au § 1.1.2. On a vu (loc. cit.) que cette transformée faible s'interprétait comme une section de l'éclatement S_I par une hypersurface. Dans le cas particulier où l'idéal I est m -primaire, on peut se ramener à une étude géométrique au-dessus de l'idéal maximal i.e. dans l'espace projectif \mathbb{P}_k^r sur un corps (cf. cor. 1.4.6), ce qui est plus pratique.

Le § 1.4.1 s'achève par l'application de cette interprétation géométrique à des cas explicites d'études d'éléments superficiels.

Au § 1.4.2, on traduit géométriquement les conditions données par le théorème de Kirby donné au théorème 1.3.14. On montre alors comment on peut obtenir ce théorème d'une manière géométrique grâce à la description de la décomposition primaire de l'éclatement d'un idéal, et à une propriété géométrique importante des sous-schémas de Cartier d'un schéma relativement aux composantes associés de ce schéma (prop. 1.4.20).

1.4.1 Traduction géométrique de la notion d'élément superficiel

La superficialité vue en projectif

On utilise ici les notations introduites au § 1.1.1 : on rappelle que si I est un idéal d'un anneau R , on note

$$G(I,R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / I^{n+1}$$

l'anneau gradué associé à la filtration de R par les puissances de I et

$$\mathcal{E}_I = \text{Proj}(G(I,R)), \quad (1.46)$$

le schéma projectif associé.

Avec la terminologie de [EGA] II (2.7.2), rappelée au cor. A.6.4, la définition 1.2.7 des éléments superficiels se formule de la manière suivante :

Un élément $f \in I$ de degré s (i.e. appartenant à $I^s - I^{s+1}$) est superficiel si, et seulement si, la multiplication $m_f : G(I, R) \rightarrow G(I, R)(s)$ par la classe de \bar{f} de f dans I^s/I^{s+1} est (TN)-injective.

Dans ce qui précède $G(I, R)(s)$ désigne le $G(I, R)$ -module gradué (« décalé ») dont la composante de degré n , $[G(I, R)(s)]_n$, est par définition la composante de degré $n + s$, $[G(I, R)]_{n+s}$, de $G(I, R)$ et ceci pour $n \in \mathbb{Z}$ (notation déjà introduite au (A.6) p. 119).

En considérant $G(I, R)(s)$ comme un $\widetilde{G(I, R)}$ -module gradué, on définit (cf. p. 118) le faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}$ -modules $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(s) = \widetilde{G(I, R)(s)}$, inversible sous l'hypothèse que R est noethérien (cf. p. 119).

Avec ces notations, et en appliquant le foncteur \sim (cf. [EGA] II (2.7.3) et le rappel p. 118), on obtient la définition équivalente :

Proposition 1.4.1. *Soit I un idéal d'un anneau noethérien R (non nécessairement local), et soit $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I , alors f est un élément superficiel de I si, et seulement si, le morphisme $\widetilde{m}_f : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(s)$ est injectif, où $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}$ est le faisceau structural du schéma $\mathcal{E}_I = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1} \right)$.*

Preuve: Conséquence directe du corollaire A.6.4. □

Traduction en terme de transformée faible

Les notations sont celles de la proposition 1.4.1 ci-dessus.

On choisit des éléments $h_0, \dots, h_r \in I$ dont les classes $\bar{h}_i \in I/I^2$ engendrent I/I^2 comme R/I -module. D'après le lemme A.1.3 (cf. aussi ce lemme pour la notion D_+), les ouverts $V_i := D_+(\bar{h}_i)$ de \mathcal{E}_I forment donc un recouvrement de \mathcal{E}_I .

Si on note U_i les ouverts $U_i := D_+(h_i t) \simeq \text{Spec } R[I/h_i]$ de S_I , on a l'égalité : $V_i = U_i \cap \mathcal{E}_I$.

Dans la carte $V_i = D_+(\bar{h}_i)$, on a une section naturelle de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(s)$ qui est \bar{h}_i^s , et un élément quelconque de $\Gamma(V_i, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(s))$ s'écrit $g \cdot \bar{h}_i^s$, où $g \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(V_i)$.

Dans cette carte V_i , en notant \bar{f} la classe de f dans I^s/I^{s+1} le morphisme $\widetilde{m}_f : \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}) \rightarrow \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(s))$, est défini par :

$$g \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(V_i) \mapsto g \cdot \bar{f} = g \cdot \left(\frac{\bar{f}}{\bar{h}_i^s} \right) \cdot \bar{h}_i^s,$$

où $\frac{\bar{f}}{\bar{h}_i^s} \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(V_i)$.

Lemme 1.4.2. *L'écriture explicite de \widetilde{m}_f montre que la prop. 1.4.1 est équivalente à la propriété suivante : l'élément \bar{f}/\bar{h}_i^s n'est pas un diviseur de zéro dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(V_i)$, pour $i = 0, \dots, r$.*

La définition suivante est rendue possible par le bon comportement des idéaux associés par localisation (cf. [Ei] 3.1 c)) :

Définition 1.4.3 (Points associés).

- i) Un point x d'un schéma X est un *point associé* de X , si l'idéal maximal m_x est un idéal premier associé à (0) dans $\mathcal{O}_{X,x}$.
- ii) On montre que l'ensemble des points associés à un schéma X est l'ensemble des *points génériques* des sous-schéma réduits sous-jacent à une décomposition primaire (cf. [EGA] IV (3.2.5)) de X en composantes irréductibles et immergées. On appellera ces composantes *composantes associées* à X . On notera $\text{Ass}(X)$ l'ensemble (fini si X

est noethérien) des points associés, c'est-à-dire des points génériques des composantes associées à X .

On rappelle aussi un résultat de base sur les idéaux premiers associés (cf. [Ei] 3.1.b) et son avatar géométrique :

Lemme 1.4.4. *a) Soit R un anneau noethérien. Un élément $f \in R$ est diviseur de zéro si, et seulement si, f est inclus dans un idéal premier associé à R .*

b) De même soit X un schéma noethérien. Un sous-schéma localement principal D de X (cf. déf. 1.1.3) est de Cartier si, et seulement si, le support de D ne contient aucun point associé à X (cf. déf. 1.4.3).

Compte-tenu de ce lemme, la condition du lemme 1.4.2 est équivalente au fait que \bar{f}/\bar{h}_i^s n'appartienne à aucun idéal premier associé de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_I}(V_i)$.

En terme de schémas, on a vu (cf. preuve de la prop. 1.1.8) que f/h_i^s est l'équation de $(f)^* - s\mathcal{E}_I = (f)^\#$ (la transformée faible de f) dans U_i , et \bar{f}/\bar{h}_i définit le pull-back de sur la carte V_i de \mathcal{E}_I .

Aussi la condition du lemme 1.4.2 équivaut à ce que le support du pull-back de $(f)^\#$ sur \mathcal{E}_I ne contienne aucun point associé à \mathcal{E}_I . Comme il s'agit que d'une condition sur le support de ce pull-back (qui est l'intersection ensembliste $|\mathcal{E}_I| \cap |(f)^\#|$) cela revient au même de dire que le support de $(f)^\#$ ne contient aucun point associé à \mathcal{E}_I , ce que l'on résume dans la caractérisation suivante :

Proposition 1.4.5. *Soit I un idéal d'un anneau noethérien R . On note S_I l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$, et \mathcal{E}_I le diviseur exceptionnel de cet éclatement (cf. (1.46)).*

Soit $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . On note $(f)^\# = (f)^ - s\mathcal{E}_I$ sa transformée faible sur S_I , (où $(f)^*$ désigne la transformée totale de f , cf. déf. 1.1.6),*

Alors f est superficiel dans I , si et seulement si, le support de sa transformée faible ne rencontre aucun point associé à \mathcal{E}_I (cf. déf. 1.4.3), ce que l'on note sous la forme :

$$\text{Supp}((f)^\#) \cap \text{Ass}(\mathcal{E}_I) = \emptyset. \quad (1.47)$$

Cas particulier où I est m -primaire

Au § 1.1.2, on a vu que la transformée faible $(f)^\#$ s'interprétait comme une section de S_I par une hypersurface sH_f .

Dans le cas particulier, où I est un idéal m -primaire, on a vu au § 1.1.4, que si on considérait la fibre \mathcal{E}_I^0 de l'idéal maximal dans S_I , on obtenait le même sous-espace réduit sous-jacent

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_I = \mathcal{E}_I^0, \quad \text{cf. (1.8).}$$

Alors la condition (1.47) de la prop. précédente, caractérisant les éléments superficiels, peut être interprétée de la manière suivante :

Corollaire 1.4.6. *Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local noethérien (R, m) . Soit $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . On suppose qu'on a choisi des générateurs (h_0, \dots, h_r) de I , définissant un plongement $i : S_I \rightarrow \mathbb{P}_R^r$ (cf. § 1.1.2) de l'éclatement S_I .*

On rappelle alors qu'à une écriture (non unique) de f comme un polynôme homogène de degré s à coefficient dans R en les h_i , que l'on note $f = P_s(h_0, \dots, h_r)$, on peut (cf. § 1.1.4) associer un polynôme homogène de degré s à coefficient dans R/m en prenant les classes modulo m des coefficients de P_s . On note P_s^0 ce polynôme, et on a $\bar{f} = P_s^0(\bar{h}_0, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_r)$ dans $G(I, R)$.

On note enfin ${}^sH_f^0$ l'hypersurface définie par P_s^0 dans l'espace projectif \mathbb{P}_k^r (où $k = R/m$ le corps résiduel de R).

Soit $\text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ l'ensemble des points associés au schéma \mathcal{E}_I . Comme \mathcal{E}_I^0 et \mathcal{E}_I définissent la même espace réduit, les points de $\text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ sont des points de \mathcal{E}_I^0 .

Alors la condition (1.47) de la prop. 1.4.5 est équivalente à la condition suivante dans \mathbb{P}_k^r :

$${}^s H_f^0 \cap \text{Ass}(\mathcal{E}_I) = \emptyset. \quad (1.48)$$

Le cas particulier le plus important de (1.48) est le cas $s = 1$: $f \in I - I^2$ est superficiel si, et seulement si, l'hyperplan H_f^0 ne contient aucun point de $\text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ c'est-à-dire (cf. définition 1.4.3 ii)) le support (dans \mathcal{E}) d'aucune composante irréductible ou immergée de \mathcal{E}_I .

Application à des exemples particuliers

Exemple 1.4.7. Dans l'anneau local $R = k[[t^2, t^3]]$ l'élément t^3 n'est pas superficiel dans l'idéal maximal m . On peut le vérifier algébriquement (laissé au lecteur). En écrivant $R = k[[X, Y]]/(X^3 - Y^2)$, et $m = (X, Y)$, on a un plongement du diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_m \subset \mathbb{P}_k^1$ comme $Y^2 = 0$. Alors il est clair que l'élément $f = Y$ de m n'est pas superficiel puisqu'il définit l'hyperplan $Y = 0$ de \mathbb{P}_k^1 , qui coïncide avec $|\mathcal{E}_m|$.

On trouve dans [S-Z] p. 287, l'exemple suivant, où l'on note \mathbb{F}_2 le corps à deux éléments :

Exemple 1.4.8. Considérons l'anneau local

$$R = \mathbb{F}_2[[X, Y]]/(XY(X + Y))$$

et m son idéal maximal. Il n'existe pas d'éléments superficiels (d'ordre 1) pour m .

On va montrer cette remarque via la caractérisation (1.48) des éléments superficiels (pour l'ordre 1).

Preuve: Comme $\text{Spec } R$ est défini par un idéal homogène de $\mathbb{F}_2[[X, Y]]$, l'anneau gradué $G(m, R)$ définissant son cône tangent s'obtient directement comme :

$$G(m, R) = \mathbb{F}_2[X, Y]/(XY(X + Y)).$$

Alors dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1$, le diviseur $\mathcal{E}_m^0 = \text{Proj } G(m, R)$ a exactement trois composantes irréductibles : les hyperplans définis par X, Y et $X + Y$. Or pour $f \in m$ les hyperplans $H_f^0 : aX + bY$ avec $a, b \in \mathbb{F}_2$ sont exactement $X, Y, X + Y$. On conclut donc que pour tout $f \in m$, H_f^0 contient une composante irréductible de \mathcal{E}_m^0 , et donc f n'est pas superficiel pour m . \square

Cas où le corps résiduel est infini

Le lemme suivant, conséquence directe de la caractérisation géométrique du corollaire (1.4.6), montre que le phénomène de l'exemple 1.4.8 ci-dessus est particulier aux corps finis :

Lemme 1.4.9. Soit (R, m) un anneau local noethérien, et I un idéal m -primaire de R . Si le corps résiduel $k = R/m$ est infini, alors pour tout entier s on peut, suivant les notations du corollaire 1.4.6, trouver une hypersurface ${}^s H_f^0$ de degré s dans \mathbb{P}_k^r évitant tous les points associés à \mathcal{E}_I sur $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}_k^r$, c'est-à-dire que pour tout entier s , il existe des éléments superficiels d'ordre s dans I (et la condition d'être superficiel est même une condition générique dans l'espace vectoriel I^s/mI^s).

1.4.2 Approche géométrique de la caractérisation de Kirby

La condition transformée faible égale transformée stricte

Soit R un anneau noethérien, I un idéal de R , et $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . On note S_I l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$, et \mathcal{E}_I le diviseur exceptionnel (cf. (1.46)).

Au § 1.1.5, on a défini la *transformée stricte* de f sur S_I comme l'*adhérence schématique*:

$$(f)' := \overline{(f)^* \setminus \mathcal{E}_I}^{sch}, \quad (1.49)$$

c'est-à-dire le plus petit sous-schéma fermé de S_I contenant $(f)^* \setminus \mathcal{E}_I$ (cf. notation 1.1.5 ii)).

Si on note $(f)^\#$ la transformée faible de f sur S_I définie par $(f)^* - s \mathcal{E}_I$ (cf. notation 1.1.5 i)), on a trivialement :

$$(f)^* \setminus \mathcal{E}_I = (f)^\# \setminus \mathcal{E}_I, \quad (1.50)$$

de sorte que (1.49) s'écrit encore :

$$(f)' = \overline{(f)^\# \setminus \mathcal{E}_I}^{sch}. \quad (1.51)$$

Ainsi, on a toujours l'inclusion des schémas $(f)' \subset (f)^\#$, et la condition d'égalité est donnée par le lemme élémentaire suivant :

Lemme 1.4.10. *Avec les mêmes notations qu'à la prop. 1.4.5, sur l'éclatement S_I de I dans $\text{Spec } R$, la transformée faible $(f)^\#$ d'un élément $f \in I$ est égale à sa transformée stricte si, et seulement si, le support de \mathcal{E}_I ne contient aucun point associé au schéma $(f)^\#$, ce que l'on note sous la forme :*

$$\text{Supp}(\mathcal{E}_I) \cap \text{Ass}((f)^\#) = \emptyset. \quad (1.52)$$

Preuve: Il suffit de remarquer que d'après la théorie de la décomposition primaire, l'inclusion de schémas fermés $(f)' \subset (f)^\#$ est stricte si, et seulement si, on a une décomposition non triviale en sous-schémas fermés :

$$(f)^\# = (f)' \cup X_I,$$

où X_I contient nécessairement un point associé à $(f)^\#$ (car la décomposition est non triviale), qui doit être dans le support de \mathcal{E}_I puisque $(f)'$ et $(f)^\#$ coïncident en dehors de \mathcal{E}_I . \square

Vers la comparaison des conditions (1.47) et (1.52)

On renvoie à [RES] § 4.2.2 pour la définition de *suite régulière* d'un anneau. On rappelle alors que la *profondeur* d'un anneau local (R, m) , notée $\text{prof } R$, est la longueur maximale d'une suite régulière d'éléments de l'idéal maximal m (cf. [Ei] Chap. 17,18).

Compte-tenu du lemme 1.4.4, la définition 1.4.3 i) des points associés à un schéma s'écrit encore :

Corollaire 1.4.11. *Un point $x \in X$ est un point associé à X si, et seulement si, tous les éléments non-inversibles de $\mathcal{O}_{X,x}$ sont diviseurs de zéro, c'est-à-dire si, et seulement si, $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} = 0$.*

Cette formulation a la conséquence suivante pour les sous-schémas de Cartier :

Corollaire 1.4.12. *Si \mathcal{D} est un sous-schéma de Cartier (cf. déf. 1.1.3) d'un schéma X , un point $x \in \mathcal{D}$ est associé à \mathcal{D} si, et seulement si, $\mathcal{O}_{X,x}$ est de profondeur 1.*

Exemple 1.4.13. Le diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I est un *sous-schéma de Cartier* de l'éclatement S_I de I dans $\text{Spec } R$.

Ainsi les points $x \in \text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ coïncident avec les points $x \in \mathcal{E}_I$ tels que $\mathcal{O}_{S_I, x}$ est de profondeur 1.

Cas où $(f)^*$ est un sous-schéma de Cartier de S_I

Comme précédemment I est un idéal d'un anneau noethérien R , et S_I est l'espace total de l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$. Soit $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I et $(f)^*$ sa transformée totale sur S_I .

Si on suppose que $(f)^*$ est un sous-schéma de Cartier de S_I , alors c'est aussi le cas de sa transformée faible $(f)^\# = (f)^* - s\mathcal{E}_I$, et on peut appliquer le corollaire 1.4.12 à $(f)^\#$, ce qui donne:

Exemple 1.4.14. Si $(f)^*$ est un sous-schéma de Cartier de S_I , les points associés à sa transformée faible $(f)^\#$ sont exactement les points x sur le support $\text{Supp}((f)^\#)$ tels que $\text{prof}(\mathcal{O}_{S_I, x}) = 1$.

Alors dans ce cas l'équivalence des conditions (1.47) et (1.52) est donnée par la proposition suivante:

Proposition 1.4.15. Soit I un idéal d'un anneau local noethérien (R, m) , et soit $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I .

Si on suppose que la transformée totale $(f)^*$ de f sur S_I est un sous-schéma de Cartier, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- a) f est un élément superficiel de I ,
- b) sur l'éclatement S_I de I , les transformées faibles et strictes de f coïncident.

Preuve: D'après la prop. 1.4.5, f est superficiel dans I , si et seulement si,

$$(f)^\# \cap \text{Ass}(\mathcal{E}_I) = \emptyset,$$

ce qui d'après l'exemple 1.4.13 se traduit par:

$$\forall x \in \text{Supp}((f)^\#) \cap \text{Supp}(\mathcal{E}_I), \text{prof}(\mathcal{O}_{S_I, x}) > 1. \quad (1.53)$$

Mais grâce à l'hypothèse $(f)^*$ (et donc aussi $(f)^\#$) de Cartier, la condition précédente donne d'après l'exemple 1.4.14:

$$\text{Supp}(\mathcal{E}_I) \cap \text{Ass}((f)^\#) = \emptyset,$$

ce qui, d'après le lemme 1.4.10 est exactement la condition « transformée faible égale transformée stricte » . \square

Remarque 1.4.16. Si $f \in R$ est un élément non diviseur de zéro, $(f)^*$ est bien sûr Cartier sur S_I (pull-back) et on est donc dans l'hypothèse de la proposition précédente.

Décomposition primaire de S_I et interprétation de la condition « $(f)^*$ est de Cartier »

a) *Décomposition de $\text{Spec } R$ et S_I en composantes primaires* – Avec les notations du § 1.1.7, on choisit une décomposition primaire de (0) dans l'anneau R :

$$(0) = \bigcap_{i=1}^l Q_i, \quad (1.54)$$

où les idéaux Q_i sont P_i -primaires, et on sait alors (cf. déf. 1.1.23) que l'éclatement S_I de I dans $S = \text{Spec } R$ s'écrit sous la forme d'une *union schématique* (au sens rappelé ci-dessous) :

$$S_I = (S_1)_I \cup \cdots \cup (S_l)_I, \quad (1.55)$$

où, pour $i = 1, \dots, l$, $(S_i)_I$ désigne l'espace total de l'éclatement de l'idéal $(I + Q_i)/Q_i$ dans la composante primaire $S_i = \text{Spec } R/Q_i$ de R .

On rappelle que le sens à donner à cet union schématique est que, dans l'anneau $B(I, R)$ définissant S_I , l'intersection des idéaux homogènes $B(Q_i)$ définissant les $(S_i)_I$ est l'idéal (0) (cf. l'équation (1.14) du § 1.1.7).

Mieux, on déduit facilement de [HIO] (4.5) le résultat plus précis suivant :

Lemme 1.4.17. *En enlevant dans l'égalité (1.55) les sous-schémas $(S_i)_I$ qui sont vides, on obtient une décomposition primaire de S_I .*

Preuve: On a dit ci-dessus que (1.55) signifiait exactement qu'on a dans l'anneau $B(I, R)$ définissant S_I l'égalité :

$$(0) = \cap_i B(Q_i).$$

Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que chaque idéal $B(Q_i)$ est $B(P_i)$ primaire et que la décomposition est irredondante (cf. [Ei] thm. 3.10).

Ceci se déduit directement des propriétés de [HIO] (4.5), le caractère irredondant étant donné par l'unicité de la transformée stricte $B(J)$ dans l'anneau $B(I, R)$ d'un idéal J de R : si (0) s'écrivait comme une intersection plus petite $\cap_{i \in A} B(Q_i) = B(\cap_{i \in A} Q_i)$ (où A est un sous-ensemble strict de $\{1, \dots, l\}$) alors dans R aussi on aurait l'égalité : $\cap_{i \in A} Q_i = (0)$ ce qui est exclu. \square

b) *Interprétation de la condition : « $(f)^*$ de Cartier ».*

D'après le lemme 1.4.4 b), $(f)^*$ est de Cartier sur S_I si, et seulement si, son support ne contient aucune composante associée de S_I .

Mais d'après le lemme 1.4.17 ci-dessus, les composantes associées de S_I sont exactement les éclatements $(S_i)_I$ des composantes primaires S_i de S selon les idéaux $(I + Q_i)/Q_i$.

En tenant compte des composantes S_i de $\text{Spec } R$ donnant des « composantes » $(S_i)_I$ vides, on peut retraduire « en bas » c'est-à-dire dans $\text{Spec } R$, la condition « $(f)^*$ est de Cartier sur S_I » :

Proposition 1.4.18. *Soit I un idéal d'un anneau noethérien R , $S = \text{Spec } R$ et S_I l'éclatement de S selon I . Soit f un élément de I . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *la transformée totale $(f)^*$ de (f) sur S_I est un sous-schéma de Cartier,*

b) *pour tout idéal premier P_i associé à R , si $I \not\subset P_i$ alors $f \notin P_i$. Ou géométriquement, pour point x associé à $\text{Spec } R$ qui n'est pas sur $V(I)$, x n'est pas non plus sur $V(f)$.*

Preuve: En notant $e_I : S_I \rightarrow S = \text{Spec } R$ l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$, par définition la transformée totale $(f)^*$ de (f) est la préimage schématique $(e_I)^{-1}(V(f))$ du schéma $V(f)$ que l'on notera simplement (f) ici, et de même les composantes $(S_i)_I$ sont les préimages schématiques : $(S_i)_I = (e_I)^{-1}(S_i)$ des composantes S_i de $\text{Spec } R$.

En outre la restriction $(e_I)_{(S_i)_I} : (S_i)_I \rightarrow S_i$ est surjective dès que l'espace total $(S_i)_I$ est non vide (cf. § 1.1.6, remarque après la formule (1.11)).

Or la condition a) du lemme équivaut, d'après la discussion précédant le lemme, à la condition :

$$\forall i = 1, \dots, l, \quad \text{Supp}(f)^* \not\supset (S_i)_I,$$

ce qui se reformule par ce qui précède en

$$\forall i = 1, \dots, l, \quad \text{Supp } e_I^{-1}(f) \not\supset (e_I)^{-1}(S_i),$$

condition vide pour les indices i tels que $(S_i)_I = \emptyset$ et équivalente par surjectivité pour les autres indices à la condition :

$$\text{pour tout } i \text{ tel que } (S_i)_I \neq \emptyset, \quad \text{Supp}(f) \not\supset S_i.$$

Il suffit alors, pour obtenir l'équivalence avec la condition b) du lemme, de rappeler que suivant la remarque 1.1.2, l'éclatement $(S_i)_I$ de l'idéal $(I+Q_i)/Q_i$ dans $S_i = \text{Spec } R/Q_i$ est vide si, et seulement si, cet idéal est nilpotent dans l'anneau R/Q_i . Comme $\text{Ass}(R/Q_i) = \{P_i\}$, cela équivaut encore à $I \subset P_i$. \square

Si $f \in I$ est superficiel, sa transformée $(f)^*$ est toujours de Cartier sur S_I

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition suivante, qui nécessitera un résultat annexe sur le comportement des diviseurs de Cartier par rapport à la décomposition primaire (prop. 1.4.20) intéressant en soi.

Proposition 1.4.19. *Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R , et S_I l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$. On note encore $(f)^*$ la transformée totale de f sur S_I . Si $f \in I$ est superficiel alors $(f)^*$ est toujours un sous-schéma de Cartier de S_I .*

Preuve: Si $f \in I^s - I^{s+1}$ est un élément d'ordre s de I , la relation :

$$(f)^\# := (f)^* - s\mathcal{E}_I,$$

définissant la transformée faible $(f)^\#$ de (f) donne immédiatement que la condition $(f)^*$ de Cartier est équivalente à $(f)^\#$ de Cartier.

Supposons alors que $(f)^*$ (et donc $(f)^\#$) n'est pas de Cartier. D'après le lemme 1.4.4 b), le support de $(f)^\#$ contient une composante associée non vide $(S_i)_I$ de S_I .

Pour montrer que f n'est pas superficiel, il suffit alors d'après (1.47) de montrer que la composante $(S_i)_I$ contient un point associé au diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I . Or la proposition suivante donne que :

$$\text{Ass}(\mathcal{E}_I \cap (S_i)_I) \subset \text{Ass}(\mathcal{E}_I) \cap (S_i)_I, \quad (1.56)$$

où l'intersection $\mathcal{E}_I \cap (S_i)_I$ est non vide (intersection schématique, i.e. aussi pull-back du Cartier \mathcal{E}_I cf. déf.A.5.2) car c'est le diviseur exceptionnel de l'éclatement

$$e_{(I+Q_I)/Q_i} : (S_i)_I \rightarrow S_i.$$

Ainsi $\text{Ass}(\mathcal{E}_I) \cap (S_i)_I \neq \emptyset$ et a fortiori, $\text{Ass}(\mathcal{E}_I) \cap (f)^\# \neq \emptyset$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Dans la preuve précédente, on a utilisé (pour la formule (1.56)) le résultat suivant, qui donne une propriété importante pour l'intersection des sous-schémas de Cartier avec les composantes associées à un schéma :

Proposition 1.4.20. *Soient X est un schéma noethérien et $Z \subset X$ un sous-schéma contenant une composante associée à X . Soit D un sous-schéma de Cartier de X d'intersection non vide avec Z . Alors tout point associé à l'intersection schématique $D \cap Z$ est aussi un point associé à D , ce que l'on note par l'inclusion :*

$$\text{Ass}(D \cap Z) \subset \text{Ass}(D) \quad (1.57)$$

Preuve: On se place dans une carte affine $U = \text{Spec } A$ de X qui rencontre Z et D et désormais ce qu'on désigne par D ou Z est en fait leur trace sur U .

Dans cette carte D s'écrit $\text{Spec } A/(u)$ avec $u \in A$ non diviseur de zéro, et Z s'écrit $\text{Spec } A/q$. L'hypothèse sur Z est que l'idéal q est inclus dans un idéal premier p associé à A , c'est-à-dire de la forme $p = \text{Ann}(f)$ avec $f \in A$.

En notant $B := A/(u)$ et $\pi : A \rightarrow B = A/(u)$ la surjection canonique, $D \cap Z$ est défini par $\text{Spec } A/((u) + q) = \text{Spec } B/\pi(q)$ où $\pi(q)$ est l'image de l'idéal q par π .

En notant $\bar{f} = \pi(f)$, l'hypothèse $q \subset \text{Ann}(f)$ entraîne immédiatement l'inclusion $\pi(q) \subset \text{Ann}(\bar{f})$. Or $\bar{f} \in A/(u)$ n'est pas nul, car sinon f serait un multiple de u et cela contredirait l'hypothèse u non diviseur de zéro. On en déduit que $\pi(q)$ est inclus dans un idéal premier associé B (un annulateur maximal) ce que l'on notera :

$$\pi(q) \subset \bar{p}, \quad \text{avec } \bar{p} \in \text{Ass}(B). \quad (1.58)$$

Grâce au lemme (1.4.21) ci-dessous, l'inclusion (1.58) entraîne qu'en tout point x de $D \cap Z$, en notant $\mathcal{O}_{D,x}$ le localisé de B en ce point et $\mathcal{O}_{D \cap Z, x} = \mathcal{O}_{D,x}/\pi(q)$ on a l'inégalité suivante sur les profondeurs d'anneaux locaux :

$$\text{prof } \mathcal{O}_{D \cap Z, x} \geq \text{prof } \mathcal{O}_{D,x}. \quad (1.59)$$

En particulier si $x \in \text{Ass}(D \cap Z)$ c'est-à-dire si $\text{prof}(\mathcal{O}_{D \cap Z, x}) = 0$ (cf. cor. 1.4.12) l'inégalité précédente donne aussi $\text{prof}(\mathcal{O}_{D,x}) = 0$ et donc $x \in \text{Ass}(D)$. \square

Dans la preuve précédente on a utilisé le lemme d'algèbre commutative suivant :

Lemme 1.4.21. *Si B est un anneau local noethérien, et $q \subset B$ est un idéal inclus dans l'annulateur $\text{Ann}(g)$ d'un élément $g \in B$ alors on a l'inégalité de profondeurs :*

$$\text{prof } B/q \geq \text{prof } B.$$

Preuve: Soit $r = \text{prof } B$ et (f_1, \dots, f_r) une suite régulière de B . On note $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ les éléments correspondants dans B/q . Il est clair que :

$$(B/q)/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_i) = (B/(f_1, \dots, f_i))/\tilde{q}_i,$$

où \tilde{q}_i désigne l'image de q dans l'anneau quotient $B_i := B/(f_1, \dots, f_i)$.

Soit \tilde{g}_i l'image de g dans B_i , il est clair que $\tilde{q}_i \subset \text{Ann}(\tilde{g}_i)$. En outre $\tilde{g}_i \neq 0$ car sinon $g \in (f_1, \dots, f_i)$ et donc g étant diviseur de zéro dans B , f_i serait diviseur de zéro modulo (f_1, \dots, f_{i-1}) ce qui contredit l'hypothèse (f_1, \dots, f_r) suite régulière.

Supposons maintenant que la classe de \bar{f}_{i+1} soit diviseur de zéro dans $(B/q)/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_i)$. Alors dans $B/(f_1, \dots, f_i)$ la classe de f_{i+1} a un multiple dans \tilde{q}_i et donc annule \tilde{g}_i , avec $\tilde{g}_i \neq 0$, ce qui contredit l'hypothèse (f_1, \dots, f_r) régulière. On vient donc de montrer que $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)$ est une suite régulière de B/q ce qui montre le lemme. \square

Résultat final

Compte-tenu de la proposition 1.4.19 démontrée au paragraphe précédent, on voit que dans la proposition 1.4.15, l'hypothèse $(f)^*$ de Cartier trouve son sens plein dans la caractérisation suivante des éléments superficiels. Cette caractérisation est l'avatar géométrique annoncé au théorème de Kirby (théorème 1.3.14) :

Théorème 1.4.22. *Soit R un anneau noethérien et I un idéal de R . On note S_I l'éclatement de $S = \text{Spec } R$ selon I . Soit f un élément de I . Alors f est un élément superficiel de I si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

i) *les transformées faibles et strictes de f coïncident, c'est-à-dire (cf. lem. 1.4.10) :*

$$\text{Ass}((f)^\#) \cap \mathcal{E}_I = \emptyset,$$

ii) *$(f)^*$ est un diviseur de Cartier sur S_I .*

Compte-tenu de la prop. 1.4.18, la condition ii) est encore équivalente à la condition (dans R):

- ii') pour tout idéal premier $P \in \text{Ass}(R)$ tel que $I \not\subset P$, on a $f \notin P$. Ou géométriquement, pour point x associé à $\text{Spec } R$ qui n'est pas sur $V(I)$, x n'est pas non plus sur $V(f)$.

Chapitre 2

Éléments v -superficiels, géométrie de la multiplicité, et clôture intégrale

Introduction

Dans ce chapitre, on introduit la notion d'*élément v -superficiel* d'un idéal I dans un anneau local (R, m) , qui est un affaiblissement de la notion d'*élément superficiel*. La définition donnée au § 2.1.1 est formulée dans l'éclatement de l'idéal I de $\text{Spec } R$. Dans le cas particulier des anneaux réduits, cette définition se traduit par une condition *valuative* sur l'éclatement normalisé de l'idéal I , d'où le préfixe v (ceci fait l'objet du § 2.4).

Le § 2.2 montre le lien, pour les idéaux m -primaires, entre cette notion d'élément v -superficiel et la notion de *e -transversalité*, i.e. la transmission de la multiplicité de l'idéal I de R à l'idéal $I/(f)$ de l'anneau quotient $R/(f)$. Cette étude repose sur un théorème de H. Flenner et W. Vogel (théorème 2.2.2).

Le § 2.3 s'intéresse à la clôture intégrale des idéaux (non nécessairement m -primaires) et caractérise les éléments d'un idéal que l'on peut mettre dans une suite définissant une *réduction minimale* de cet idéal comme des éléments v^0 -superficiels (variante de la v -superficialité, les notions se confondant pour les idéaux m -primaires). On donne aussi un certain nombre d'avatars géométriques de la propriété « J est une réduction de I », qui seront utiles notamment au chapitre suivant. Enfin, on illustre le comportement des idéaux non m -primaires par rapport à ces questions de v -superficialité et v^0 -superficialité, en fonction de la *largeur analytique* de ces idéaux.

En joignant les points de vue des § 2.2 et 2.3, on obtient naturellement le théorème de Rees (théorème 2.3.23) et aussi sa généralisation par E. Böger (théorème 2.3.36).¹

Au § 2.4, on complète les caractérisations géométriques de la clôture intégrale d'un idéal I données au § 2.3 par des caractérisations sur l'*éclatement normalisé* de I , bien connues depuis le séminaire de Monique Lejeune-Jalabert et Bernard Teissier ([LJ-Te]).

2.1 Définition et exemples

2.1.1 Définition avec la transformée faible

On conserve dans ce chapitre les notations du chapitre 1 : ainsi (R, m) désigne un anneau local noethérien d'idéal maximal m , I un idéal de R , $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ est l'éclatement de

1. Comme souligné dans l'introduction de la thèse (p. 14), un article récent de H. Flenner et M. Manaresi ([Fl-Ma]) donne une nouvelle généralisation du théorème de Böger, en termes de j -multiplicités.

I dans R , et en notant $G(I,R)$ l'anneau gradué $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$ le schéma :

$$\mathcal{E}_I = \text{Proj}(G(I,R)), \quad (2.1)$$

est le diviseur exceptionnel de cet éclatement.

On rappelle aussi qu'on a introduit au § 1.1.1 la notion de transformée faible $(f)^\#$ d'un élément $f \in I^s - I^{s+1}$ comme la différence (de sous-schémas localement principaux, c'est-à-dire définie localement par le quotient des équations locales, cf. notation 1.1.5 i) :

$$(f)^\# = (f)^* - s \mathcal{E}_I, \quad (2.2)$$

où $(f)^*$ désigne la transformée totale de (f) sur S_I .

A la proposition 1.4.5, on a donné la caractérisation géométrique suivante des éléments superficiels d'un idéal : *l'élément $f \in I$ est superficiel, si et seulement si, l'intersection $(f)^\# \cap \text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ est vide.*

La notation $\text{Ass}(\mathcal{E}_I)$ désigne l'ensemble des points associés au schéma \mathcal{E}_I (cf. déf. 1.4.3) qui est formé des points génériques des composantes irréductibles de \mathcal{E}_I et de ceux des (éventuelles) composantes immergées de \mathcal{E}_I .

Si l'on affaiblit la condition de la proposition 1.4.5, en « oubliant » les composantes immergées et les composantes irréductibles de dimension non-maximale, on obtient la définition suivante :

Définition 2.1.1. Soit (R,m) un anneau local noethérien de dimension d . Soit I un idéal de R et S_I l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$. On note encore \mathcal{E}_I le diviseur exceptionnel de cet éclatement (cf. (2.1)).

Un élément $f \in I$ sera dit *v -superficiel* si sa transformée faible $(f)^\#$ sur l'éclatement S_I (cf. (2.2) ci-dessus) ne contient aucune composante irréductible de dimension $d - 1$ du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I .

Remarque 2.1.2. La terminologie d'élément v -superficiel avait été choisie (dans [B-L]) à cause de la caractérisation *valuative* de ces éléments que l'on donnera à la proposition 2.4.13 infra. Je me suis ensuite aperçu que cette notion était aussi abordée (pour les idéaux m -primaires) dans le livre [FOV] sous le nom de *G -paramètre* : voir la remarque 2.1.6 infra.

Remarque 2.1.3. Si (R,m) est un anneau local *universellement caténaire*, d'après le corollaire 1.1.21, \mathcal{E}_I est de dimension $d - 1$, et si R est équidimensionnel toutes les composantes de \mathcal{E}_I sont de dimension $d - 1$.

Suivant la proposition 1.1.22, pour tout anneau local noethérien (R,m) de dimension d , on sait que si I est m -primaire, alors \mathcal{E}_I est encore de dimension $d - 1$, et donc dans ce cas aussi la condition de la définition précédente n'est pas vide.

Contrairement aux éléments superficiels, les éléments v -superficiels ne vérifient pas la propriété « transformée stricte égale transformée faible » sur l'éclatement S_I (cf. § 1.4.2), mais si l'on suppose que \mathcal{E}_I est équidimensionnel, on a la propriété correspondante pour les supports :

Proposition 2.1.4. Soit I un idéal d'un anneau local (R,m) tel que l'anneau $G(I,R)$ (ou, ce qui revient au même \mathcal{E}_I) soit équidimensionnel. Soit $f \in I$ un élément v -superficiel de I (cf. déf. 2.1.1).

i) Alors les supports de sa transformée faible $(f)^\#$ sur S_I et de sa transformée stricte $(f)'$ coïncident.

ii) Dans i), il suffit de vérifier l'égalité de ces supports sur \mathcal{E}_I , ce qui équivaut algébriquement à dire que les supports des deux anneaux gradués $G(I,R)/\bar{f}.G(I,R)$ et $G(I/f,R/f)$ coïncident.

Preuve: Comme \mathcal{E}_I est équidimensionnel, l'hypothèse que f est v -superficiel donne que $(f)^\#$ ne contient aucune composante irréductible de \mathcal{E}_I , de sorte que le support de $(f)^\#$ est l'adhérence pour la topologie de Zariski de celui de $(f)^\# \setminus \mathcal{E}_I$ (où la notation \setminus désigne la différence de schémas cf. notation 1.1.5 ii)), ce qui coïncide avec le support de la transformée stricte (cf. § 1.1.5).

Le ii) n'est qu'une reformulation en terme d'équations : cf. le § 1.1.5 pour l'équation de la transformée stricte et le § 1.1.3 pour celle de la transformée faible et de leurs pull-backs sur \mathcal{E}_I (voir aussi le § 2.1.2 ci-dessous). \square

2.1.2 Caractérisation dans $G(I,R)$

Si l'on considère l'inclusion $j : \mathcal{E}_I \rightarrow S_I$, la condition de la déf. 2.1.1 équivaut à ce que le pull-back $j^*((f)^\#)$ de la transformée faible sur \mathcal{E}_I ait un support de dimension strictement inférieure à $d - 1$.

Ce pull-back a été défini au § 1.1.3, où on a vu aussi (cf. l'équation (1.6)) que ce pull-back était défini par l'idéal homogène $\bar{f}G(I,R)$ de $G(I,R)$, où $\bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ désigne la forme initiale de f dans $G(I,R)$. On a ainsi obtenu la caractérisation algébrique suivante qui sera utile par la suite :

Proposition 2.1.5. *Soit (R,m) un anneau local noethérien, et I un idéal de R . Un élément $f \in I^s - I^{s+1}$ est v -superficiel si, et seulement si, sa forme initiale $\bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ vérifie :*

$$\dim G(I,R)/\bar{f}.G(I,R) < \dim G(I,R). \quad (2.3)$$

Remarque 2.1.6. La proposition précédente identifie notre notion d'élément v -superficiel avec la notion de G -paramètre définie, pour les idéaux m -primaires, dans [FOV] (1.2.10) précisément par la condition (2.3).

2.1.3 Un exemple d'élément v -superficiel non superficiel

Avant d'introduire l'exemple en question, on fait une remarque sur le passage du point de vue « intrinsèque » considéré jusqu'ici (notamment pour la présentation de l'éclatement) au point de vue « plongé » (i.e. le cas où $S = \text{Spec } R$ est plongé dans un espace affine sur un corps) qui est souvent celui des exemples :

Remarque 2.1.7. Si on se donne un anneau local de la forme

$$R = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} / (f_1, \dots, f_l)$$

alors $S = \text{Spec } R$ est plongé dans \mathbb{C}^r , et, si m désigne l'idéal maximal de R , le cône tangent $C_{S,O} = \text{Spec } G(m,R)$ est également plongé dans \mathbb{C}^r . Ce plongement de $C_{S,O}$ correspond exactement au *plongement affine au-dessus du plongement projectif* de $\mathcal{E}_m = \text{Proj } G(m,R)$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ défini au § 1.1.2.

Dans ce cas, un élément $f \in m - m^2$, défini comme l'équation d'une section hyperplane $H \cap S$ par une hyperplan de \mathbb{C}^r sera un élément v -superficiel de m si, et seulement si, l'hyperplan H de l'espace \mathbb{C}^r ambiant ne contient aucune composante irréductible de dimension $d - 1$ du cône tangent $\text{Spec } G(m,R)$.

La surface suivante est étudiée dans [HIO] (14.11) : soit A l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[X,Y,Z,W]]$ et $R = A/J$ avec

$$J = (Y^2 W^3 - Z^2, YZ - XW^3, XZ - Y^3, Y^4 - X^2 W^3).$$

Alors R est l'anneau local d'une « surface formelle » de paramétrage :

$$(t,u) \mapsto (X = t^2, Y = tu^3, Z = tu^9, W = u^4).$$

Dans [HIO] on montre que R est Cohen Macaulay, et le paramétrage montre immédiatement que S est à singularité isolée en O . La surface S est donc *normale* (critère de Serre cf. [RES] proposition 4.6).

Les calculs suivants ont été obtenus à l'aide du programme SINGULAR (cf. [GPS]). On renvoie à l'appendice C pour le détails des techniques et des codes utilisés.

En notant m l'idéal maximal de $R = A/J$, on calcule l'anneau gradué :

$$G(m, R) = k[X, Y, Z, W]/(Z, Y^4) \cap (Z^2, YZ, Y^4, X), \quad (2.4)$$

où l'idéal (Z, Y^4) est primaire pour l'idéal (Z, Y) et l'idéal (Z^2, YZ, Y^4, X) est primaire pour l'idéal (X, Y, Z) .

Ainsi, le cône tangent $C_{S,O} = \text{Spec } G(m, R)$ a une seule composante irréductible, qui est le 2-plan défini par (Y, Z) , mais il présente en plus une composante immergée de dimension 1 de support le lieu de l'idéal (X, Y, Z) .

Conclusion 1 : On a ainsi un exemple de surface normale dont le cône tangent n'est pas Cohen Macaulay. (Pour une illustration de l'importance du caractère Cohen-Macaulay du cône tangent, cf. [RES] § 5).

On considère maintenant le schéma $\mathcal{E}_m = \text{Proj } G(m, R)$, plongé dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Dans la carte affine $W \neq 0$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ (isomorphe à $\text{Spec } \mathbb{C}[X, Y, Z]$), l'idéal définissant \mathcal{E}_m est alors l'idéal :

$$(Z, Y^4) \cap (Z^2, YZ, Y^4, X)$$

de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Ainsi \mathcal{E}_m possède :

- une seule composante irréductible C_1 : l'axe des X qui est le support de (Y, Z) ,
- une composante immergée au point $O_1 = [0 : 0 : 0 : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ qui est le support de (X, Y, Z) .

Si donc on considère un élément $f = aX + bY + cZ \in m - m^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, l'hyperplan correspondant $H_f^0 : aX + bY + cZ = 0$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ passe par le point immergé $O_1 \in \text{Ass}(\mathcal{E}_m)$ (cf. la définition 1.4.3), donc f n'est pas superficiel pour m .

Si a est non nul, H_f^0 ne contient pas l'unique composante irréductible C_1 de \mathcal{E}_m , et donc f est v -superficiel pour m .

Conclusion 2 : Tous les $f = aX + bY + cZ \in m - m^2$ avec a non nul, sont v -superficiels pour m , mais ne sont jamais superficiels pour m .

Par contre, le lecteur constatera avec le même raisonnement que les éléments $f = aX + bY + cZ + dW$ avec $d \neq 0$ sont des éléments *superficiels* de l'idéal maximal m .

2.2 Théorie géométrique de la multiplicité

2.2.1 Multiplicités de modules

Par commodité (manipulation de suites exactes), on envisage ici l'étude de la multiplicité dans le cadre des *modules de type fini sur un anneau local* (R, m) , cadre plus général que celui introduit au § 1.2 (annoncé à la remarque 1.2.12).

Si I est un idéal m -primaire d'un anneau local (R, m) et M est un R -module de type fini, alors on définit le module :

$$G(I, M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n M / I^{n+1} M. \quad (2.5)$$

On rappelle que si M est un module sur un anneau noethérien R , on appelle *dimension de M* , et on note $\dim M$, la dimension de Krull :

$$\dim M := \dim R / \text{Ann}(M), \quad (2.6)$$

de l'anneau quotient de R par l'idéal annulateur de M :

$$\text{Ann}(M) = \{r \in R, r.M = 0\}.$$

Noter que c'est aussi la dimension (au sens de la dimension combinatoire des espaces topologiques) du support de M :

$$\text{Supp}(M) = \{p \in \text{Spec } R, M_p \neq 0\} = \text{Spec } R / \text{Ann}(M),$$

(cf. e.g. [Ei] 2.7, pour ces notions).

Si I est un idéal de R tel que :

$$\dim M/IM = 0, \quad (2.7)$$

on définit encore (comparer au § 1.2.1) la *fonction de Hilbert* du module M par :

$$F_{I,M}^0(n) = l_R(I^n M / I^{n+1} M). \quad (2.8)$$

Si I est un idéal m -primaire d'un anneau local (R, m) et M est un R -module de type fini, alors la condition (2.7) est toujours réalisée.

Le théorème 1.2.1 se généralise immédiatement au cas de la fonction du (2.8) :

Théorème 2.2.1. *Si I est un idéal m -primaire d'un anneau local noethérien (R, m) et M est un R -module de type fini, la fonction de Hilbert $F_{I,R}^0$ définie au (2.8) coïncide pour n assez grand avec un polynôme, noté $P_{I,M}^0$ de degré $d - 1 = \dim M - 1$. Le coefficient directeur de $P_{I,M}^0$ est de la forme $e(I, M)/(d - 1)!$, où $e(I, M)$ est un entier naturel appelé multiplicité de I dans M*

De manière plus générale, on introduit la notation pratique suivante pour tout entier k :

$$e_k(I, M) = \begin{cases} e(I, M) & \text{si } k = \dim M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2.2 Un théorème de Flenner-Vogel

Un théorème dû à H. Flenner et W. Vogel (dans [Fl-Vo], et repris dans [FOV] (1.2.6)) va servir de base à l'étude des multiplicités exposée ici.

Si M est un R -module de type fini, on définit (ici) le *cycle $z(M)$ associé à M* sur $\text{Spec } R$ comme la somme formelle :

$$z(M) = \sum_{p \in \text{Min}(M)} l(M_p)[p], \quad (2.10)$$

où $\text{Min}(M) \subset \text{Ass}(M)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers minimaux associés à M et la somme est dans le groupe libre engendré par les éléments de $\text{Spec } R$.

Le théorème de Flenner-Vogel annoncé est le suivant (cf. loc. cit. pour la preuve) :

Théorème 2.2.2. *Soit R un anneau noethérien, et*

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0,$$

une suite exacte de R -modules de type fini. Avec la notation de (2.5), on en déduit un complexe :

$$G(I, M_0) \rightarrow G(I, M_1) \rightarrow G(I, M_2),$$

dans lequel la dernière flèche est surjective, et pour lequel on a les propriétés suivantes :

- i) Les cycles associés (au sens du (2.10) ci-dessus) sur $\text{Spec } G(I, R)$ aux noyaux : $\ker(G(I, M_0) \rightarrow G(I, M_1))$ et $\ker(G(M_1)/G(M_0) \rightarrow G(M_2))$ sont égaux.
- ii) Si (R, m) est local et $\dim M_1/IM_1 = 0$ (notamment si I est m -primaire), et si on note δ la dimension commune au support des noyaux considérés au i), alors :

$$Q = P_{I, M_1}^0 - P_{I, M_0}^0 - P_{I, M_2}^0,$$

est un polynôme à valeurs positives sur \mathbb{N} , de degré $\delta - 1$.

En ce qui nous concerne, on utilisera surtout ce théorème pour l'étude des multiplicités, via le thm. 2.2.7 infra.

On en donne cependant ici une première application immédiate, annoncée à la remarque 1.3.10, qui est une nouvelle démonstration de l'équivalence i) \Leftrightarrow iii) du lemme 1.3.9 :

Corollaire 2.2.3. Soit I un idéal d'un anneau local noethérien (R, m) , et f un élément d'ordre s de I . Les énoncés suivants sont équivalents :

- a) la forme initiale $\bar{f} \in I^s/I^{s+1}$ est non diviseur de zéro dans $G(I, R)$,
- b) f est non diviseur de zéro dans R , et :

$$G(I/f, R/f) \simeq G(I, R)/\bar{f}G(I, R).$$

Preuve:

a) \Rightarrow b) : le fait que f est non diviseur de zéro dans R est toujours direct (par construction du produit dans $G(I, R)$ à partir du produit de R , et le fait que tout élément de R a un ordre fini pour I car R est local, lemme d'intersection de Krull).

On peut alors considérer la suite exacte de multiplication par f dans R :

$$0 \rightarrow R \rightarrow R \rightarrow R/(f),$$

et appliquer le théorème 2.2.2 ci-dessus : les noyaux des applications

$$G(I, R) \xrightarrow{m_{\bar{f}}} G(I, R) \quad \text{et} \quad G(I, R)/\bar{f}G(I, R) \xrightarrow{p} G(I/(f), R/(f)), \quad (2.11)$$

ont le même support, où $m_{\bar{f}}$ est la multiplication par \bar{f} et p est la surjection canonique définie au (1.34), p. 38.

Puisqu'on sait que f est non diviseur de zéro, la condition a) équivaut à l'injectivité de la première application dans (2.11), et la condition b) à celle de la seconde.

Ainsi l'équivalence de ces conditions a) et b) est un cas particulier de (2.11). \square

2.2.3 Applications à la multiplicité $e(I/f, R/f)$

Le théorème 2.2.2 (un résultat beaucoup plus faible suffit, cf. e.g. [Ei] lemme 12.3) implique en particulier le lemme classique suivant :

Lemme 2.2.4. Soient (R, m) un anneau local noethérien de dimension d , et une suite exacte :

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0,$$

de R -modules de type fini. Soit I un idéal de R tel que $\dim M_1/IM_1 = 0$. Alors avec la notation de (2.9) :

$$e_d(I, M_1) = e_d(I, M_0) + e_d(I, M_2). \quad (2.12)$$

Cas des éléments non sécants

Le lemme suivant, qui résulte du lemme 2.2.4 précédent, caractérise les éléments *non-sécants* pour lesquels $e(I, R/f) = e(I, R)$.

Lemme 2.2.5. *Soit (R, m) un anneau local noethérien de dimension d , et I un idéal m -primaire de R . Soit $f \in I$ un élément non sécant de R , c'est-à-dire (cf. déf. 1.3.1) tel que $\dim R/f = \dim R = d$. On a l'égalité :*

$$e_d(I, R) = e_d(I, R/f),$$

si, et seulement si, f vérifie

$$\dim \text{Supp}(R.f) < \dim R, \quad (2.13)$$

où $\text{Supp}(R.f)$ désigne le support du R -module $R.f$, (égal à $\text{Spec } R/\text{Ann}(f)$).

Supposons en outre R équidimensionnel : un tel élément f est nécessairement nilpotent, et il existe un idéal premier immergé associé à R contenant $\text{Ann}(f)$.

Nous donnons la preuve, facile, faute de références :

Preuve: L'équation (2.12) appliquée à la suite exacte :

$$0 \rightarrow R/\text{Ann}(f) \rightarrow R \rightarrow R/(f) \rightarrow 0,$$

de multiplication par f , donne :

$$e_d(I, R) = e_d(I, R/(f)) + e_d(I, R/\text{Ann}(f)),$$

d'où la caractérisation annoncée.

La condition $\dim \text{Supp}(R.f) = \dim R/\text{Ann}(f) < d$ équivaut à :

$$\forall p \in \text{Min}(R), \text{Ann}(f) \not\subset p, \quad (2.14)$$

où $\text{Min}(R)$ est l'ensemble des idéaux premiers minimaux de R (qui vérifient tous $\dim R/p = d$ par l'hypothèse R équidimensionnel).

De l'égalité $f \cdot \text{Ann}(f) = 0$, qui donne $f \cdot \text{Ann}(f) \subset p$ pour tout $p \in \text{Min}(R)$ on déduit de (2.14) que $f \in p$ pour tout $p \in \text{Min}(R)$ i.e. que f est nilpotent.

Par ailleurs, il existe toujours un idéal $\text{Ann}(g)$, annulateur d'un élément $g \in R$, contenant $\text{Ann}(f)$, et maximal pour cette propriété. D'après e.g. [Ei] 3.4, un tel *annulateur maximal* $\text{Ann}(g)$ est un idéal premier associé à R : d'où l'existence d'un idéal premier associé (non minimum, i.e. immergé) contenant $\text{Ann}(f)$. \square

On en déduit un processus pour construire un anneau sans composantes immergées, avec la même multiplicité :

Corollaire 2.2.6. *Soit (R, m) un anneau local noethérien équidimensionnel de dimension d , et N l'idéal de R engendré par l'ensemble des $f \in R$ tels que $\dim R/\text{Ann}(f) < d$. Alors l'anneau $R_1 = R/N$ est sans composantes immergées, et pour tout idéal m -primaire I de R , on a l'égalité des multiplicités :*

$$e(I, R) = e(I, R_1). \quad (2.15)$$

Preuve: On écrit $N = (f_1, \dots, f_l)$, où les f_i vérifient la condition (2.13) : $\dim \text{Supp}(f_i R) < d$, du lemme précédent.

Il suffit alors de noter que pour deux sous- R -modules d'un module M (ici $M = R$) on a :

$$\text{Supp}(N_1 + N_2) = \text{Supp}(N_1) \cup \text{Supp}(N_2), \quad (2.16)$$

de sorte que $\dim \text{Supp}(N) = \max \dim \text{Supp}(f_i R) < d$.

On en déduit l'égalité (2.15) des multiplicités $e(I, R)$ et $e(I, R/N)$, en appliquant (2.12) à la suite exacte de R -modules :

$$0 \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow R/N \rightarrow 0.$$

(cf. la preuve du lemme 2.2.5 précédent).

Enfin, $R_1 = R/N$ est sans composante immergée. En effet, on a rappelé (preuve du lemme précédent) que l'existence d'un idéal premier immergé associé à R_1 équivaut à l'existence d'un $g_1 \in R_1$ non nul, tel que $\dim \text{Supp}(g_1 R_1) < \dim R_1 = d$.

Or si g est un représentant de g_1 dans R , on a $g_1 R_1 = (g.R + N)/N$, de sorte que $\text{Supp}(g_1 R_1) = \text{Supp}(g.R + N)$, ce qui donne la condition : $\dim \text{Supp}(g.R + N) < d$. D'après (2.16), on en déduit $\dim \text{Supp}(g.R) < d$, c'est-à-dire que $g \in N$ par définition de N , donc $g_1 = 0$ dans R_1 , et la conclusion. \square

Éléments sécants : caractérisation des éléments e -transverses

En fait, on n'utilisera vraiment le théorème 2.2.2 dans toute sa précision qu'à travers le corollaire suivant (cf. [FOV] (1.2.11)) :

Théorème 2.2.7. *Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local noethérien (R, m) de dimension d et $f \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . Si f est un élément sécant de R , i.e. si $\dim R/(f) = d - 1$, alors on a toujours l'inégalité :*

$$e_{d-1}(I, R/f) \geq s e_d(I, R) + e_{d-1}(I, \text{Ann } f), \quad (2.17)$$

où la notation e_k a été définie au (2.9). L'inégalité (2.17) est une égalité si, et seulement si, f est un élément v -superficiel de I (cf. § 2.1).

(On rappelle qu'on a établi à la proposition 2.1.5 l'équivalence entre notre notion d'élément v -superficiel et la notion de G -paramètre utilisée par [FOV]).

On en déduit immédiatement :

Corollaire 2.2.8. *Avec les hypothèses du théorème 2.2.7, l'élément f de I est e -transverse (cf. déf. 1.3.1) si, et seulement si, il est v -superficiel et le support de $\text{Ann}(f)$ est de dimension inférieure à $d - 2$.*

Remarque 2.2.9. Si f est *superficiel*, d'après le § 1.3.7, il est P^0 -transverse, ce qui implique qu'il est e -transverse dès que le degré de $P_{I,R}^0$ égale au moins 1, i.e. que la dimension d de R est au moins 2.

Si $\dim R = 1$, les éléments superficiels sont e -transverses si, et seulement si, ils sont non diviseurs de zéro. (En effet, la e -transversalité équivaut alors à la P^1 -transversalité, puisque $P_{I,R}^1$ est de degré un, et la condition de P^1 -transversalité porte sur les polynômes $P_{I/f, R/f}^1$ et $\Delta P_{I,R}^1$, de degrés zéro, i.e. constants, égaux respectivement à $e(I/f, R/f)$ et $e(I, R)$.)

Exemple d'élément v -superficiel e -transverse

On reprend ici l'exemple du § 2.1.3. On a obtenu (cf. Appendice C) les résultats suivants en terme de multiplicité :

Exemple 2.2.10. Pour l'anneau R défini au § 2.1.3, d'idéal maximal m , la multiplicité de la surface S en O est $e(m, R) = 4$.

Les éléments x, y, z classes de X, Y, Z dans R , définissent des courbes C_x, C_y, C_z de multiplicités respectives :

- i) $e(C_x, O) = e(m/x, R/x) = 4$ i.e. x est e -transverse.
- ii) Les éléments y et z ne sont pas v -superficiels et on a : $e(C_y, O) = 5$ et $e(C_z, O) = 11$.

Exemple d'élément v -superficiel non e -transverse

On va considérer ici un anneau local (R_1, m_1) , dont l'idéal maximal m_1 est un idéal associé, c'est-à-dire encore que le point fermé O_1 de $\text{Spec } R_1$ est un point associé. Algébriquement, cela équivaut aussi à ce que tous les éléments de m_1 soient des diviseurs de zéro dans R_1 (cf. e.g. [Ei] 3.1.b).

On va voir que sur cet exemple les éléments v -superficiels ne sont pas e -transverses (comme prédit par le théorème 2.2.7).

Comme anneau R_1 on considère l'anneau local au sommet du cône $C_{S, O}$ considéré dans l'exemple précédent. C'est-à-dire que

$$R_1 = (k[X, Y, Z, W]/(Z, Y^4) \cap (Z^2, YZ, Y^4, X))_{(X, Y, Z, W)},$$

et $S_1 = \text{Spec } R_1$.

Alors comme la condition de v -superficialité pour l'idéal maximal m_1 est une condition relative au cône tangent, la discussion de l'exemple précédent montre que la classe x de X dans R_1 est un élément v -superficiel (non superficiel) de m_1 .

Cependant, si on note $\Gamma_x = \text{Spec } R_1/(x)$, le calcul de la multiplicité de Γ_x en O (cf. Appendice C) donne le résultat suivant :

Exemple 2.2.11. La multiplicité $e(\Gamma_x, O) = e(m_1/x, R_1/x) = 5$ est strictement plus grande que $e(m, R_1) = 4$. Donc l'élément v -superficiel x de m n'est pas e -transverse, ce qui illustre le théorème 2.2.7.

2.3 Éléments v -superficiels et réductions

Avertissement. Contrairement au § 2.2 précédent, les idéaux considérés ici ne sont pas nécessairement m -primaires.

2.3.1 Réduction et clôture intégrale

Rappelons d'abord la définition de la clôture intégrale d'un idéal (cf. [S-Z] Appendice 4 et [LJ-Te]) :

Définition 2.3.1. Soit R un anneau et I un idéal de R . Un élément $x \in R$ est *entier* sur I , s'il vérifie une équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

où les $a_i \in I^i$ pour $i = 1, \dots, n$.

La proposition suivante (cf. e.g. [HIO] (4.6)) permet de se ramener à la notion standard de clôture intégrale d'anneaux (cf. [S-Z] V § 1) :

Proposition 2.3.2. *On adjoint une indéterminée t à l'anneau R , c'est-à-dire qu'on considère l'anneau des polynômes $R[t]$.*

Un élément x d'un anneau R est entier sur l'idéal I si, et seulement si, l'élément xt de $R[t]$ est entier sur l'anneau $B(I,R) = R[It]$ défini au § 1.1.1.

En particulier, on en déduit que l'ensemble \bar{I} des éléments de R entiers sur I est un idéal, appelé *clôture intégrale* de l'idéal I dans R .

La notion suivante a été introduite par Northcott et Rees dans [N-R] (Définition 1) :

Définition 2.3.3. Soient I, J deux idéaux d'un anneau R . On dit que J est une réduction de I si $J \subset I$ et si on a l'égalité

$$I^n = JI^{n-1},$$

pour un entier n (et donc aussi pour tous les entiers plus grands).

Le lien entre avec la notion de clôture intégrale est donné par la proposition suivante (cf. [N-R] ou [HIO] (4.11) et (4.13)) :

Proposition 2.3.4. i) *Pour un idéal I d'un anneau R et un élément $x \in R$: x est entier sur l'idéal I si, et seulement si, I est une réduction de $I + (x)$.*

ii) *Si R est un anneau noethérien, et $J \subset I$ sont deux idéaux de R , alors on a l'égalité $\bar{I} = \bar{J}$ des clôtures intégrales si, et seulement si, J est une réduction de I .*

Si pour un anneau R , on note $\text{Nil}(R)$ l'idéal des éléments nilpotents de R , et $R_{\text{red}} = R/\text{Nil}(R)$ l'anneau réduit associé, l'étude de la clôture intégrale des idéaux se fait aussi bien sur R_{red} comme le montre le lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.3.5. *Soient I et J deux idéaux d'un anneau R avec $J \subset I$. Soit $R_{\text{red}} = R/\text{Nil}(R)$ l'anneau réduit associé à R .*

Alors I est entier sur J si, et seulement si, IR_{red} est entier sur JR_{red} .

Preuve: Sens \Leftarrow : si IR_{red} est entier sur JR_{red} , et $x \in I$ alors il existe $a_i \in J^i$ pour $i = 1, \dots, n$, tels que :

$$z = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

est nilpotent. Alors en considérant $z^m = 0$, on obtient une équation de dépendance intégrale de x sur I . La réciproque est évidente (réduire modulo $\text{Nil}(R)$ l'équation de dépendance intégrale). \square

2.3.2 Conditions équivalentes pour avoir une réduction

Trois conditions équivalentes

La proposition 2.3.6 suivante donne deux conditions algébriques équivalentes à la condition : J est une réduction de I (cf. déf. 2.3.3). Compte-tenu du langage géométrique des éclatements et des hyperplans associés aux éléments de I (cf. §1.1.1), les conditions (DZ)² et (IF)³ de cette proposition ont chacune une interprétation géométrique naturelle sur l'éclatement de l'idéal I . L'interprétation géométrique de la condition (DZ) (condition (DZ)') est donnée au corollaire 2.3.7 ci-dessous. Celle de la condition (IF) (condition (IF)') fait l'objet de la proposition 2.3.8.

Proposition 2.3.6. *Soit (R,m) un anneau local et I un idéal de R .*

2. pour Dimension Zéro,
3. pour Inclusion Finie.

Étant donnés des éléments f_1, \dots, f_t de I , en notant f_1^0, \dots, f_t^0 leurs classes dans I/mI les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (R) L'idéal $J = (f_1, \dots, f_t)$ est une réduction de I (cf. déf. 2.3.3),
- (DZ) la dimension de Krull de l'anneau $G^0(I, R)/(f_1^0, \dots, f_t^0)$ est nulle, où l'on note :

$$G^0(I, R) = G(I, R) \otimes_R k = R/m \oplus I/mI \oplus \dots \oplus I^n/mI^n \oplus \dots$$

l'anneau gradué définissant la fibre schématique $\mathcal{E}_I^0 = e_I^{-1}(m)$ de l'éclatement e_I (cf. § 1.1.4).

- (IF) l'inclusion d'anneaux $B(J, R) \subset B(I, R)$ fait de $B(I, R)$ un $B(J, R)$ -module de type fini; où l'on note $B(I, R) = R[It]$, l'anneau de l'éclatement de I (cf. § 1.1.1), resp. $B(J, R) = R[Jt]$

La démonstration algébrique de ce résultat (cf. e.g [HIO] (10.14)) n'est pas difficile (les implications les moins faciles sont données par le lemme de Nakayama), mais n'est pas forcément très parlante. On peut cependant déjà comprendre que la condition (DZ) est une condition « au dessus du point fermé O de $\text{Spec } R$ » alors que la condition (IF) est une condition « globale ». L'idée est alors que le lemme de Nakayama dans l'anneau local (R, m) permet de montrer que la condition au-dessus de O suffit (et en effet cf. prop. 2.3.12).

Via les traductions géométriques (DZ)' et (IF)' annoncées ci-dessus, on va non seulement donner une démonstration plus imagée de l'équivalence des trois conditions de la proposition 2.3.6 (aux propositions 2.3.8 et 2.3.12) mais en outre les formulations de (DZ)' et (IF)' s'avèreront particulièrement riches en applications. Pour (DZ)', elles feront l'objet des § 2.3.3 à 2.3.6. Le point de vue de (IF)' sera utilisé au chapitre 3.

Géométrie de la condition (DZ)

On rappelle que si on note $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ l'éclatement de l'idéal I dans $\text{Spec } R$, et si on choisit des générateurs (h_0, \dots, h_r) de l'idéal I , on définit (cf. § 1.1.2) un plongement de S_I dans l'espace projectif \mathbb{P}_R^r . Si on note $\mathcal{E}_I^0 = (e_I)^{-1}(O)$ la fibre de e_I au-dessus du point fermé O de $\text{Spec } R$, cela induit un plongement de cette fibre $\mathcal{E}_I^0 = \text{Proj } G^0(I, R)$ dans \mathbb{P}_k^r (où k est le corps résiduel R/m).

D'autre part, à tout élément $f \in I$ s'écrivant $f = \sum_{i=0}^r a_i h_i$ on peut associer un « hyperplan » H_f^0 de \mathbb{P}_k^r défini par :

$$H_f^0 : \sum_{i=0}^r a_i^0 X_i = 0, \tag{2.18}$$

où les a_i^0 sont les classes des a_i dans R/m . (En fait H_f^0 est un hyperplan si, et seulement si, $f \notin mI$; sinon tous les a_i^0 sont nuls, et dans ce cas l'« hyperplan » H_f^0 égale \mathbb{P}_k^r entier).

La condition (DZ) s'exprime alors géométriquement sous la forme suivante (dans \mathbb{P}_k^r) :

Corollaire 2.3.7. *Avec les notations ci-dessus, la condition (DZ) de la proposition 2.3.6 est équivalente à la condition (DZ)' suivante :*

- (DZ)' l'intersection $H_{f_1}^0 \cap \dots \cap H_{f_t}^0 \cap \mathcal{E}_I^0$ des hyperplans projectifs $H_{f_i}^0$ sur la fibre \mathcal{E}_I^0 au-dessus du point fermé O de $\text{Spec } R$ est vide.

Géométrie de la condition (IF) et équivalence avec les deux conditions (R) et (DZ)

On s'intéresse maintenant à la description géométrique de la condition (IF) formulée à la proposition 2.3.6.

a) Morphisme associé à l'inclusion $B(J,R) \subset B(I,R)$:

On va d'abord montrer, via le formalisme des Proj (cf. l'appendice A), que les deux conditions (R) et (IF) de la proposition 2.3.8 sont toutes deux équivalentes à la condition (IF)' suivante sur le morphisme naturel de S_I dans S_J :

Proposition 2.3.8. *Soient (R,m) un anneau local noethérien et $J \subset I$ deux idéaux de R , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (R) *J est une réduction de I ,*
- (IF) *l'inclusion $B(J,R) \subset B(I,R)$ fait de $B(I,R)$ un $B(J,R)$ module fini,*
- (IF)' *le morphisme associé (au sens rappelé à la déf. A.4.1) à l'inclusion des anneaux gradués $B(J,R) \subset B(I,R)$ définit un morphisme fini φ défini sur S_I entier, $\varphi : S_I \rightarrow S_J$. Mieux, chacune des conditions, φ est fini, et φ est défini sur S_I entier, implique l'autre.*

Remarque 2.3.9. i) On insiste sur l'importance de la condition que φ soit défini sur S_I entier. L'intérêt de l'existence d'un tel morphisme apparaîtra clairement au chapitre 3 (cf. e.g. prop. 3.2.3). Dans ce qui suit on donne la vérification directe de la proposition 2.3.8 par le formalisme des Proj (cf. aussi l'appendice A).

ii) Il sera aussi utile (cf. la prop. 2.3.12 et surtout cf. chap. 3, preuve de la proposition 3.2.6) d'avoir une *description géométrique* de ce morphisme liée aux plongements de S_I et S_J dans des espaces projectifs. Cette description fait l'objet du b) qui suit.

Parmi les équivalences de la prop. 2.3.8, certaines sont générales dans toutes les algèbres graduées, d'autres sont particulières aux algèbres de la forme $B(I,R) = R[It]$ et de manière plus précise, on va déduire la prop. 2.3.8 de l'énoncé plus général suivant :

Proposition 2.3.10.

i) *Pour tout morphisme $\phi^a : A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow B := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ d'anneaux gradués, le morphisme associé $\varphi : G(\varphi) \subset \text{Proj } B \rightarrow \text{Proj } A$ est fini si, et seulement si, B est un A -module de type fini.*

ii) *Si J est un idéal d'un anneau noethérien R , et que $A = R[Jt]$, pour tout morphisme $\phi^a : A = R[Jt] \rightarrow B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ dans un anneau gradué B quelconque, B est un $R[Jt]$ -module de type fini si, et seulement si, il existe un entier n_0 tel que :*

$$\forall n \geq n_0, JB_n = B_{n+1}, \quad (2.19)$$

iii) *Avec les mêmes notations qu'au ii), si on suppose en outre que les composantes B_n de l'anneau B vérifient la condition :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, J.B_k \subset B_{k+1}, \quad (2.20)$$

alors la condition (2.19) est équivalente à ce que le morphisme $\varphi : G(\varphi) \subset \text{Proj } B \rightarrow S_J$ associé à l'inclusion de $R[Jt] \subset B$ soit défini sur $\text{Proj } B$ entier.

Remarque 2.3.11. a) Il est clair que les trois points précédents impliquent toutes les équivalences de la prop. 2.3.8 (et notamment celle contenue à l'intérieur de la condition (IF)' en reliant i) à iii)) : dans ce cas la condition (R) est bien sûr (2.19) et la condition (2.20) est triviale pour $B_k = I^k$ et $J \subset I$.

b) La forme générale de l'énoncé du ii) permet de l'appliquer aussi bien à l'anneau $B = B(I,R)$ comme on le fait ici pour la prop. 2.3.8, que par exemple à l'anneau $\overline{B(J,R)}$ comme ce sera utile au § 2.4.2.

Preuve: (de la prop. 2.3.10)

Le i) est standard (se ramener au cas affine par localisation). Le ii) l'est moins sous cette forme, mais laissé néanmoins au lecteur : se référer sinon à la preuve du lemme 1.13 de [LJ-Te] qui, énoncé pour un $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ particulier, s'applique aussi bien au cas donné ici.

On va montrer l'équivalence iii) : à la définition A.4.1, on rappelle comment à un morphisme (de degré zéro) d'anneaux gradués :

$$\phi^a : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

on fait correspondre un morphisme φ défini sur un ouvert $G(\varphi)$ de $\text{Proj } B$:

$$\varphi : G(\varphi) \subset \text{Proj } B \rightarrow \text{Proj } A.$$

Au lemme A.4.2, on a explicité la condition pour laquelle l'ouvert $G(\varphi)$ égale $\text{Proj } B$ entier, qui est la (TN)-égalité (cf. loc. cit. pour cette terminologie) :

$$\forall n \geq n_0, [(A_+).B]_n = B_n, \tag{2.21}$$

où $A_+ = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$ est l'idéal « irrelevant » de A , $(A_+).B$ est l'idéal de B engendré par l'image $\phi^a(A_+)$, et $[\cdot]_n$ désigne la composante de degré n .

Comme

$$[(A_+).B]_n = \sum_{k+l=n, k \geq 1} A_k B_l,$$

la condition $G(\varphi) = \text{Proj } B$ équivaut finalement à :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{k+l=n, k \geq 1} A_k B_l = B_n. \tag{2.22}$$

Ici, on considère l'inclusion :

$$\phi^a : B(J, R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} J^n t^n \rightarrow B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

La condition (2.22) se traduit alors par :

$$\forall n \geq n_0, \sum_{k+l=n, k \geq 1} J^k B_l = B_n. \tag{2.23}$$

Mais, grâce à l'hypothèse (2.20), la condition (2.23) est équivalente à la condition :

$$\forall n \geq n_0, JB_{n-1} = B_n,$$

c'est-à-dire à la condition (2.19), d'où le iii). □

b) Description « plongée » du morphisme φ

On veut décrire le morphisme $\varphi : S_I \rightarrow S_J$ obtenu pour J réduction de I , en considérant S_I et S_J comme des sous-espaces de l'espace projectif (cf. le point de vue plongé du § 1.1.2).

Précisément, on fixe des générateurs (h_0, \dots, h_r) de I et (f_1, \dots, f_t) de J , les seconds s'écrivant comme des combinaisons linéaires à coefficients dans R des premiers :

$$f_i = \sum_{j=0}^r a_{i,j} h_j. \tag{2.24}$$

Au § 1.1.2, on a vu que le choix des h_i définissait une surjection :

$$p_I : R[X_0, \dots, X_r] \rightarrow B(I, R),$$

qui détermine un plongement fermé :

$$i_I : S_I \rightarrow \mathbb{P}_R^r,$$

et de même les f_j définissent une surjection :

$$p_J : R[Y_1, \dots, Y_t] \rightarrow B(J, R),$$

et un plongement fermé associé :

$$i_J : S_J \rightarrow \mathbb{P}_R^{t-1}.$$

Si on considère le morphisme de R -algèbres défini par :

$$\begin{aligned} \Phi^a : R[Y_1, \dots, Y_s] &\rightarrow R[X_0, \dots, X_r], \\ Y_i &\mapsto \sum_{j=0}^r a_{i,j} X_j, \quad (\text{où les } a_{i,j} \text{ sont ceux de (2.24)}) \end{aligned}$$

on peut considérer le *morphisme associé* (au sens de la déf. A.4.1) sur les espaces projectifs :

$$\Phi : \mathbb{P}_R^r \setminus (H_{f_1} \cap H_{f_2} \cap \dots \cap H_{f_t}) \rightarrow \mathbb{P}_R^{t-1}. \quad (2.25)$$

où les H_{f_i} sont les hyperplans $\sum_{j=0}^r a_{i,j} X_j$ associés à l'écriture (2.24) des f_j .

Par commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} R[Y_1, \dots, Y_s] & \xrightarrow{\Phi^a} & R[X_0, \dots, X_r] \\ \downarrow p_J & & \downarrow p_I \\ B(J, R) & \xrightarrow{j} & B(I, R) \end{array}$$

et la définition de φ comme morphisme associé à l'inclusion j de $B(J, R)$ dans $B(I, R)$ on obtient immédiatement que : φ est la restriction à S_I de la projection Φ définie par (2.25).

En se plaçant au-dessus du point fermé O , on déduit de Φ une application :

$$\begin{aligned} \Phi^0 : \mathbb{P}_k^r \setminus (H_{f_1}^0 \cap H_{f_2}^0 \cap \dots \cap H_{f_t}^0) &\rightarrow \mathbb{P}_k^{t-1}, \\ (x_0 : \dots : x_r) &\mapsto \left(\sum_{j=0}^r a_{1,j}^0 x_j : \dots : \sum_{j=0}^r a_{t,j}^0 x_j \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

où l'intersection des hyperplans $H_{f_i}^0 : \sum_{j=0}^r a_{i,j}^0 X_j$ coïncide avec l'intersection considérée à la condition (DZ)' du corollaire 2.3.7.

c) Application de la description plongée de φ à (DZ)' \Leftrightarrow (IF)'

Proposition 2.3.12. *Si $J = (f_1, \dots, f_t) \subset I$ sont deux idéaux d'un anneau local R , le morphisme $\varphi : G(\varphi) \subset S_I \rightarrow S_J$ associé à l'inclusion $J \subset I$ étant la restriction à S_I de la projection :*

$$\Phi^a : \mathbb{P}_R^r \setminus (H_{f_1} \cap H_{f_2} \cap \dots \cap H_{f_t}) \rightarrow \mathbb{P}_R^{t-1},$$

définie au (2.25), on voit que la condition (IF)' : φ est définie sur S_I entier (cf. prop. 2.3.8) est encore équivalente à la condition :

$$H_{f_1} \cap \cdots \cap H_{f_s} \cap S_I = \emptyset. \quad (2.27)$$

Si on suppose maintenant que I et J ont le même support $|V(I)| = |V(J)|$, les éclatements S_I et S_J étant isomorphes au dessus de l'ouvert $\text{Spec } R \setminus V(I)$ la condition (2.28) est équivalente à la condition « au-dessus de $V(I)$ » :

$$H_{f_1} \cap \cdots \cap H_{f_s} \cap \mathcal{E}_I = \emptyset, \quad (2.28)$$

La condition (DZ)' est, elle, définie par la condition :

$$H_{f_1}^0 \cap \cdots \cap H_{f_s}^0 \cap \mathcal{E}_I^0 = \emptyset, \quad (2.29)$$

sur la fibre au-dessus de $O \in \text{Spec } R$ de l'intersection considérée dans (2.28).

L'équivalence de (2.28) et (2.29), est donnée par semi-continuité de la dimension des fibres (cf. B.5.2).

En fait, on a seulement besoin pour passer de (2.29) à (2.28) d'un avatar « gradué » du lemme de Nakayama, beaucoup plus facile que le théorème de dimension des fibres.⁴

Mais l'argument sur la dimension des fibres sera utilisé de manière plus générale aux paragraphes suivants, de sorte qu'on l'isole dans le lemme suivant qui implique la proposition précédente :

Lemme 2.3.13. *Pour toute famille f_1, \dots, f_s d'éléments d'un idéal I d'un anneau local (R, m) , le schéma :*

$$H_{f_1} \cap \cdots \cap H_{f_s} \cap \mathcal{E}_I,$$

est un schéma propre au-dessus de $\text{Spec } R$ donc en tout point $p \in \text{Spec } R$ la dimension de la fibre de p dans $H_{f_1} \cap \cdots \cap H_{f_s} \cap \mathcal{E}_I$, (cf. déf. 2.3.26 infra) est inférieure à celle de la fibre du point fermé, et en particulier est vide si la fibre au point fermé est vide.

2.3.3 Application de la condition (DZ) : élément v^0 -superficiel

Notion de largeur analytique

On traduit par *largeur analytique* la terminologie d'*analytic spread* dont on rappelle ici la définition (due à Northcott et Rees dans [N-R], cf. aussi [Li-3] p. 114⁵ et [HIO] (10.10)) :

Définition 2.3.14. Soit (R, m) un anneau local de corps résiduel $k = R/m$, et soit I un idéal de R . On note encore \mathcal{E}_I^0 la fibre au-dessus du point fermé $O \in \text{Spec } R$ dans l'éclatement de I :

$$\mathcal{E}_I^0 = \text{Proj } G^0(I, R),$$

où $G^0(I, R) = G(I, R) \otimes_R k = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / mI^n$.

On appelle *largeur analytique* de I , et on note $s(I)$, l'entier :

$$s(I) := \dim \mathcal{E}_I^0 + 1 = \dim G^0(I, R),$$

où \dim désigne la dimension de Krull.⁶

4. En fait, le lemme de Nakayama convenablement amélioré (« souped-up ») donne directement la semi-continuité de la dimension des fibres d'un module cohérent, comme expliqué par D. Mumford dans [Mum-2] p. 212–213. Ce lemme de Nakayama là suffit ici.

5. où la largeur analytique est notée $l(I)$: on n'a pas suivi cette notation, pourtant plus sympathique en français, à cause de la confusion possible avec la longueur.

6. Dans l'esprit du § B.4, noter qu'ici l'égalité $\dim \text{Proj } G^0(I, R) = \dim \text{Spec } G^0(I, R) - 1$ est vraie sans hypothèse de caténarité sur (R, m) car il s'agit de k -schémas, cf. rem. B.4.2

Avec cette définition, l'équivalence de la notion de réduction avec la condition (DZ)' du corollaire 2.3.7 donne immédiatement la caractérisation suivante (due aussi à Northcott et Rees dans loc. cit.) :

Proposition 2.3.15. *Soit (R, m) un anneau local noethérien, de corps résiduel $k = R/m$ infini, et I un idéal de R .*

i) *La largeur analytique s de I est le plus petit nombre de générateurs d'une réduction (f_1, \dots, f_s) de l'idéal I .*

ii) *D'après le cor. 2.3.7, pour obtenir une famille (f_1, \dots, f_s) donnant une réduction minimale de I , il faut et il suffit de choisir des éléments $f_i \in I - mI$ dont les hyperplans associés $H_{f_i}^0$ vérifient la condition (DZ)' :*

$$H_{f_1}^0 \cap \dots \cap H_{f_s}^0 \cap \mathcal{E}_I^0 = \emptyset,$$

avec $s = \dim \mathcal{E}_I^0 + 1$. On a déjà vu (prop. 2.3.12) que cette condition était équivalente à la condition globale :

$$H_{f_1} \cap \dots \cap H_{f_s} \cap \mathcal{E}_I = \emptyset.$$

Preuve: Il est clair que le ii) implique le i), et que l'hypothèse k infini permet de construire dans \mathbb{P}_k^r une suite d'hyperplans tels que (pour tout i) l'hyperplan $H_{f_{i+1}}^0$ intersecte $D_i := H_{f_1}^0 \cap \dots \cap H_{f_i}^0 \cap \mathcal{E}_I^0$ en dimension un de moins (c'est-à-dire ne contient aucune composante irréductible de D_i). \square

Notion d'élément v^0 -superficiel

La construction d'une suite minimale définissant une réduction d'un idéal I à la proposition 2.3.15 ci-dessus met en évidence l'intérêt des éléments de I vérifiant la propriété suivante :

Définition 2.3.16. Soit I un idéal d'un anneau noethérien (R, m) . On fixe une famille de générateurs (h_0, \dots, h_r) de I , qui induit un plongement de la fibre \mathcal{E}_I^0 dans \mathbb{P}_k^r (cf. p. 67).

Un élément $f \in I$ sera appelé *élément v^0 -superficiel* de I si $f \in I - mI$ et si l'hyperplan H_f^0 de \mathbb{P}_k^r associé à f (cf. (2.18)) ne contient aucune composante irréductible de \mathcal{E}_I^0 de dimension maximale, i.e. si, et seulement si :

$$\dim H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0 = \dim \mathcal{E}_I^0 - 1.$$

Remarque 2.3.17. La définition précédente admet la formulation intrinsèque suivante, indépendante du choix de générateurs pour I : en notant f^0 la classe de f dans I/mI , un élément $f \in I$ est v^0 -superficiel si, et seulement si les dimensions de Krull :

$$\dim G^0(I, R)/(f^0) = \dim G^0(I, R) - 1.$$

Compte-tenu de la proposition 2.3.15, on peut caractériser les éléments v^0 -superficiels de la manière suivante :

Proposition 2.3.18. *Soit (R, m) un anneau local noethérien de corps résiduel infini. Pour un idéal I de largeur analytique s , un élément $f \in I$ est v^0 -superficiel si, et seulement si, on peut le compléter en une suite (f, f_2, \dots, f_s) définissant une réduction minimale de I . Les $f_i, i \geq 2$ sont alors aussi des éléments v^0 -superficiels de I .*

Une suite (f_1, \dots, f_s) définissant une réduction minimale de I sera appelée un bon s -uplet d'éléments v^0 -superficiels de I .

Question 2.3.19. La définition des éléments v^0 -superficiels soulève la question suivante : quel est le lien entre les conditions

- i) f est v -superficiel, i.e. $\dim(H_f \cap \mathcal{E}_I) < \dim \mathcal{E}_I$ (cf. § 2.1.1)

ii) f est v^0 -superficiel, i.e. $\dim(H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0) < \dim \mathcal{E}_I^0$?

On étudie cette question dans les paragraphes suivants :

- le § 2.3.4 traite du cas des idéaux m -primaires, où le constat, direct, que ces deux notions coïncident (cf. cor. 2.3.21) donne néanmoins la base de la preuve du théorème de Rees (cf. le scholie p. 74), exposée au § 2.3.5.
- le § 2.3.6 élargit la discussion au cas non m -primaire, où la réponse à la question précédente est différente suivant la *largeur analytique* de l'idéal I (comparer les résultats de la prop. 2.3.31 et du cor. 2.3.35).

2.3.4 Cas des idéaux m -primaires : v^0 -superficiel équivaut à v -superficiel

Dans le cas où l'idéal I est m -primaire, les supports de \mathcal{E}_I et \mathcal{E}_I^0 coïncident, de sorte que les deux conditions « v -superficiel » et « v^0 -superficiel » coïncident aussi, comme expliqué dans ce qui suit.

Plus précisément, on rappelle que si I est m -primaire, d'après l'équation (1.8) § 1.1.4 on a l'égalité des schémas réduits :

$$|\mathcal{E}_I| = |\mathcal{E}_I^0|, \quad (2.30)$$

ou encore, en terme d'anneaux gradués, on a l'égalité des supports (sur l'éclatement S_I) :

$$\text{Supp } G(I, R) = \text{Supp } G^0(I, R), \quad (2.31)$$

où $G(I, R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / I^{n+1}$ et $G^0(I, R) = G(I, R) \otimes_R k$.

Si on considère un élément $f \in I$, et qu'on le décompose sous la forme : $f = \sum_{i=0}^r a_i h_i$ en fonction de générateurs (h_0, \dots, h_r) de I , on peut comparer l'« hyperplan » :

$$H_f : \sum_{i=0}^r a_i X_i = 0,$$

dans \mathbb{P}_R^r (déjà introduit au § 1.1.2), avec l'hyperplan :

$$H_f^0 : \sum_{i=0}^r a_i^0 X_i = 0,$$

dans \mathbb{P}_k^r (où les a_i^0 sont les classes des a_i dans I/mI) introduit pour le corollaire 2.3.7 ci-dessus. L'hyperplan H_f^0 est simplement l'intersection de H_f avec le sous-espace \mathbb{P}_k^r de \mathbb{P}_R^r au-dessus du point fermé de $\text{Spec } R$. On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Lemme 2.3.20. *Avec les notations ci-dessus, si I est un idéal m -primaire, on a l'égalité des schémas réduits :*

$$|H_f \cap \mathcal{E}_I| = |H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0|. \quad (2.32)$$

En terme d'équations, si on note $\bar{f} \in I/I^2$ et $f^0 \in I/mI$ les classes respectives de l'élément $f \in I$, l'égalité (2.32) se traduit encore sous la forme :

$$\text{Supp } G(I, R)/(f) = \text{Supp } G^0(I, R)/(f^0). \quad (2.33)$$

Preuve: C'est une conséquence directe du fait que $H_f^0 = H_f \cap \mathbb{P}_k^r$ et de l'égalité (2.30). \square

Ainsi, la réponse à la question 2.3.19 est-elle directe pour les idéaux m -primaires :

Corollaire 2.3.21. i) *Si f est un élément d'un idéal m -primaire I d'un anneau local (R, m) alors f est v -superficiel (de degré 1) pour I si, et seulement si, f est v^0 -superficiel pour I .*

ii) La largeur analytique s de l'idéal I étant égale à la dimension d de R , un bon s -uplet d'éléments v^0 -superficiels de I sera aussi appelé un bon d -uplet d'éléments v -superficiels de I .

iii) La condition (f_1, \dots, f_d) est un bon d -uplet d'éléments v -superficiels de I s'exprime en terme d'anneaux de la manière suivante :

$$\dim G(I, R)/(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_d) = \dim G^0(I, R)/(f_1^0, \dots, f_d^0) = 0, \quad (2.34)$$

où les \bar{f}_i et les f_i^0 sont les classes respectives des f_i dans I/I^2 et I/mI .

Preuve: La première assertion est conséquence directe du lemme 2.3.20; la seconde de la définition 2.3.14 de la largeur analytique et de (2.30). La première égalité du iii) est analogue à l'égalité (2.31), et l'égalité :

$$\dim G^0(I, R)/(f_1^0, \dots, f_d^0) = 0,$$

est exactement la condition (DZ) de la prop. 2.3.6. □

Scholie.

i) D'après l'étude faite au § 2.2, pour un idéal m -primaire I la notion d'élément v -superficiel est reliée à la notion de multiplicité : les notions d'éléments v -superficiels et d'éléments e -transverses coïncident « presque » (cf. cor 2.2.8).

ii) D'autre part la notion d'élément v^0 -superficiel est naturellement reliée à la notion de réduction (cf. prop. 2.3.18) : les éléments v^0 -superficiels sont les éléments que l'on peut compléter en une réduction minimale de I

iii) La constatation du corollaire 2.3.21 ci-dessus suggère alors une démonstration naturelle d'un théorème célèbre de D. Rees reliant multiplicité et clôture intégrale pour les idéaux m -primaires (théorème 2.3.23 ci-dessous). On montre ci-dessous que cette démonstration est bien possible, la seule difficulté technique provenant du « presque » dans le i) ci-dessus.

2.3.5 Application : théorème de Rees

La notion de réduction définie au § 2.3.1 est particulièrement bien adaptée à l'étude des multiplicités, comme le montre la preuve du lemme bien connu suivant :

Lemme 2.3.22. *Si I est un idéal m -primaire d'un anneau local noethérien (R, m) , et si $J \subset I$ est une réduction de I , alors on a l'égalité des multiplicités :*

$$e(I, R) = e(J, R).$$

Preuve: Si J est une réduction de I , il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $I^n J = I^{n+1}$ (*).

Pour tout entier m , on a, à partir de l'inclusion $I \supset J$,

$$I^m \supset J^m \supset I^{n_0} J^m,$$

et d'après (*), $I^{n_0} J^m = I^{n_0+1} J^{m-1} = \dots = I^{n_0+m-1} J = I^{n_0+m}$, soit finalement :

$$I^m \supset J^m \supset I^{m+n_0},$$

ce qui donne pour les fonctions de Samuel (cf. § 1.2.1),

$$F_{I,R}^1(m) \geq F_{J,R}^1(m) \geq F_{I,R}^1(m + n_0),$$

d'où l'égalité des multiplicités (cf. thm-déf. 1.2.6) : $e(I, R) = e(J, R)$. □

Un théorème célèbre dû à D. Rees (dans [Re]) donne la réciproque au lemme précédent avec une hypothèse supplémentaire sur R : R formellement équidimensionnel. On choisit une formulation différente, plus naturelle du point de vue considéré ici (cf. rem. 2.3.24 infra):

Théorème 2.3.23. *Soit (R, m) un anneau local noethérien, et I un idéal m -primaire de R .*

$$\text{On suppose que l'anneau } G(I, R) \text{ est équidimensionnel} \quad (2.35)$$

(ou ce qui revient au même le schéma $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I, R)$ est équidimensionnel, car I est m -primaire, cf. rem. B.4.2). Si $J \subset I$ est un idéal m -primaire vérifiant $e(J, R) = e(I, R)$, alors J est une réduction de I .

Remarque 2.3.24. D'après le corollaire 1.1.21, la condition (2.35) précédente est vérifiée pour tout idéal m -primaire d'un anneau local équidimensionnel et universellement caténaire.

On peut montrer (cf. [HIO] (18.17)) que pour un anneau local R les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- i) R est équidimensionnel et universellement caténaire,
- ii) R est formellement équidimensionnel i.e. le complété \hat{R} de R pour la topologie m -adique est équidimensionnel.

La condition ii) est l'hypothèse usuelle par laquelle on remplace (2.35) dans le théorème de Rees.

Dans la démonstration donnée ici (d'après [FOV] (1.2.18)), on évite le recours au complété en considérant plutôt des conditions de dimensions d'intersection ($v = v^0$ -superficialité), de sorte que i) (ou plus précisément (2.35)) est la formulation naturelle.

Lemme 2.3.25. *Sous l'hypothèse du thm. 2.3.23, i.e. si I est un idéal m -primaire de R tel que $G(I, R)$ est équidimensionnel, alors l'anneau R est équidimensionnel.*

Preuve: (du lemme) La plus naturelle est via la déformation plate de fibre spéciale $G(I, R)$ et de fibre générique R (cf. e.g. [Ei] § 6.5). Une preuve dans l'esprit du § 1.1.6 est possible, laissée en exercice. \square

Preuve: (du théorème de Rees) On peut supposer le corps résiduel $k = R/m$ infini (sinon on remplace R par $R[T]_{m[T]}$ qui est un R -module fidèlement plat, de corps résiduel $k(T)$ infini, et l'hypothèse et la conclusion se transportent par extension fidèlement plate cf. [HIO] (5.1) et (4.12)).

Soit alors f_1, \dots, f_d un bon d -uplet d'éléments $v^0 = v$ -superficiels de J , qui existe grâce à l'hypothèse sur k (cf. prop. 2.3.18). Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que (f_1, \dots, f_d) est un bon d -uplet d'éléments v -superficiels de I .

a) On peut supposer que l'anneau R n'a pas d'idéaux premiers associés immergés.

En effet, d'abord pour les multiplicités, on a construit au corollaire 2.2.6, un anneau $R_1 = R/N$, sans composantes immergées, de même support $\text{Spec } R_1 = \text{Spec } R$ (car $N \subset \text{Nil}(R)$, le nilradical de R), et vérifiant :

$$e(I.R_1, R_1) = e(I, R).$$

D'autre part, pour les clôtures intégrales, on a vu au lemme 2.3.5 que J est une réduction de I si, et seulement si, dans l'anneau réduit $R_{\text{red}} = R/\text{Nil}(R)$, $J.R_{\text{red}}$ est une réduction de $I.R_{\text{red}}$.

b) Désormais on suppose donc que R est sans idéaux immergés et d'après l'hypothèse (2.35) et le lemme 2.3.25, R est aussi équidimensionnel : en particulier R est « pur » (unmixed) i.e. équidimensionnel et sans composantes immergées.

Comme f_1 est un élément v -superficiel de J , c'est un élément sécant (cf. déf. 1.3.1) dans l'anneau pur R , donc c'est un élément non diviseur de zéro de R .

Ainsi, dans J , f_1 est v -superficiel non diviseur de zéro, donc e -transverse d'après le corollaire 2.2.8. Le théorème 2.2.7 donne aussi, dans I , la première inégalité suivante :

$$\begin{aligned} e(I/(f_1), R/(f_1)) &\geq e(I, R) \quad \text{d'après (2.17) où } \text{Ann}(f_1) = 0, \\ \text{ici } e(I, R) &= e(J, R) \quad \text{par l'hypothèse du thm. de Rees,} \\ e(J, R) &= e(J/(f_1), R/(f_1)) \quad (f_1 \text{ est } e\text{-transverse dans } J), \\ e(J/(f_1), R/(f_1)) &\geq e(I/(f_1), R/(f_1)), \quad \text{car } J \subset I. \end{aligned}$$

Ainsi, la série d'inégalités ci-dessus est une série d'égalités, en particulier on a l'égalité :

$$e(I/(f_1), R/(f_1)) = e(I, R),$$

qui d'après le théorème 2.2.7, implique que f_1 est un élément v -superficiel (d'ordre 1) de I , ce que l'on peut traduire, d'après la prop. 2.1.4, par l'égalité :

$$\text{Supp } G(I/(f_1), R/(f_1)) = \text{Supp}(G(I, R)/\bar{f}_1 \cdot G(I, R)), \quad (2.36)$$

où \bar{f} désigne la classe de f dans I/I^2 . (L'égalité (2.36) n'est rien que la formulation algébrique de l'égalité des supports de $H_{\bar{f}_1} \cap \mathcal{E}_I$ avec celui du diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_{I/(f_1)}$ de l'éclatement de $I/(f_1)$ dans $R/(f_1)$.)

Cela montre en particulier que $G(I/(f_1), R/(f_1))$ est encore équidimensionnel car le second membre de (2.36) est quotient de $G(I, R)$ équidimensionnel par \bar{f}_1 sécant (cf. lemme B.2.3).

Comme on a montré l'égalité $e(I/(f_1), R/(f_1)) = e((f_2, \dots, f_d), R/(f_1))$, on peut par induction supposer qu'on a montré le théorème pour $R/(f_1)$ c'est-à-dire que (f_2, \dots, f_d) est un bon $d - 1$ -uplet d'éléments v -superficiels pour $I/(f_1)$ dans $R/(f_1)$, c'est-à-dire (cf. prop. 2.3.18) :

$$\dim G(I/(f_1), R/(f_1)) / (\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_d) = 0,$$

où les \bar{f}_i sont les classes de f_i dans I/I^2 . En remplaçant dans (2.36) on obtient immédiatement que :

$$\dim G(I, R) / (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_d) = 0,$$

c'est-à-dire (cf. cor. 2.3.21 iii)) que (f_1, \dots, f_d) définit une réduction de I . \square

2.3.6 Conditions v et v^0 pour les idéaux non m -primaires

On reprend ici la question 2.3.19 de la page 72 pour un idéal I non m -primaire. Outre les conditions de v^0 et v -superficialité, il est naturel d'introduire aussi une condition d'intersection sur les fibres au-dessus des points génériques de $V(I)$. On commence par rappeler la notion de fibre d'un point de $\text{Spec } R$.

Fibre au-dessus d'un point de $\text{Spec } R$

On rappelle la définition suivante (cf. [EGA] I (3.4.7)) :

Définition 2.3.26. Si R est un anneau et $\phi : X \rightarrow \text{Spec } R$ est un morphisme d'un schéma X dans $\text{Spec } R$, alors pour tout $p \in \text{Spec } R$ on définit la fibre de p par ϕ et on notera $\phi^{-1}(p)$ comme le produit :

$$\phi^{-1}(p) := X \times_R \text{Spec}(\text{Frac}(R/p)),$$

où $\text{Frac}(R/p)$ désigne le corps des fractions de l'anneau intègre R/p .

Remarque 2.3.27. i) Si $p = m$ est un idéal maximal de R , R/m est un corps et la définition précédente coïncide avec celle de la préimage schématique de $V(m)$ par ϕ . En revanche, si p n'est pas un idéal maximal, la fibre $\phi^{-1}(p)$ est distincte de la préimage $\phi^{-1}(V(p)) = X \times_R \text{Spec } R/p$.

ii) On peut voir $\phi^{-1}(p)$ comme la préimage du point fermé $p.R_p$ pour l'application déduite de ϕ par le changement de base : $\text{Spec } R_p \rightarrow \text{Spec } R$, où R_p est l'anneau localisé au point p .

Trois conditions distinctes

Si I est un idéal quelconque d'un anneau local noethérien (R, m) , on peut considérer l'ensemble $\text{Min}(I)$ des idéaux premiers p de R minimaux parmi ceux contenant I (i.e. les points génériques des composantes irréductibles de $V(I)$) et pour un tel $p \in \text{Min}(I)$ on note :

$$\mathcal{E}_I^p := \text{Proj}(G(I, R) \otimes_R \text{Frac}(R/p)), \quad (2.37)$$

qui est la fibre (au sens de la définition 2.3.26) du point p pour l'application :

$$(e_I)_{|\mathcal{E}_I} : \mathcal{E}_I \rightarrow V(I) = \text{Spec } R/I,$$

restriction de l'éclatement e_I au diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_I = \text{Proj}(G(I, R))$.

Avec les notations de la question 2.3.19, c'est-à-dire en associant à un élément $f \in I = (h_0, \dots, h_r)$ s'écrivant $f = \sum_{i=0}^r a_i h_i$ un hyperplan $H_f : \sum a_i X_i = 0$ de \mathbb{P}_R^r , on peut encore introduire l'hyperplan $H_f^p : \sum a_i^p X_i = 0$ où les a_i^p sont les classes de a_i dans $\text{Frac}(R/p)$.

On raffine alors la question 2.3.19 de la manière suivante :

Question 2.3.28. Soit (R, m) un anneau local noethérien de dimension d , et I un idéal non m -primaire de I . On note $\text{Min}(I)$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux au-dessus de I . Soit $f \in I$, on veut comparer les conditions (cf. ci-dessus pour les notations) :

- i) f est v^0 superficiel dans I , i.e. $\dim H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0 = \dim \mathcal{E}_I^0 - 1$,
- ii) pour tout $p \in \text{Min}(I)$, f est $v^0 = v$ -superficiel pour l'idéal pR_p -primaire $I.R_p$ de R_p , ce qui revient à $\dim H_f^p \cap \mathcal{E}_I^p = \dim \mathcal{E}_I^p - 1$,
- iii) f est v -superficiel dans I , i.e. $\dim H_f \cap \mathcal{E}_I < \dim \mathcal{E}_I$. En supposant (R, m) universellement caténaire, la dimension du sous-schéma de Cartier $H_f \cap \mathcal{E}_I$ est alors exactement $\dim \mathcal{E}_I - 1$, cf. l'appendice B.2.6.

On montre ci-dessous par un exemple que ces conditions sont en général indépendantes, mais la valeur de la *largeur analytique* de I (cf. déf. 2.3.14) joue naturellement un rôle important dans la relation éventuelle entre ces différentes conditions.

Estimation de la largeur analytique d'un idéal

Le lemme classique suivant (cf. e.g. [HIO] (10.20)) encadre les valeurs possibles de la largeur analytique d'un idéal :

Lemme 2.3.29. *Si (R, m) est un anneau local noethérien, et I est un idéal de R , et $\text{Min}(I)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers minimaux parmi ceux contenant I , alors on a l'encadrement :*

$$\forall p \in \text{Min}(I), \text{ht}(p) \leq s(I) \leq \dim G(I, R) = \dim R. \quad (2.38)$$

où $\text{ht}(p)$ désigne la hauteur de l'idéal p , c'est-à-dire la codimension de la composante irréductible de $V(I)$ correspondant à p .

Preuve: L'inégalité $s(I) = \dim G^0(I, R) \leq \dim G(I, R)$ est évidente (puisque $G^0(I, R)$ est un quotient de $G(I, R)$).

Pour l'autre inégalité: on peut se ramener au cas où $k = R/m$ est infini (procédé standard, cf. la remarque au début de la preuve du théorème de Rees page 75), et on considère une réduction minimale $J = (f_1, \dots, f_s) \subset I$ donnée par la prop. 2.3.15. Alors d'une part, $\sqrt{J} = \sqrt{I}$ donc $\text{Min}(I) = \text{Min}(J)$ et d'autre part $s(I) = s(J) = s$, le nombre minimal de générateurs de J (cf. la prop. citée).

Mais alors, pour J l'inégalité $\text{ht}(p) \leq s$, pour tout $p \in \text{Min}(J)$ est exactement le théorème de l'idéal principal de Krull (cf. e.g. [Ei] 10.2). \square

On va voir que les deux valeurs extrêmes pour $l(I)$ données dans (2.38) sont atteintes, avec la motivation d'étudier les trois notions de la question 2.3.28 pour chacun des ces deux cas.

2.3.7 Cas où la largeur analytique est maximale : un exemple

On considère la courbe C non-singulière « *de Macaulay* » (cf. [Sa] p. 191) dans \mathbb{P}_k^3 définie par le paramétrage (s^4, s^3t, st^3, t^4) , où $(s : t) \in \mathbb{P}_k^1$.

Par la méthode d'élimination (cf. e.g. l'appendice C.4.2) on obtient un idéal homogène $I(C)$ de $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ définissant C :

$$I(C) = (x_0x_3 - x_1x_2, x_0^2x_2 - x_1^3, x_1x_3^2 - x_2^3, x_0x_2^2 - x_1^2x_3). \quad (2.39)$$

Dans \mathbb{A}_k^4 le cône affine Γ de dimension deux, défini « au-dessus » de la courbe C par le même idéal $I(\Gamma) = I(C)$ a une singularité, isolée, au point O qui n'est pas Cohen-Macaulay (cf. [Sa] loc. cit.).

On va éclater ce cône le long de l'idéal défini par $I := (x_0, x_1)$ (de support $V(x_0, x_1, x_2)$ mais présentant une composante immergée en l'origine) :

Exemple 2.3.30 (Description du cône normal).

On considère l'anneau :

$$R = k[x_0, x_1, x_2, x_3] / (x_0x_3 - x_1x_2, x_0^2x_2 - x_1^3, x_1x_3^2 - x_2^3, x_0x_2^2 - x_1^2x_3),$$

du cône Γ de dimension 2 considéré ci-dessus.

Fait 1. Si, dans R , on considère l'idéal $I = (x_0, x_1)$, alors on peut (cf. l'appendice C.2.3) calculer l'anneau $G(I, R)$ définissant le cône normal à I dans R :

$$G(I, R) = k[x_0, x_1, x_2, x_3, u, v] / (x_0, x_1, x_2^3, x_3u - x_2v, x_2^2u, x_2u^2), \quad (2.40)$$

ainsi, dans \mathbb{A}_k^6 , l'espace réduit sous-jacent au cône normal $\text{Spec } G(I, R)$ est donné par l'idéal (x_0, x_1, x_2, x_3, u) et donc est la réunion des deux sous-espaces linéaires de dimension 2: $V(x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $V(x_0, x_1, x_2, u)$.

Si on s'intéresse à l'éclatement de I , on considère plutôt les schémas correspondant dans $\mathbb{A}_k^4 \times \mathbb{P}_k^1$:

Fait 2 (Description des fibres). Le diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I, R)$ de l'éclatement de I dans R est (ensemblément) la réunion des deux sous-espaces linéaires P_1 et P_2 de dimension un dans $\mathbb{A}_k^4 \times \mathbb{P}_k^1$ (avec les coordonnées $(x_0, x_1, x_2, x_3), [u, v]$) définis par :

$$\begin{aligned} P_1 &:= V(x_0, x_1, x_2, x_3) \simeq \mathbb{P}_k^1, \\ P_2 &:= V(x_0, x_1, x_2, u) \simeq \mathbb{A}_k^1 \times [0 : 1] \simeq \mathbb{A}_k^1. \end{aligned}$$

Clairement, P_1 correspond au support de la fibre \mathcal{E}_I^0 de \mathcal{E}_I au-dessus du point O de $\text{Spec } R$. En particulier, en terme de largeur analytique :

$$s(I) = \dim \mathcal{E}_I^0 + 1 = 2 = \dim G(I, R), \quad (2.41)$$

c'est-à-dire que $s(I)$ prend la valeur maximale possible dans (2.38) (ici le support de I est irréductible, donc un seul idéal premier minimal p , $\text{ht}(I) = \text{ht}(p) = 1$).

Au dessus d'un point $p = (0, 0, 0, x_3) \in V(I) = V(x_0, x_1, x_2)$ autre que O , l'intersection de la fibre avec P_1 est vide (car $x_3 \neq 0$) et l'intersection avec P_2 est réduite au point $(0, 0, 0, x_3), [0 : 1]$. Donc la dimension de la fibre générique :

$$\dim \mathcal{E}_I^p = 0.$$

En outre, la surjection de $R[u, v]$ sur $G(I, R)$ associée au choix des générateurs (x_0, x_1) de l'idéal I (au sens défini au § 1.1.2) envoie les indéterminées u et v sur les classes de x_0 et x_1 respectivement. On a donc le :

Fait 3 (Description des hyperplans associés). L'hyperplan H_f (de $\mathbb{A}_k^4 \times \mathbb{P}_k^1$) associé à un élément $f = ax_0 + bx_1$ de I (au sens de la déf. 1.1.7) est donné par :

$$H_f : au + bv = 0,$$

où a et b sont des éléments de $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ (représentant d'un élément de R). De même l'hyperplan H_f^0 au-dessus de O est défini par :

$$H_f^0 : a(0)u + b(0)v = 0.$$

Grâce à ce qui précède, on peut répondre à la question 2.3.28 dans l'exemple considéré :

Proposition 2.3.31. *Dans l'exemple 2.3.30, pour $I = (x_0, x_1)$, la question 2.3.28 admet la réponse suivante :*

- i) tous les éléments $f = ax_0 + bx_1 \in I$ avec $a, b \in k$ sont des éléments v^0 -superficiels de I car $\dim H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0 = 0$,
- ii) l'élément $x_0 \in I$ n'est pas v -superficiel pour l'idéal $I.R_p$ au point générique $p \in \text{Spec } R/I$, mais tous les éléments $ax_0 + bx_1$ avec $b \neq 0$ le sont ($H_f^p \cap \mathcal{E}_I^p = \emptyset$),
- iii) de même qu'au ii) l'élément x_0 n'est pas v -superficiel pour l'idéal I de R , mais tous les $ax_0 + bx_1$ avec $b \neq 0$ le sont ($\dim H_f \cap \mathcal{E}_I = 0$).

Preuve: Découle directement des faits 2 et 3 ci-dessus décrivant les fibres et les hyperplans H_f . \square

Remarque 2.3.32. Un exemple plus classique d'idéal de largeur analytique maximale est donné par l'idéal jacobien de la surface de \mathbb{C}^3 formée par la famille (non équisingulière) de courbes planes : $x^2 - y^2(y + t^2) = 0$. Dans ce cas, la description des fibres de cet éclatement est donnée, sans calcul, comme l'ensemble des limites d'espaces tangents. Un intérêt de l'exemple ci-dessus est d'avoir un exemple avec une surface à *singularité isolée*.

2.3.8 Cas où la largeur analytique est minimale : équidimensionnalité et théorème de Boeger

Au paragraphe précédent, on a seulement étudié un exemple d'idéal présentant une largeur analytique maximale, sans faire de théorie générale pour ces idéaux. Pour les idéaux de largeur analytique minimale, en revanche, on rappelle d'abord une caractérisation géométrique classique de l'éclatement de ces idéaux (lem. 2.3.33), puis on étudie à la lumière des notions introduites dans ce chapitre le théorème de Boeger (thm. 2.3.36 infra) qui est une généralisation du théorème de Rees (thm. 2.3.23 supra) à cette classe des idéaux de largeur analytique minimale.

Pour un idéal I quelconque, on rappelle que, par définition, la hauteur de I est définie comme :

$$\text{ht}(I) := \min\{\text{ht}(p), p \in \text{Min}(I)\}, \quad (2.42)$$

où $\text{Min}(I)$ est l'ensemble des idéaux premiers minimaux au-dessus de I . Ainsi l'inégalité de gauche de (2.38) donne a fortiori :

$$\text{ht}(I) \leq s(I). \quad (2.43)$$

Et on déduit de (2.38) et de (2.42) que si on a l'égalité dans (2.43), en particulier $\text{Spec } R/I$ est équidimensionnel. En fait, la condition d'égalité dans (2.43) donne le résultat plus fort suivant (cf. e.g. [HIO] (20.0) ou [Li-3] p. 115) :

Lemme 2.3.33. *Soit (R, m) un anneau local noethérien de dimension d et I un idéal de R . On considère l'éclatement $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ de I dans R . Alors l'idéal I vérifie l'égalité : $\text{ht}(I) = s(I)$ dans (2.43) si, et seulement si, toutes les fibres $(e_I)^{-1}(p)$ pour $p \in V(I) \subset \text{Spec } R$ (cf. déf. 2.3.26) ont la même dimension (qui est donc $s(I) - 1$).*

Remarque 2.3.34. On dit aussi que $\text{Spec } R$ est *normalement pseudo-plat* le long de $V(I)$ (cf. e.g. [HIO] App. III 1.4.9).

Preuve: Si $p \in \text{Min}(I)$ dans R_p l'idéal $I.R_p$ est primaire pour l'idéal maximal $p.R_p$, aussi la fibre correspondante vérifie : $\dim \mathcal{E}_I^p = \dim R_p - 1 = \text{ht}(p) - 1$, aussi l'égalité : $\text{ht}(p) = s(I) = \dim \mathcal{E}_I^0 - 1$, donne immédiatement :

$$\dim \mathcal{E}_I^p = \dim \mathcal{E}_I^0,$$

et on peut invoquer la semi-continuité de la dimension des fibres d'un morphisme propre (cf. B.5.2) pour conclure que pour tout point $q \in \text{Spec } R$ (compris entre p et m), on a aussi la même dimension pour la fibre \mathcal{E}_I^q (remarquer que cette argument de semi-continuité donnait aussi directement l'inégalité (2.38) supra).⁷ \square

L'équidimensionnalité donnée par le lemme précédent permet déjà de répondre partiellement à la question 2.3.28 pour les idéaux I de largeur analytique minimale : la condition i) v^0 -superficiel implique la condition ii) (contrairement au cas de l'exemple 2.3.30) :

Corollaire 2.3.35. *Si I est un idéal vérifiant $\text{ht}(I) = s(I)$ et $f \in I$ est un élément v^0 -superficiel de I i.e. vérifiant $\dim H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0 = \dim \mathcal{E}_I^0 - 1$, alors pour tout $p \in V(I)$ la fibre au-dessus de p vérifie la même condition :*

$$\dim H_f^p \cap \mathcal{E}_I^p = \dim \mathcal{E}_I^p - 1.$$

7. On peut aussi voir (comme [HIO] (10.11)) que la largeur analytique est semi-continue « en sens inverse » i.e. que si $R \rightarrow S$ est un morphisme local d'anneaux locaux et I est un idéal de R alors : $s(IS) \leq s(I)$.

Preuve: Par semi-continuité de la dimension des fibres (cf. lem. 2.3.13), on a toujours :

$$\dim H_f^0 \cap \mathcal{E}_I^0 \geq \dim H_f^p \cap \mathcal{E}_I^p.$$

Ici, d'après l'hypothèse sur I , on a aussi : $\dim \mathcal{E}_I^0 = \dim \mathcal{E}_I^p$.

L'hypothèse f est v^0 -superficiel donne l'inégalité stricte :

$$\dim \mathcal{E}_I^0 > \dim H_f^p \cap \mathcal{E}_I^p,$$

d'où l'inégalité stricte : $\dim \mathcal{E}_I^p > \dim H_f^p \cap \mathcal{E}_I^p$, et la conclusion. \square

Le théorème de Boeger

Un résultat fondamental pour les idéaux de largeur analytique minimale est le théorème suivant, dû à E. Boeger (dans [Boe]) qui généralise le théorème de Rees (cf. thm. 2.3.23) :

Théorème 2.3.36. *Soit (R, m) un anneau local formellement équidimensionnel (cf. la rem. 2.3.24).*

Soient $J \subset I$ deux idéaux de R de même support $V(I) = V(J)$, avec J vérifiant $\text{ht}(J) = s(J)$ (i.e. de largeur analytique minimale). Si on a l'égalité des multiplicités aux points génériques de chaque composante irréductible⁸

$$e(IR_p, R_p) = e(JR_p, R_p) \quad \text{pour tous les } p \in \text{Min}(I) = \text{Min}(J),$$

alors J est une réduction de I .

La preuve originale de ce résultat utilise des méthodes asymptotiques (comme celle de Rees, cf. la remarque 2.3.24).

Ici, de même que pour le théorème de Rees (cf. loc. cit.), on peut donner une preuve différente de ce résultat en considérant des suites d'éléments v -superficiels.

D'abord, il est facile de caractériser géométriquement les $p \in \text{Spec } R$ tels que JR_p n'est pas une réduction de IR_p :

Proposition 2.3.37. *Soient $J = (f_1, \dots, f_t) \subset I$ deux idéaux d'un anneau local noethérien R . On reprend les notations de la proposition 2.3.12. En particulier, $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ désigne l'éclatement de I dans R et on renvoie à loc. cit. pour la définition des hyperplans H_{f_1}, \dots, H_{f_t} associés aux f_i .*

Alors l'ensemble :

$$\mathcal{R}(J, I) := \{p \in \text{Spec } R \text{ tels que } J_p \text{ n'est pas une réduction de } I_p\},$$

est exactement l'ensemble des p tels que la fibre :

$$H_{f_1}^p \cap \dots \cap H_{f_t}^p \cap (e_I)^{-1}(p)$$

est non vide, c'est-à-dire encore que $\mathcal{R}(J, I)$ est l'image :

$$\mathcal{R}(J, I) = e_I(H_{f_1} \cap \dots \cap H_{f_t} \cap S_I).$$

Preuve: Il s'agit seulement de la localisation de la proposition 2.3.12 en chaque point $p \in \text{Spec } R$. \square

8. où $\text{Min}(I)$ (resp. $\text{Min}(J)$) désigne l'ensemble des idéaux premiers minimaux au-dessus de I (resp. J), i.e. les points génériques des composantes irréductibles de $V(I)$ (resp. $V(J)$)

Mais le fait que chaque diviseur $H_{f_i} \cap S_I$ soit « très ample au-dessus de $\text{Spec } R$ » donne d'après un théorème dû à F. Steffen (*Hauptidealsatz relatif* cf. [FOV] Thm. 3.6.1) le résultat suivant :

Proposition 2.3.38. *Soit R un anneau local noethérien formellement équidimensionnel et de Nagata (cf. déf. 2.4.7 infra) I un idéal de R et on note $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ l'éclatement de I . Si f_1, \dots, f_t est une suite d'éléments de I , alors avec les notations de la proposition précédente :*

l'image $e_I(H_{f_1} \cap \dots \cap H_{f_t} \cap S_I)$, si elle est non vide, est de codimension au plus t dans $\text{Spec } R$.

Des deux propositions précédentes on déduit comme suit, une démonstration du théorème 2.3.36 :

Démonstration du théorème de Boeger – On considère $J \subset I$ comme dans les hypothèses du théorème 2.3.36. Par hypothèse, on a $\text{ht}(J) = s(J) := t$. Soit (f_1, \dots, f_t) une réduction minimale de J : on peut remplacer J par l'idéal engendré par (f_1, \dots, f_t) . Alors d'après les prop. 2.3.37 et 2.3.38, le lieu $\mathcal{R}(J, I)$ des $p \in \text{Spec } R$ tels que $J.R_p$ n'est pas une réduction de $I.R_p$ est, s'il est non vide, de codimension au plus t et il est inclus dans $V(I) = V(J)$. Or l'hypothèse $\text{ht}(J) = s(J) = t$ dit que chaque composante irréductible de $V(J)$ est de codimension au plus t . Donc si $\mathcal{R}(J, I)$ est non vide, il contient une composante irréductible de $V(J) = V(I)$.

Or par l'hypothèse du théorème de Boeger, au point générique de chacune de ces composantes, on a $e(I.R_p, R_p) = e(J.R_p, R_p)$ et l'idéal $I.R_p$ étant R_p primaire, le théorème de Rees (thm. 2.3.23) dit alors que $J.R_p$ est une réduction de $I.R_p$ donc que $p \notin \mathcal{R}(J, I)$.

Cela montre finalement que $\mathcal{R}(J, I)$ est vide, c'est-à-dire la conclusion du théorème. \square

2.4 Passage à l'éclatement normalisé

Au § 2.1.1, on a défini la notion d'élément v -superficiel d'un idéal I d'un anneau local (R, m) comme une condition dans l'éclatement S_I de cet idéal.

2.4.1 Cadre des anneaux réduits

On considère ici un anneau R (noethérien) *réduit*, c'est-à-dire sans éléments nilpotents, d'anneau total des fractions $K = R[S^{-1}]$, où S sont les éléments de R non diviseurs de zéro.

Comme R est réduit, les idéaux premiers associés à R sont les idéaux premiers minimaux de R . En notant p_1, \dots, p_n ces idéaux premiers minimaux de R , l'anneau total des fractions K de R , qui est un anneau d'Artin se décompose alors sous la forme :

$$K \simeq \prod_{i=1}^n R_{(p_i)} \quad (2.44)$$

où, ici, les $R_{(p_i)}$ sont des *corps* (théorème de structure des anneaux d'Artin, cf. [AC] Chap.4, §2, Prop. 10, ou [Ei] (2.13)).

Grâce à la décomposition (2.44), on peut développer la théorie de la clôture intégrale des anneaux réduits dans leur anneau total de fraction de manière analogue à celle des anneaux intègres, le résultat clef (facile) étant le suivant ([AC] Chap. 5, §1, No. 2, Prop. 9 et son cor.) :

Lemme 2.4.1. *Avec les mêmes notations que dans (2.44), et en notant respectivement \overline{R} la clôture intégrale de R dans K et \overline{R}_i la clôture intégrale de R dans $R_{(p_i)}$, alors l'isomorphisme (2.44) identifie :*

$$\overline{R} \simeq \prod_{i=1}^r \overline{R}_i.$$

Ainsi, on pourra réutiliser pour R réduit tous les résultats sur les clôtures intégrales développés dans [S-Z], en les appliquant en fait à chaque facteur de (2.44). Notamment, à la prop. 2.4.10, on utilisera la notion de *valuation de K* pour dire qu'il s'agit d'une valuation d'un des corps R_{p_i} .

2.4.2 Clôture intégrale des idéaux et normalisation

Anneau $\overline{B(I,R)}$

On étend ici le résultat de la proposition 2.3.2 dans l'hypothèse R réduit, et on en examine la traduction géométrique (les références standards sont [LJ-Te] et [Li-1]).

Soit (R,m) un anneau local noethérien réduit, d'anneau total des fractions K , et I un idéal de R .

On peut voir l'algèbre graduée : $B(I,R) = R \oplus \bigoplus_{n \geq 1} I^n t^n$ comme une sous-algèbre graduée de $K[t]$. On sait alors (cf. [S-Z] chap. VII Thm. 11) que la clôture intégrale de $B(I,R)$ dans $K[t]$ est une sous-algèbre graduée de $K[t]$, que l'on notera (provisoirement, la notation définitive étant celle de l'équation (2.45) ci-dessous) :

$$\overline{B(I,R)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} J_n t^n.$$

Remarque 2.4.2. Si on note \overline{R} la clôture intégrale de R dans K , alors $\overline{R}[t]$ est intégralement clos dans $K[t]$ (cf. [AC] Chap. 5, §1, No.3) et donc $\overline{B(I,R)} \subset \overline{R}[t]$. Ainsi les R -modules J_n composant $\overline{B(I,R)}$ sont des *idéaux* de \overline{R} .

Remarque 2.4.3. Pour un anneau *réduit* R , d'anneau total des fractions K , la clôture intégrale de l'idéal I de R est, d'après la proposition 2.3.2, le sous- R -module J_1 des éléments de degré 1 dans $\overline{B(I,R)}$.

On notera désormais ce R -module J_1 sous la forme \overline{I} .

Remarque 2.4.4. Il est direct de vérifier (ou cf. [Li-1] §5) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le R -module J_n des éléments de degré n coïncide avec la clôture intégrale de l'idéal I^n . Aussi, on a obtenu l'égalité :

$$\overline{B(I,R)} = \overline{R} \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \overline{I}^n t^n. \quad (2.45)$$

Condition de finitude

Pour interpréter géométriquement $\overline{B(I,R)}$ dans le cadre défini au § 1.1.1, on a besoin d'une condition de finitude :

Condition 2.4.5. Soit R un anneau noethérien et I un idéal de R , on demande que la condition de finitude suivante soit réalisée : $\overline{B(I,R)}$ est un $B(I,R)$ module de type fini.

La proposition 2.3.10 i) et iii), appliquée à l'inclusion de $A := B(I,R)$ dans $B := \overline{B(I,R)}$ admet le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.6 ((de la prop. 2.3.10)).

La condition 2.4.5 est équivalente à ce que le morphisme associé (au sens de A.4.1) à l'inclusion : $B(I,R) \subset \overline{B(I,R)}$ soit un morphisme fini ce qui équivaut encore à ce que ce morphisme soit défini sur $\text{Proj } \overline{B(I,R)}$ entier.

Preuve: La seule chose à vérifier pour appliquer le iii) de la proposition citée est la condition (2.20), i.e. ici l'inclusion évidente : $I \cdot \overline{I}^k \subset \overline{I}^{k+1}$. \square

On rappelle ici la définition d'une classe d'anneaux pour laquelle la condition de finitude 2.4.5 sera toujours vérifiée :

Définition 2.4.7. a) On dit qu'un anneau noethérien intègre A est *japonais*, si la fermeture intégrale de A dans toute extension finie de son corps des fractions est une A -algèbre finie.

b) On dit qu'un anneau A est *de Nagata* s'il est noethérien et si pour tout idéal premier p de A , l'anneau A/p est japonais.

On renvoie à [AC] IX § 4 pour plus de détails sur ces définitions, ainsi qu'à [EGA] IV (7.7.1), où les anneaux de Nagata sont appelés *universellement japonais*. Les algèbres de type fini sur un corps k ou sur \mathbb{Z} , ainsi que les anneaux locaux noethériens complets sont de Nagata.

Avertissement. Dans toute la suite du chapitre, on se place sous l'hypothèse de finitude de 2.4.5, vérifiée pour les anneaux de Nagata.

On rappelle que la *normalisation* $n : \overline{X} \rightarrow X$ d'un schéma réduit s'obtient en considérant au-dessus de chaque ouvert affine $U = \text{Spec } A$ de X , le schéma $n^{-1}(U) = \text{Spec } \overline{A}$ où \overline{A} est la clôture intégrale de A dans son corps des fractions (cf. e.g. [EGA] II 6.3). On en déduit ici :

Définition 2.4.8. a) On note $\overline{S}_I := \text{Proj } \overline{B(I, R)}$, il est direct que le morphisme associé à l'inclusion $B(I, R) \subset \overline{B(I, R)}$, défini sur \overline{S}_I entier d'après le corollaire 2.4.6, coïncide avec la *normalisation* du schéma S_I , et on notera ce morphisme :

$$n : \overline{S}_I \rightarrow S_I.$$

b) En notant $e_I : S_I \rightarrow \text{Spec } R$ l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$, on appellera *éclatement normalisé* de I dans $\text{Spec } R$, et on notera \overline{e}_I , le morphisme composé :

$$\overline{e}_I = e_I \circ n : \overline{S}_I \rightarrow \text{Spec } R.$$

Corollaire 2.4.9. *L'obtention (via l'égalité (2.45)) de l'éclatement normalisé de I dans $\text{Spec } R$ comme :*

$$\overline{S}_I = \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \overline{I}^n t^n \right),$$

et l'égalité évidente : $(\overline{I})^n = \overline{I}^n$ donnent immédiatement que les éclatements normalisés des idéaux I et \overline{I} de R coïncident.

2.4.3 Obtention de \overline{I} à partir de l'éclatement normalisé

On détaille ici l'« avatar algébrique » de [Te-81], chap. 1 (1.3.5) et (1.3.6) :

Proposition 2.4.10. *Si R est un anneau réduit, et $X \rightarrow \text{Spec } R$ est un morphisme birationnel propre, tel que X est normal et $I \cdot \mathcal{O}_X$ est un faisceau inversible, alors on peut obtenir la clôture intégrale \overline{I} de I comme l'ensemble des sections globales du faisceau $I\mathcal{O}_X$, c'est-à-dire qu'on a l'égalité :*

$$\overline{I} = H^0(X, I\mathcal{O}_X). \quad (2.46)$$

Preuve: Soit S l'ensemble des valuations de $K = \text{Frac}(R)$ (anneau total des fractions de R) positives sur R (cf. la rem. après le lemme 2.4.1).

Alors la clôture intégrale \bar{I} de I dans R normal s'obtient comme :

$$\bar{I} = \bigcap_{v \in S} I \cdot R_v, \quad (2.47)$$

où l'on note R_v l'anneau de la valuation v (cf. [Z-S] p. 348, pour un anneau intègre, et la remarque qui suit le lemme 2.4.1).

Comme $X \rightarrow \text{Spec } R$ est *propre*, toute valuation $v \in S$ a un centre $x \in X$ (critère valuatif de propreté [EGA] II (7.3.10)) (la birationalité permettant de ne regarder que des valuations de K), ainsi on peut regrouper les éléments de S suivant leur centre, et (2.47) devient :

$$\bar{I} = \bigcap_{x \in X} \bigcap_{v \in S_x} I \cdot R_v, \quad (2.48)$$

où S_x désigne l'ensemble des valuations centrées en x .

Avec l'hypothèse supplémentaire que $I \mathcal{O}_X$ est inversible, les idéaux $I \mathcal{O}_{X,x}$ sont des idéaux *principaux* dans l'anneau *normal* $\mathcal{O}_{X,x}$ (car X est supposé normal), donc ils sont *complets* (cf. [Z-S] loc. cit.).

Ainsi, pour chaque $x \in X$ on a, d'après le même critère qu'au (2.47) :

$$I \cdot \mathcal{O}_{X,x} = \bigcap_{v \in S_x} I \cdot R_v. \quad (2.49)$$

En regroupant les équations (2.48) et (2.49), on obtient :

$$\bar{I} = \bigcap_{x \in X} I \cdot \mathcal{O}_{X,x},$$

ce qui, via [EGA] I (8.2.1.1), donne bien l'égalité (2.46). □

La proposition 2.4.10 précédente donne la réciproque au résultat du corollaire 2.4.9, c'est-à-dire qu'on a la caractérisation suivante (avatar algébrique de [Te-81] (1.3.6)) :

Corollaire 2.4.11. *Si R est un anneau de Nagata (cf. déf. 2.4.7) normal, pour deux idéaux I, J de R , on a l'équivalence entre :*

- i) I et J ont la même clôture intégrale,
- ii) il existe $X \rightarrow \text{Spec } R$ birationnel, propre, avec X normal, tel que $I \cdot \mathcal{O}_X$ inversible et :

$$I \cdot \mathcal{O}_X = J \cdot \mathcal{O}_X,$$

- iii) sur l'éclatement normalisé \bar{S}_I de S le long de I , on a l'égalité

$$I \cdot \mathcal{O}_{\bar{S}_I} = J \cdot \mathcal{O}_{\bar{S}_I}.$$

- iv) il existe un isomorphisme $\eta : \bar{S}_I \simeq \bar{S}_J$ au-dessus de S entre les deux éclatements normalisés.

Preuve: $i) \Rightarrow iv)$ est donné par le corollaire 2.4.9. $iv) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii)$ est direct.

$ii) \Rightarrow i)$ est donné par la proposition 2.4.10. □

2.4.4 Caractérisation des éléments v -superficiels sur \overline{S}_I

Soit I un idéal d'un anneau local (R, m) de Nagata réduit. On considère l'éclatement normalisé \overline{S}_I de I dans $\text{Spec } R$ (cf. déf. 2.4.8), sur lequel on note D_I le diviseur de Cartier associé à $I\mathcal{O}_{\overline{S}_I}$.

On note $\mathcal{D} = |D_I|$ le diviseur de Weil réduit associé à D_I , et D_1, \dots, D_s les composantes irréductibles de \mathcal{D} .

Pour chaque $k = 1, \dots, s$, on note v_k la valuation de $K = \text{Frac } R$ associée à D_k sur \overline{S}_I normale (ces valuations sont parfois appelées *valuations de Rees* de l'idéal I).

On peut alors écrire le diviseur D_I sous la forme :

$$D_I = \sum_{i=1}^s m_i D_i, \quad (2.50)$$

où chaque coefficient $m_i = \min\{v_i(f), f \in I\}$.

Pour un élément $f \in I$, on note encore D_f le diviseur de Weil :

$$D_f = \sum_{i=1}^s v_i(f) D_i, \quad (2.51)$$

et en comparant (2.50) et (2.51) on a l'inégalité :

$$D_f \geq D_I.$$

Ce diviseur D_f permet aussi l'écriture divisorielle de la transformée stricte de (f) sur \overline{S}_I , comme indiqué à la remarque suivante :

Remarque 2.4.12. Pour un élément $f \in I$, le diviseur de Weil effectif de \overline{S}_I , défini par

$$(f)' = (f)^* - D_f, \quad (2.52)$$

coïncide avec la transformée stricte du schéma $V(f)$ par \overline{e}_I (cf. définition 1.1.13).

La preuve est un exercice facile sur les décompositions primaires des idéaux principaux dans un anneau normal.

Avec ces notations, on peut formuler la caractérisation annoncée :

Proposition 2.4.13. Soit (R, m) un anneau local de Nagata (cf. déf. 2.4.7) réduit, et soit I un idéal de R .

i) Un élément $f \in I$ est v -superficiel (cf. déf. 2.1.1) si, et seulement si, en notant D_f le diviseur de Weil défini en (2.51), et D_I le diviseur de Cartier associé à $I\mathcal{O}_{\overline{S}_I}$, on a l'égalité :

$$D_f = D_I.$$

ii) Avec les notations de l'équation (2.50) ci-dessus, la condition du i) est équivalente à la condition valuative suivante :

$$v_i(f) = \min\{v_i(g), g \in I\}, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, s.$$

iii) En notant $(f)^\# = (f)^* - D_I$ la transformée faible de f sur \overline{S}_I (qui est la préimage par n de la transformée faible sur S_I définie au § 1.1.2), on peut encore reformuler ce résultat en disant que f est v -superficiel si, et seulement si, sur l'éclatement normalisé \overline{S}_I sa transformée faible égale sa transformée stricte.

La preuve est conséquence directe de la finitude du morphisme de normalisation $n : \overline{S}_I \rightarrow S_I$.

Remarque 2.4.14. Comparer le critère du iii) ci-dessus au critère de superficialité : « transformée faible égale transformée stricte » sur l'éclatement S_I donné à la prop. 1.4.15.

Cas des éléments v^0 -superficiels

Un élément $f \in I$ est v^0 -superficiel si sa transformée faible sur $\overline{S_I}$ ne contient aucune composante irréductible de dimension maximale dans $D_I^0 := D_I \cap (\bar{e}_I)^{-1}(O)$. Mais cette dimension peut être « petite », et dans ce cas, on peut avoir des éléments v -superficiels qui ne soient pas v^0 -superficiels.

En revanche, si on a une « composante verticale » de dimension maximale, au dessus de O dans D_I , c'est à dire une composante irréductible de D_I qui se contracte sur O , alors toutes les composantes de dimension maximale de D_I^0 sont des composantes irréductibles de D_I , et donc la condition f est v -superficiel implique f est v^0 superficiel.

Chapitre 3

Éléments généraux et nombre de Milnor (dimension deux)

Introduction

Dans tout ce chapitre, on considère un germe (S, \mathcal{O}) de surface analytique complexe normale (cf. [RES] § 1.2). On note $\mathcal{O}_{S, \mathcal{O}}$ l'anneau local de (S, \mathcal{O}) et m son idéal maximal. Le cadre est donc beaucoup plus particulier qu'aux chapitres précédents, puisqu'on se restreint à la dimension deux, au corps des nombres complexes, et qu'on suppose la surface normale.

Dans ce cadre, on peut pousser plus loin l'étude des éléments d'un idéal m -primaire I de l'anneau local $\mathcal{O}_{S, \mathcal{O}}$ commencée aux chapitres précédents : on introduit dans ce chapitre la notion d'*élément général* d'un tel idéal I , suivant la méthode des chapitres précédents, comme une *condition géométrique* sur la transformée de cet élément dans l'éclatement normalisé de I dans (S, \mathcal{O}) . Ensuite on montre qu'on dispose ici encore d'un *invariant numérique* qui caractérise ces éléments généraux : le nombre de Milnor.

Il faut noter que les *éléments généraux* définis ici coïncident exactement dans le cas des idéaux m -primaire de $(\mathbb{C}^2, 0)$ avec la notion classique d'élément général d'un idéal (par exemple complet) I (cf. e.g. [Sp-2] Def. 7.1 et [LJ] p. 358–359) et dans le cas de l'idéal maximal m d'un anneau local (S, \mathcal{O}) de surface normale, avec les éléments de m définis (dans un plongement) comme section hyperplane par un hyperplan non-limite d'hyperplans tangents à S (cf. [Sn-2]).

Le § 3.1 rappelle un certain nombre de propriétés des pinceaux et des familles de courbes, reliées notamment au nombre de Milnor défini pour Buchweitz et Greuel pour toute courbe complexe réduite (voir aussi [RES] § 4.2).

Le § 3.2 introduit la notion de *direction exceptionnelle* pour un idéal I (les *tangentes exceptionnelles* introduites par Lê D.T. (cf. e.g. [Sn-2]) étant les directions exceptionnelles pour le cas particulier de l'idéal maximal) et la notion d'*élément H -général*, notions reliées toutes deux à des propriétés de résolutions simultanées (prop. 3.2.3, et prop. 3.2.6).

La définition des *éléments généraux* d'un idéal I (déf. 3.2.9) plus faible que celle des éléments H -généraux, présente l'avantage de se transmettre à tous les idéaux ayant même clôture intégrale, et de s'interpréter simplement sur toute (bonne) résolution (prop. 3.2.15).

À partir de là, il est facile de montrer que tous les éléments généraux d'un idéal ont le même nombre de Milnor, noté μ_I (théorème 3.3.3), et inversement, si on suppose que f est un élément v -superficiel d'un idéal I , il n'est pas difficile de montrer par résolution simultanée faible que $\mu(f) = \mu_I$ entraîne f général.

Le § 3.3.3 est consacré à la preuve, plus délicate, du fait que la propriété $\mu(f) = \mu_I$

entraîne f général sans supposer à l'avance que f est v -superficiel dans I . Autrement dit, le résultat principal de cette dernière partie est que f non v -superficiel entraîne bien $\mu(f) > \mu_I$.

Le lecteur notera que cette dernière affirmation fait sens aussi si l'on remplace (S, O) par l'anneau local d'une *intersection complète* de dimension quelconque. Ce n'est pas le cas de la démonstration donnée ici qui est spécifique à la dimension deux (mais valable pour toute les surfaces normales).

Un argument plus général est certainement possible : le § 3.3.4 montre comment on peut obtenir ce résultat pour une hypersurface de dimension quelconque dans le cas particulier où I est l'idéal maximal.¹ C'est un corollaire d'un théorème de B. Teissier dans l'appendice de [Te-77], qui dit que μ constant entraîne μ^* constant pour les familles de sections hyperplanes d'un germe d'hypersurface à singularité isolée.

3.1 Pinceaux et familles de courbes

3.1.1 D'un pinceau à une famille plate de courbes

Soient f, g deux éléments de $\mathcal{O}_{S, O}$, qui s'annulent en O et tels que les courbes qu'ils définissent sur (S, O) n'aient pas de branches communes. Algébriquement cela se traduit en disant que l'idéal (f, g) de $\mathcal{O}_{S, O}$ est m -primaire (Nullstellensatz de Hilbert-Rückert cf. [Gu] E 2), on dit encore que (f, g) est un *système de paramètres* de (S, O) (cf. [RES] § 2.1).

Pour tout élément $\omega = (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, on définit la courbe (diviseur de Cartier sur (S, O)):

$$C_{\omega} : \alpha f + \beta g = 0. \quad (3.1)$$

Définition 3.1.1. La famille $(C_{\omega})_{\omega \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$ est appelée le *pinceau de courbes* engendré par f et g sur le germe de surface (S, O) .

Notons $J = (f, g)$ l'idéal engendré par f et g dans $\mathcal{O}_{S, O}$.

On renvoie à [RES] § 4.2.2 pour les notions et résultats utilisés dans ce qui suit : comme S est normale en O , l'anneau local $\mathcal{O}_{S, O}$ est *Cohen-Macaulay* (critère de Serre, cf. loc. cit. prop. 4.6 iv)), et donc le *système de paramètres* (f, g) définit une *suite régulière* de $\mathcal{O}_{S, O}$ et dans ce cas, l'éclatement e_J de l'idéal J dans S est décrit par la proposition suivante (cf. e.g. [HIO] (14.1)):

Proposition 3.1.2. *Si $J = (f, g)$ est l'idéal engendré par une suite régulière dans un anneau analytique local $\mathcal{O}_{S, O}$ de dimension deux, l'éclatement :*

$$e_J : S_J \rightarrow (S, O)$$

de l'idéal J dans (S, O) est la restriction de la projection $p_1 : S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow S$, au sous-espace de $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ défini par l'idéal $(f\beta - g\alpha)$ dans $\mathcal{O}_S[\alpha, \beta]$, où $(\alpha : \beta)$ est un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

En particulier, la fibre $\mathcal{E}_J^0 = (e_J)^{-1}(O)$ au-dessus de O s'identifie naturellement à $\{O\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Corollaire 3.1.3. i) *L'application (non définie au point O):*

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : S \setminus \{O\} &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ x &\mapsto (f(x) : g(x)) \end{aligned}$$

1. L'avantage de l'idéal maximal est que, dans ce cas, v -superficiel équivaut à multiplicité minimum.

se relève par l'éclatement $e_J : S_J \rightarrow (S,O)$, en une application holomorphe :

$$f_J : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1.$$

- ii) Pour tout $\omega \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la fibre $f_J^{-1}(\omega)$ est la transformée stricte par e_J , notée C'_ω , de la courbe C_ω ,
- iii) on a l'isomorphisme $C_\omega \simeq C'_\omega$.

Ce procédé d'éclatement permet de passer d'un pinceau de courbes passant toutes par un point O à une famille plate de courbes avec section, au sens suivant :

Définition 3.1.4. On appellera *famille plate de courbes* (au dessus d'un ensemble analytique S) un morphisme plat $f : X \rightarrow S$ où les $X_t = f^{-1}(t)$ sont des courbes. On parlera aussi de la *famille* $(X_t)_{t \in S}$ pour désigner f . S'il existe en outre un morphisme $\sigma : S \rightarrow X$ tel que $f \circ \sigma = id_S$, on dira que σ est une *section* de f .

Corollaire 3.1.5. Soit (S,O) un germe de surface Cohen-Macaulay, et C_ω le pinceau de courbes défini par un système de paramètres (f,g) comme à l'équation (3.1). Alors, avec les notations du cor. 3.1.3, la famille $(C'_\omega)_{\omega \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$, c'est-à-dire l'application f_J restriction à $S_J \subset S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ de la seconde projection, est une famille plate de courbes au-dessus de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ avec une section $\sigma : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathcal{E}_J^0$ au sens de la définition 3.1.4.

En outre, pour tout les $\omega \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tels que C_ω est réduite, on a la propriété supplémentaire que $C'_\omega \setminus \sigma(\omega)$ est lisse.

Démonstration. La platitude de $f_J : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est équivalente au fait qu'en tout point $x \in S_J$, f_J soit non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_{S_J,x}$. Comme les fibres de f_J sont des courbes, il s'agit de vérifier que S_J est S_1 en tout point (au sens de la propriété S_k de Serre, cf. [RES] § 4.2.2). En fait S_J est S_2 i.e. Cohen-Macaulay :

En effet, l'éclatement S_J est défini dans $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ par l'équation donnée à la prop. 3.1.2, et donc S_J est Cohen-Macaulay, comme diviseur de Cartier sur $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (avec S Cohen-Macaulay).

La section σ est l'application naturelle $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \{O\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = \mathcal{E}_J^0$ déjà définie à la prop. 3.1.2.

Pour toutes les valeurs de ω telles que le germe de courbe (C_ω, O) est réduit, sur un représentant S assez petit la courbe $C_\omega \setminus \{O\}$ est lisse, et donc aussi $C'_\omega \setminus \sigma(\omega)$ d'après le cor. 3.1.3 iii). \square

3.1.2 Propriétés topologiques des familles plates de courbes complexes

Boule de Milnor pour une singularité isolée

On rappelle ici un certain nombre de propriétés topologiques valables pour les singularités isolées de toute dimension :

Définition 3.1.6. Soit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ une singularité isolée de dimension n . Une boule $B \subset \mathbb{C}^N$ de centre 0 est appelée une *boule de Milnor* pour $(X_0, 0)$ si on a les deux propriétés suivantes :

- i) Il existe un représentant X'_0 de $(X_0, 0)$ qui est défini dans un voisinage de la boule fermée \overline{B} , et qui intersecte la sphère ∂B transversalement. On notera X_0 l'intersection de X'_0 avec B et $\overline{X_0}$ l'intersection de X'_0 avec \overline{B} .
- ii) $X_0 \setminus \{0\}$ est non singulière, et intersecte $\partial B'$ transversalement, pour toute boule $B' \subset B$ centrée en 0.

L'existence d'une boule de Milnor est montrée dans [Mil-2] (Cor. 2.9) pour tout germe d'ensemble algébrique complexe. La démonstration s'applique aussi au cas analytique.

Dans certains cas particuliers (par exemple les singularités quasi-homogènes cf. [O-W] Thm. 3.1.4.), on peut obtenir des boules de Milnor arbitrairement grandes.

On note immédiatement que (d'après ii)) toute boule $B' \subset B$ est encore une boule de Milnor pour $(X_0, 0)$. On remarque aussi que le représentant X_0 est contractible (avec la théorie de Morse, cf. [Mil-1] I § 3).

En fait, on peut montrer un résultat topologique plus précis : la paire $(\overline{B}, \overline{X_0})$ est homéomorphe à la paire $(\overline{B}, C(K))$ où $K = \overline{X_0} \cap \partial \overline{B}$ et $C(K)$ est le cône de sommet 0 construit sur K ([Mil-2] Thm. 2.10).

Tube de Milnor, bon représentant d'une déformation

On considère maintenant un disque \mathbb{D} voisinage de 0 dans \mathbb{C} , et un germe de déformation plate $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ de $(X_0, 0)$, c'est-à-dire un germe de morphisme plat avec $f^{-1}(0) = (X_0, 0)$.

Un représentant $X_0 \subset B$ du germe $(X_0, 0)$ dans une boule B de \mathbb{C}^N étant fixé, on peut choisir un disque \mathbb{D} de rayon suffisamment petit centré en 0 dans \mathbb{C} et un représentant $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ tel qu'on ait un plongement fermé $i : X \rightarrow B \times \mathbb{D}$ et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & B \times \mathbb{D} \\ & \searrow f & \downarrow \pi_2 \\ & & \mathbb{D} \end{array} \quad (3.2)$$

où $\pi_2 : B \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ désigne la seconde projection.

(Construction générale en géométrie analytique locale, appelée *immersion du morphisme* f , cf. [Fi] (0.35)).

Comme le germe f est plat, on peut aussi supposer que le représentant choisi $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ est un morphisme plat (car le lieu non-plat est analytique cf. [Fi] (3.18)).

En rajoutant une condition de transversalité supplémentaire à toutes les propriétés énumérées jusqu'ici, on obtient :

Définition 3.1.7. Pour un germe $(X_0, 0)$ à singularité isolée, et un germe de déformation plate $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ de $(X_0, 0)$, un représentant

$$f : X \rightarrow \mathbb{D}$$

de cette déformation sera appelé un *bon représentant*, si on a choisi un représentant $X_0 \subset B$ du germe $(X_0, 0)$ dans une boule $B \subset \mathbb{C}^N$ tel que :

- $B \subset \mathbb{C}^N$ est une boule de Milnor pour $(X_0, 0)$,
- on a un plongement fermé $i : X \subset B \times \mathbb{D}$ qui est une immersion du morphisme f (cf. diagramme (3.2)),
- $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ est plat,
- toutes les fibres $X_t = f^{-1}(t)$ intersectent $\partial B \times \{t\}$ transversalement, pour $t \in \mathbb{D}$.

3.1.3 Conditions de résolutions simultanées

On rappelle ici plusieurs notions de *résolutions simultanées* pour les familles de courbes réduites, développées dans [Te-80] et [B-G].

Soit $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ un germe de famille plate de courbes *réduites*, et soit

$$n : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow (X, \mathcal{O}),$$

la normalisation de la surface (X, O) ; ici $\tilde{O} = n^{-1}(O)$ est un ensemble fini de points, et donc (\tilde{X}, \tilde{O}) est un multi-germe de surface.

Le théorème suivant (cf. [Te-80] p. 73 et aussi [LLT]) étudie l'application composée :

$$\tilde{f} = f \circ n : (\tilde{X}, \tilde{O}) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$$

en utilisant l'invariant δ des courbes, lequel est présenté de manière détaillée dans [RES] § 3.2.1. On renvoie donc à ce paragraphe pour la définition de δ , et on cite seulement :

Théorème 3.1.8.

- i) *Le morphisme $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{O}) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ est plat,*
- ii) *si on considère un représentant assez petit $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ (resp. $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{D}$) et qu'on note $X_t = f^{-1}(t)$ (resp. $\tilde{X}_t = \tilde{f}^{-1}(t)$), alors pour tout $t \in \mathbb{D} - \{0\}$ les fibres \tilde{X}_t sont lisses et*

$$\delta(X_0) - \delta(X_t) = \delta(\tilde{X}_0),$$

où $\delta(X_t)$ désigne la somme des $\delta(X_t, O_t^i)$ en tous les points singuliers O_t^i de X_t .

Définition 3.1.9. Une famille plate de courbes réduites $f : X \rightarrow D$ admet une *normalisation en famille* (notion qui coïncide, en dimension 1, avec la notion de *résolution simultanée très faible* définie dans [Te-2] p. 72) si, et seulement si, avec les notations du thm. 3.1.8, toutes les courbes \tilde{X}_t sont lisses. Le théorème précédent s'énonce donc en disant que la condition de normalisation en famille équivaut à $\delta(X_t) = \delta(X_0)$.

La proposition suivante, qui est une expression du caractère liant de la platitude donne une autre formulation de la notion de normalisation en famille. On rappelle d'abord une définition (cf. [Fi] (2.18)) :

Définition 3.1.10. Un germe d'application holomorphe $\phi : (X, p) \rightarrow (Y, q)$ est une *submersion analytique* s'il existe un isomorphisme analytique $\psi : (X, p) \rightarrow (\mathbb{C}^k \times Y, (0, q))$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\psi]{\simeq} & \mathbb{C}^k \times Y \\ & \searrow \phi & \downarrow \pi_2 \\ & & Y \end{array}$$

On renvoie à [Fi] (3.21) pour la preuve du résultat suivant (cf. [Mum-2] III § 10 Thm. 3, pour l'analogie en géométrie algébrique) :

Théorème 3.1.11. *Si $\phi : X \rightarrow Y$ est un morphisme d'espaces analytiques les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *ϕ est une submersion analytique en un point $p \in X$*
- ii) *ϕ est plate en p et la fibre $\phi^{-1}(\phi(p))$ est lisse.*

Des théorèmes 3.1.8 i) et 3.1.11, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.12. *Une famille plate $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ de courbes réduites admet une normalisation en famille si, et seulement si, le morphisme $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{D}$ est une submersion analytique.*

Preuve: Le i) du thm. 3.1.8, et l'hypothèse de normalisation en famille (déf. 3.1.9) donnent exactement le ii) du thm. 3.1.11. □

Remarque 3.1.13. Une autre façon d'exprimer le corollaire précédent est de dire que $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ admet une normalisation en famille si, et seulement si, la famille de courbes

$(X_t)_{t \in \mathbb{D}}$ admet une *paramétrisation en famille* c'est-à-dire que X est l'image réduite du morphisme

$$n : (\mathbb{C}, 0) \times \sqcup_{j=1}^r (\mathbb{C}_j, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N, 0)$$

où \sqcup désigne une union disjointe, et n est définie par la donnée de N éléments z_1, \dots, z_N de $\prod_{j=1}^r \mathbb{C}\{t, t_j\}$ tels que $(z_1(0, t_j), \dots, z_N(0, t_j))_{j=1, \dots, r}$ est la normalisation des $s \leq r$ branches de X_0 .

(Il faut comprendre que les fibres X_t pour $t \neq 0$ ont exactement r branches, et pour $t = 0$ on peut avoir moins de branches, ce qui signifie simplement que plusieurs paramétrisations se confondent).

On énonce maintenant deux conditions de résolution simultanée plus fortes (cf. [Te-2] II (3.1.1) et (3.1.5)) :

Définition 3.1.14. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ un représentant d'une famille plate de courbes réduites avec une section $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow X$ (cf. déf. 3.1.4). On dit que f admet une *résolution simultanée faible* (resp. *forte*) si f admet une normalisation en famille et qu'on a l'isomorphisme suivant (qui commute aux projections sur \mathbb{D}) :

$$\begin{aligned} |n^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))| &\simeq \mathbb{D} \times |n^{-1}(\sigma(0))| \\ \text{(resp. } n^{-1}(\sigma(\mathbb{D})) &\simeq \mathbb{D} \times n^{-1}(\sigma(0)) \text{)} \end{aligned}$$

où, dans la définition de la résolution simultanée faible, les $||$ désignent les espaces réduits sous-jacents.

Remarque 3.1.15. i) Résolution simultanée faible équivaut à normalisation en famille avec nombre de branches $r(X_t, \sigma(t))$ constant. Ainsi d'après le critère du thm 3.1.8, résolution simultanée faible équivaut à δ constant et r constant.

ii) Sous les conditions du i), on a résolution simultanée *forte* si, et seulement si, on a en outre la multiplicité $e(X_t, \sigma(t))$ constante.

Preuve: (de la remarque) i) On suppose donc que $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ est une normalisation en famille, et que $r(X_t, \sigma(t))$ est constant. On remarque que le nombre de branches analytiques $r(X_t, \sigma(t))$ égale $n^{-1}(\sigma(t))$ car, par hypothèse, $n : \tilde{X}_t \rightarrow X_t$ est la normalisation de la courbe X_t .

On considère alors la restriction $\tilde{f} : n^{-1}(\sigma(\mathbb{D})) \rightarrow \mathbb{D}$ qui est propre (à cause de la trivialité de $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{D}$ qui implique que le bord de $n^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))$ n'est autre que l'intersection de $n^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))$ avec le bord de \tilde{X}) et à fibres finies, donc c'est un morphisme fini d'espaces analytiques, en particulier un revêtement ramifié (cf. [Gu] C).

La constance du cardinal des fibres donne alors que l'application holomorphe $|\tilde{f}| : |n^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))| \rightarrow \mathbb{D}$ est un vrai revêtement (non ramifié), et comme \mathbb{D} est simplement connexe, ce revêtement est topologiquement trivial i.e. on a un *homéomorphisme* :

$$|n^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))| \simeq \mathbb{D} \times |n^{-1}(\sigma(0))|. \quad (3.3)$$

L'unicité de la structure d'espace analytique réduit sur l'espace total d'un revêtement holomorphe d'un espace analytique réduit donne alors que l'isomorphisme (3.3) est analytique.

ii) On utilise la formulation sous forme de paramétrisation en famille

$$n : \mathbb{D} \times \sqcup_{j=1}^r (\mathbb{C}_j, 0) \rightarrow \mathbb{D} \times (\mathbb{C}^N, 0),$$

donnée à la remarque 3.1.13. Notons X^j la composante irréductible de X image de $n_j : \mathbb{D} \times (\mathbb{C}_j, 0) \rightarrow \mathbb{D} \times (\mathbb{C}^N, 0)$, (pour $j = 1, \dots, r$).

Comme la multiplicité $e(X_t, \sigma(t))$ des fibres X_t est constante par hypothèse, et

$$e(X_t, \sigma(t)) = \sum_{j=1}^r e(X_t^j, \sigma(t)),$$

la somme des multiplicités de chaque branche, par semi-continuité de la multiplicité, on en déduit la constance de la multiplicité de chaque branche :

$$e(X_t^j, \sigma(t)) = m_j, \quad \forall t \in \mathbb{D}.$$

Par ailleurs l'image réciproque de $\mathbb{D} \times \{0\}$ par n_j est définie par l'idéal de $\mathbb{C}\{t, t_j\}$ engendré par $z_1(t, t_j), \dots, z_N(t, t_j)$. La multiplicité étant constante égale à m_j , cet idéal est $t_j^{m_j}$. \square

Le lecteur trouvera dans [RES] § 3.2 une présentation du nombre de Milnor des courbes complexes réduites défini par Buchweitz et Greuel dans [B-G]. On rappelle seulement leur théorème principal (cité aussi dans [RES] thm. 3.5):

Théorème 3.1.16. *Si $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ est un bon représentant d'une famille plate de courbes réduites, (cf. déf. 3.1.7), alors pour chaque $t \in \mathbb{D}$:*

- i) X_t est connexe,
- ii) $\mu(X_0, \mathcal{O}) - \mu(X_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X_t, \mathbb{C})$,
- iii) $\mu(X_0, \mathcal{O}) - \mu(X_t) \geq \delta(X_0, \mathcal{O}) - \delta(X_t) \geq 0$,

où les nombres $\delta(C_t)$ et $\mu(C_t)$ sont les sommes de ces invariants sur tous les points singuliers de C_t .

Ce théorème principal de [B-G] a pour corollaire le critère de résolution simultanée suivant (cf. [B-G] Thm. 5.2.2 pour d'autres conditions équivalentes) :

Théorème 3.1.17. *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{D}$ un bon représentant d'une famille plate de courbe réduites, avec une section $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow X$ telle que $X_t - \sigma(t)$ est lisse pour tout $t \in \mathbb{D}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\mu(X_t, \sigma(t))$ est constant pour $t \in \mathbb{D}$,
- ii) $\delta(X_t, \sigma(t))$ et $r(X_t, \sigma(t))$ sont constants pour $t \in \mathbb{D}$,
- iii) f admet une résolution simultanée faible.

Preuve: On a déjà montré à la rem. 3.1.15 i), que les conditions ii) et iii) sont équivalentes. La relation :

$$\mu = 2\delta - r + 1,$$

rappelée dans [RES] § 3.2.1. montre que ii) implique i). Enfin l'implication i) \Rightarrow ii) est donnée par le théorème 3.1.16 iii). \square

3.2 Directions exceptionnelles, éléments généraux

3.2.1 Définitions

La définition suivante et la caractérisation qui suit généralisent la caractérisation des *tangentes exceptionnelles* de [Sn2] (5.8) :

Définition 3.2.1. Soit (S, \mathcal{O}) un germe de surface normale, I un idéal m -primaire de $\mathcal{O}_{S, \mathcal{O}}$, et S_I (resp. $\overline{S_I}$) l'éclatement de I dans (S, \mathcal{O}) (resp. l'éclatement normalisé).

On note \mathcal{E} (resp. \mathcal{D}) la courbe exceptionnelle réduite sur S_I (resp. $\overline{S_I}$).

Un point $p \in \mathcal{E}$ sera appelé *direction exceptionnelle pour I* , s'il est image par la normalisation n d'un point singulier de $\overline{S_I}$, ou d'un point singulier de \mathcal{D} , ou d'un point critique de la restriction de n à la partie lisse de \mathcal{D} .

Scholie. i) Pour $I = m$ on retrouve exactement la caractérisation des *tangentes exceptionnelles* données dans [Sn-2], thm. 5.8. La notion de tangente exceptionnelle à un germe (X, O) d'espace analytique est reliée à la description de l'ensemble des limites en O d'hyperplans tangents à X : elle a été introduite dans [He-Lê] pour décrire les limites de plans tangents à une singularité isolée de surface de \mathbb{C}^3 , puis étendue au cas non isolé dans [Lê-81], et [Lê-Te-79]. Une théorie générale pour les limites d'espaces tangents sur un espace analytique quelconque est développée dans [Lê-Te-88].

ii) Pour le cas d'un idéal m -primaire quelconque de l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ les conditions énumérées dans la définition précédente interviennent dans l'étude de l'équisingularité des pinceaux de courbes planes faite dans [Lê-We-1].

Dans la proposition qui suit, on utilise la notion d'élément v -superficiel étudiée au chapitre 2; par commodité on fait le rappel suivant :

Rappel 3.2.2. • A la proposition 2.3.18, on a caractérisé géométriquement les s -uplets définissant une *réduction minimale* d'un idéal I , que l'on a appelé, à cause de cette caractérisation, *bon s -uplets d'éléments v^0 -superficiels* de I .

• Dans le cas particulier des idéaux m -primaires, les notions d'éléments v^0 -superficiels et v -superficiels coïncident, et si d est la dimension de l'anneau considéré, un d -uplet (f_1, \dots, f_d) définissant une réduction minimale d'un idéal m -primaire est appelé simplement *bon d -uplet d'éléments v -superficiels* de I (cf. cor. 2.3.21 ii)).

• Dans le cadre qui est le nôtre ici, qui est celui d'un anneau local de surface, $d = 2$ et on parlera donc de *bon couple (f, g) d'éléments v -superficiels* pour un idéal I , m -primaire dans $\mathcal{O}_{S, O}$.

D'après le § 3.1.1, pour un idéal $J = (f, g)$ m -primaire dans $\mathcal{O}_{S, O}$, la fraction rationnelle f/g définit un morphisme de $S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (où S_J est l'éclatement de J dans (S, O)), que l'on considère comme une famille de courbes (avec section) sur S_J (cf. déf. 3.1.4) et on utilise la notion de *résolution simultanée faible* (cf. déf. 3.1.14) pour formuler (avec les notations de la déf. 3.2.1) :

Proposition 3.2.3. *Un point $p \in \mathcal{E}$ est une direction exceptionnelle pour I si, et seulement si, pour tout bon couple (f, g) d'éléments v -superficiels de I (cf. le rappel 3.2.2), en notant J l'idéal (f, g) , la famille de courbes sur S_J définie par les fibres de f/g n'admet pas de résolution simultanée faible au voisinage du point image $\varphi(p)$ de p par l'application $\varphi : S_I \rightarrow S_J$ définie à la proposition 2.3.8.*

Preuve: Sens \Rightarrow : on suppose que p est une direction exceptionnelle pour I , et on se donne un bon couple (f, g) (quelconque) d'éléments v -superficiels pour I . On note $q = \varphi(p)$ le point image de p sur S_J avec $J = (f, g)$. On sait que f/g définit un morphisme de $S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ et on note \mathcal{C}'_t les courbes $(f/g)^{-1}(t) \subset S_J$. On note \mathcal{C}'_{t_0} la courbe passant par q . Il s'agit de montrer que la famille (\mathcal{C}'_t) n'admet pas de résolution simultanée faible dans un petit voisinage \mathbb{D} de t_0 .

On rappelle que le morphisme φ étant *fini*, les deux surfaces S_J et S_I ont la même normalisation, et qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overline{S_I} & & \\ \downarrow n & \searrow n_J & \\ S_I & \xrightarrow{\varphi} & S_J \supset \mathcal{C}'_t \end{array} \quad (3.4)$$

Pour plus de clarté, on fait apparaître sur le diagramme suivant les notations des points et

diviseurs considérés :

$$\begin{array}{ccc} p_s \in \mathcal{D} \subset \overline{S_I} & & \\ \downarrow n & \searrow n_J & \\ p \in \mathcal{E}_I \subset S_I & \xrightarrow{\varphi} & q \in \mathcal{E}_J \subset S_J \end{array}$$

i) Si p est image par la normalisation n d'un point singulier p_s de $\overline{S_I}$, alors la préimage $n_J^{-1}(\mathcal{C}'_{t_0}) \ni p_s$ (où \mathcal{C}'_{t_0} est un diviseur de Cartier sur S_J , d'après le cor. 3.1.3 ii)) est un diviseur de Cartier sur $\overline{S_I}$, passant par le point singulier p_s , et donc nécessairement une courbe singulière. Donc la famille (\mathcal{C}'_t) n'admet pas de *normalisation en famille* au voisinage de t_0 .

ii) Si p est l'image par la normalisation n d'un point singulier p_s du diviseur exceptionnel réduit \mathcal{D} de $\overline{S_I}$, alors le germe singulier :

$$(|n_J^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))|_{,p_s}) \simeq (\mathcal{D}, p_s),$$

ne peut pas être isomorphe au germe en un point de l'espace lisse $\mathbb{D} \times |n_J^{-1}(q)|$.

iii) Si p est l'image par la normalisation n d'un point critique p_s de la restriction de n à la partie lisse de \mathbb{D} , alors par composition (des différentielles) p_s est aussi un point critique de la restriction à \mathbb{D} de l'application $n_J = \varphi \circ n$, ce qui est en contradiction avec l'isomorphisme analytique :

$$|n_J^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))| \simeq \mathbb{D} \times |n_J^{-1}(q)|. \quad (3.5)$$

au-dessus de $\sigma(\mathbb{D})$.

Sens \Leftarrow : On suppose que p n'est pas une direction exceptionnelle pour I , il s'agit de construire un bon couple (f, g) d'éléments v -superficiels de I pour lequel la famille \mathcal{C}_t admet une résolution simultanée faible au voisinage de $q = \varphi(p)$. En réalité, on va donner un résultat plus précis, dans la proposition 3.2.6, qui fournit des familles *génériques* de (f, g) qui conviennent. On renvoie donc à cette proposition pour achever la preuve. \square

Éléments H -généraux d'un idéal

La définition suivante est une sorte de maturation des formulations de [Lê-Te-79], [GS], [Sn-2] :

Définition 3.2.4. Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local $\mathcal{O}_{S, \mathcal{O}}$ de surface normale. On note S_I l'éclatement de I dans S et \mathcal{E} le diviseur exceptionnel réduit de cet éclatement.

On rappelle (cf. § 1.1.2 et § 1.1.4) qu'en fixant des générateurs (h_0, \dots, h_r) de I , on détermine un plongement de S_I dans $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$, qui induit un plongement de \mathcal{E} dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$, et qu'on peut associer de manière unique à tout élément $f \in I - mI$, qui s'écrit $f = \sum_{i=0}^r a_i h_i$ un hyperplan $H_f^0 : \sum_{i=0}^r a_i(0) X_i$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$, avec la propriété que la section $H_f^0 \cap \mathcal{E}$ coïncide ensemblistement avec l'intersection de la transformée faible de f sur S_I avec le diviseur exceptionnel (cf. loc. cit.).

On dira alors qu'un élément $f \in I - mI$ est *H -général*, si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) f est v -superficiel pour I (cf. déf. 2.1.1), i.e. l'hyperplan H_f^0 ne contient aucune composante irréductible du diviseur exceptionnel réduit \mathcal{E} ,
- ii) l'intersection $H_f^0 \cap \mathcal{E}$, qui est aussi (compte-tenu du i)) l'intersection de la transformée stricte de f sur S_I avec \mathcal{E} , ne contient aucune direction exceptionnelle de I (cf. déf. 3.2.1),

iii) dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$, l'hyperplan H_f^0 est transverse à chaque composante irréductible de la courbe \mathcal{E} .

(On remarque que toutes ces conditions ne dépendent que de l'hyperplan H_f^0 , d'où le choix de la dénomination H -général.)

Remarque 3.2.5. a) Si $f \in I$ est H -général, et $p \in H_f^0 \cap \mathcal{E}$ d'après la condition ii) ci-dessus et la déf. 3.2.1, p est une valeur *non critique* de la restriction de n à la partie lisse de \mathcal{D} , donc c'est un point *non singulier* de chaque branche de $\mathcal{E} = n(\mathcal{D})$ qui le contient.²

b) La condition du iii) ci-dessus signifie que H_f^0 ne contient aucune droite du cône tangent à \mathcal{E} en p .

c) Puisque l'intersection $\mathcal{E} \cap (f)'$ de la transformée stricte d'un élément H -général sur S_I avec le diviseur exceptionnel \mathcal{E} coïncide avec l'intersection $\mathcal{E} \cap H_f^0$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$, la géométrie projective élémentaire (cf. e.g. [Sha] I.6) assure que H_f^0 (et donc $(f)'$) *intersecte chaque composante irréductible de \mathcal{E}* .

La proposition suivante exhibe des familles des couples (f, g) donnant la condition suffisante dans la proposition 3.2.3 :

Proposition 3.2.6. *Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local de surface normale $\mathcal{O}_{S, \mathcal{O}}$. Si $f \in I$ est H -général, pour tout g v -superficiel dans I tel que $J = (f, g)$ vérifie $\overline{J} = \overline{I}$, le morphisme $f/g : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ admet une résolution simultanée faible au voisinage de $(f/g)^{-1}([0 : 1]) = f^{-1}(0)$.*

Remarque 3.2.7. En particulier pour chaque point d'intersection p de la transformée stricte $(f)'$ de f sur S_I avec le diviseur exceptionnel \mathcal{E} , la transformée $n^{-1}((f)')$ sur l'éclatement normalisé \overline{S}_I est formée de courbes lisses transverses au diviseur exceptionnel \mathcal{D} en chaque point $q_i \in n^{-1}(p)$.

Preuve: (de la proposition)

a) On utilise les notations du diagramme (3.4). On note encore q le point du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_J de S_J où passe $(f/g)^{-1}(0)$. Soit p_s un point de \overline{S}_I tel que $n_J(p_s) = q$.

Alors pour $p = n(p_s)$, comme f est H -général, p n'est pas une direction exceptionnelle pour I , donc (déf. 3.2.1) p_s est en particulier un point lisse de \overline{S}_I et de \mathcal{D} .

b) Pour montrer que $f/g : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ admet une résolution simultanée faible au voisinage de $0 = [0 : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, il est équivalent, d'après la remarque 3.1.15 i), de montrer les deux propriétés suivantes :

- i) f/g admet une normalisation en famille au voisinage de 0,
- ii) le nombre de branches de la courbe $(f/g)^{-1}(0)$ est le même que celui de $(f/g)^{-1}(\varepsilon)$ pour ε voisin de 0.

D'après le corollaire 3.1.12, le i) est encore équivalent à la propriété :

- i') $(f/g) \circ n_J : \overline{S}_I \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est une submersion analytique au voisinage des points $p_s \in (n_J)^{-1}(q)$.

Comme on sait déjà (cf. a)) que les points p_s sont des points lisses de \overline{S}_I et \mathcal{D} , le i') est à son tour équivalent au :

- i'') les points p_s sont des points non critiques de la restriction de $(f/g) \circ n_J$ au diviseur exceptionnel \mathcal{D} .

² En revanche, il est *a priori* possible que par p passent plusieurs branches lisses de \mathcal{E} , mais je ne connais aucun exemple de ce phénomène, cf. aussi [Sn-2] rem. 5.10.

Enfin, comme $n_J = \varphi \circ n$, et que par hypothèse $n : (\mathcal{D}, p_s) \rightarrow (\mathcal{E}, p)$ n'est pas critique, le i''') est encore équivalent à :

i''') les points $p \in \varphi^{-1}(q)$ sont des points non critiques de la restriction de $(f/g) \circ \varphi$ au diviseur exceptionnel \mathcal{E} .

c) Explicitation de l'application $(f/g) \circ \varphi$:

En ayant choisi des générateurs (h_0, \dots, h_r) de I et en écrivant $f = \sum_{i=0}^r a_i h_i$ et $g = \sum_{i=0}^r b_i h_i$, avec $a_i, b_j \in \mathcal{O}_{S, \mathcal{O}}$, comme f et g sont par hypothèse des éléments d'ordre 1 de I (i.e. dans $I - I^2$) on associe de manière unique à f et g les hyperplans :

$$H_f^0 : \sum_{i=0}^r a_i(0)X_i, \quad H_g^0 : \sum_{i=0}^r b_i(0)X_i,$$

dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$.

Le morphisme $\varphi : |\mathcal{E}_I| \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r \rightarrow |\mathcal{E}_J| \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ a été décrit au chapitre 2, p. 69, comme la restriction de l'application :

$$\begin{aligned} \Phi^0 : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r \setminus (H_f^0 \cap H_g^0) &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, \\ (x_0 : \dots : x_r) &\rightarrow \left[\sum_{i=0}^r a_i(0)x_i : \sum_{i=0}^r b_i(0)x_i \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le fait que cette application soit bien définie sur \mathcal{E}_I est donné par le fait que (f, g) est un bon couple d'éléments v -superficiels de I (cf. prop. 2.3.12).

En outre, par construction de l'éclatement S_J (cf. § 3.1.1), l'application $f/g : \mathcal{E}_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ coïncide avec l'isomorphisme $\mathcal{E}_J \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ associé au plongement de $S_J \subset S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Ainsi pour montrer le i''') du b), il s'agit seulement d'étudier les points critiques de l'application φ restriction à \mathcal{E}_I de l'application Φ^0 définie au (3.6).

En reprenant les notations du a) le point $p \in \mathcal{E}_I \cap H_f^0$ sera un point critique de la restriction à \mathcal{E}_I de la projection Φ^0 si, et seulement si, le noyau de la projection en ce point, i.e l'hyperplan H_f^0 , n'est pas transverse à \mathcal{E}_I . Aussi l'hypothèse f H -transverse donne bien le i''').

d) Il reste à montrer le ii) du b) : il s'agit de montrer que pour un point q' voisin de q sur \mathcal{E}_J le nombre de points dans $n_J^{-1}(q')$ est le même que le nombre de points dans $n_J^{-1}(q)$.

Or pour q comme q' le nombre de points de $\varphi^{-1}(q)$ (resp. q') égale le nombre de points d'intersection de H_f^0 avec \mathcal{E} (resp. du $H_{f+\lambda g}^0$ correspondant pour q'). Par transversalité (de H_f^0 et $H_{f+\lambda g}^0$), ce nombre de points égale le degré de la courbe projective \mathcal{E} pour q comme pour q' .

Ensuite, chaque point de $\varphi^{-1}(q)$ (resp. q') est une valeur non critique de la restriction de $n : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, donc ils ont tous le même nombre de préimages par n . D'où la conclusion par $n_J = \varphi \circ n$. \square

Éléments généraux d'un idéal

On a défini la notion d'élément H -général f d'un idéal I par une série de conditions sur f à vérifier sur l'éclatement S_I de I (et plus précisément sur l'hyperplan H_f^0 associé à f , cf. déf. 3.2.4).

On introduit maintenant la notion, plus faible, d'élément général d'un idéal I comme une série de conditions à vérifier sur l'éclatement normalisé \overline{S}_I de I . Avant cela on rappelle,

suivant le § 2.4.4, comment se traduisent les notions d'élément v -superficiel et de bon couple d'éléments v -superficiels d'un idéal I sur l'éclatement *normalisé*.

Rappel 3.2.8. Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local $\mathcal{O}_{S,O}$ de surface normale. On note $\bar{e}_I : \bar{S}_I \rightarrow S$ l'éclatement normalisé de I dans S , D_I le diviseur de Cartier défini par $I\mathcal{O}_{\bar{S}_I}$, et

$$(e_I)^*(f) = (f)'_{\bar{S}_I} + D_f,$$

la décomposition de la transformée totale de (f) sur \bar{S}_I en sa transformée stricte $(f)'_{\bar{S}_I}$ et sa composante exceptionnelle D_f (cf. (2.51)). Alors (cf. la prop. 2.4.13) :

i) un élément $f \in I$ est v -superficiel, si et seulement si, on a l'égalité :

$$D_f = D_I.$$

ii) un couple (f, g) d'éléments v -superficiels de I est un *bon couple d'éléments v -superficiels* de I si, et seulement si, les transformées strictes $(f)'_{\bar{S}_I}$ et $(g)'_{\bar{S}_I}$ ne s'intersectent pas sur \bar{S}_I .

Définition 3.2.9. Avec les mêmes notations qu'au rappel 3.2.8 ci-dessus, un élément $f \in I$ sera dit *général*, si et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :

i) f est v -superficiel dans I , i.e. $D_f = D_I$ (cf. le rappel ci-dessus),

ii) la transformée stricte $(f)'_{\bar{S}_I}$ est un multi-germe de courbes lisses transverses au diviseur exceptionnel $\mathcal{D} = |D_I|$ en des points lisses de \mathcal{D} et \bar{S}_I .

Remarque 3.2.10. Si $f \in I$ est H -général (déf. 3.2.4), alors f est *général* au sens de la définition ci-dessus.

Preuve: Le i) des deux déf. est commun : f est v -superficiel.

Si f est H -général, la rem. 3.2.7 donne en particulier que le ii) de la déf. ci-dessus est vérifié. (Noter que la remarque en question donne en fait un résultat plus précis, qui nous sera utile, voir notamment la preuve de la prop. 3.2.18 infra). \square

L'intérêt de la définition 3.2.9 des éléments généraux d'un idéal comme une condition portant seulement sur l'éclatement normalisé est qu'elle relie tous les idéaux ayant même clôture intégrale :

Proposition 3.2.11. Soit $\mathcal{O}_{S,O}$ l'anneau local d'un germe de surface normale (S, O) . Soient $J \subset I$ deux idéaux de $\mathcal{O}_{S,O}$ ayant même clôture intégrale $\bar{I} = \bar{J}$ (cf. déf. 2.3.1).

Alors si $f \in J$, f est un élément général de J si, et seulement si, f est un élément général de I (cf. déf. 3.2.9).

Preuve: D'après le cor. 2.4.11 iv), l'égalité $\bar{I} = \bar{J}$ signifie que les éclatements normalisés $\bar{e}_I : \bar{S}_I \rightarrow (S, O)$ et $\bar{e}_J : \bar{S}_J \rightarrow (S, O)$ sont isomorphes. Ainsi les vérifications des propriétés des éléments généraux de I sur \bar{S}_I et de J sur \bar{S}_J sont équivalentes. \square

3.2.2 Éléments généraux vus dans une résolution

Cycles sur une résolution

Définition 3.2.12. Soit (S, O) un germe à singularité isolée, et considérons $\pi : X \rightarrow (S, O)$ une résolution de la singularité (S, O) (cf. e.g. [RES] § 0.2). On note :

$$|\pi^{-1}(0)| = \bigcup_{i=1}^s E_i,$$

la décomposition en composantes irréductibles du diviseur exceptionnel réduit. On appellera *cycles sur la résolution* X les diviseurs (de Weil) de X à supports exceptionnels i.e les combinaisons linéaires à coefficients entiers $Z = \sum_{i=0}^s a_i E_i$.

I-résolutions et bonnes résolutions

On introduit ici une terminologie pratique et on rappelle une terminologie usuelle sur les résolutions des singularités :

Définition 3.2.13.

i) Si I est un idéal de $\mathcal{O}_{S,O}$, une résolution $\pi : X \rightarrow (S,O)$ de la singularité (S,O) sera appelée une *I-résolution* si, en notant $\overline{e}_I : \overline{S}_I \rightarrow S$ l'éclatement normalisé de I , il existe un morphisme (automatiquement propre) $r : X \rightarrow \overline{S}_I$ tel que π se factorise en

$$\pi = \overline{e}_I \circ r : X \rightarrow \overline{S}_I \rightarrow S.$$

ii) D'après la propriété universelle de l'éclatement (rappelée à la prop. 1.1.4), $\pi : X \rightarrow (S,O)$ est une *I-résolution* si, et seulement si, le faisceau $I\mathcal{O}_X$ est *invertible*.

iii) On rappelle aussi qu'une résolution (quelconque) $\pi : X \rightarrow (S,O)$ est appelée une *bonne résolution* de (S,O) si le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est à *croisements normaux*.

Éléments généraux

On introduit d'abord une notation pratique pour parler des transformées strictes dans différents espaces :

Notation 3.2.14. Si $f \in I$ est un élément d'un idéal I de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,O}$ d'un germe de surface normale (S,O) , si S_I est l'éclaté de (S,O) en I , $n : \overline{S}_I \rightarrow S_I$ est la normalisation de S_I , et $r : X \rightarrow \overline{S}_I$ est un espace au-dessus de \overline{S}_I , on notera :

- $(f)'_{S_I}$ la transformée stricte de (f) sur S_I (cf. déf. 1.1.13),
- $(f)'_{\overline{S}_I} = n^{-1}((f)'_{S_I})$ la transformée stricte de (f) sur \overline{S}_I ,
- et de manière générale $(f)'_X$ la transformée stricte de (f) sur X (cf. déf. 1.1.13, où la notion de transformée stricte a été donnée pour toute modification).

Le lecteur prendra garde que cette notation ne signifie bien sûr pas que ces transformées strictes soient des diviseurs de Cartier (il ne s'agit pas du diviseur défini par une fonction $(f)'$!).

La proposition suivante est la traduction de la définition 3.2.9 sur une résolution quelconque au-dessus de \overline{S}_I :

Proposition 3.2.15. *Soient (S,O) un germe de surface normale, I un idéal m -primaire de $\mathcal{O}_{S,O}$ et, suivant la déf. 3.2.13, $\pi : X \rightarrow (S,O)$ une bonne *I*-résolution. Soit $f \in I$ et notons :*

$$\pi^*(f) = (f)'_X + Z_f,$$

la décomposition de la transformée totale sur X du diviseur (f) en sa transformée stricte $(f)'_X$ et sa composante exceptionnelle Z_f .

On note aussi Z_I le cycle à support exceptionnel défini par l'idéal $I\mathcal{O}_X$, de sorte qu'on a toujours $Z_f \geq Z_I$ pour $f \in I$.

Alors $f \in I$ est un élément général (déf. 3.2.9) si, et seulement si,

- i) $Z_f = Z_I$ sur X ,
- ii) *la transformée stricte $(f)'_X$ est un multi-germe de courbes lisses, et la transformée totale $\pi^*(f)$ est un diviseur à croisements normaux.*

Preuve: Par hypothèse X est une I -résolution de (S, O) , c'est-à-dire que c'est une résolution $r : X \rightarrow \overline{S}_I$ des singularités de \overline{S}_I , et comme c'est une bonne résolution, c'est aussi une résolution plongée du diviseur exceptionnel \mathcal{D} de \overline{S}_I .

Aussi, r est un isomorphisme local au voisinage des points non-singuliers à la fois sur \overline{S}_I et \mathcal{D} .

Ainsi, si on suppose que $f \in I$ est général, d'après la propriété ii) de la déf. 3.2.9, r est un isomorphisme au voisinage de tous les points de $(f)'_{\overline{S}_I}$, ce qui donne la propriété ii) ci-dessus de la transformée stricte $(f)'_X$ de (f) sur X et de sa transformée totale $\pi^*(f)$.

Les propriétés i) et ii) des éléments généraux donnent également la propriété i) ci-dessus : en effet, dans la décomposition (où on utilise $D_f = D_I$) :

$$\pi^*(f) = r^*((f)'_{\overline{S}_I} + D_I) = r^*((f)'_{\overline{S}_I}) + r^*(D_I), \quad (3.7)$$

on a par définition $r^*(D_I) = Z_I$. Comme on a vu que $(f)'_{\overline{S}_I}$ ne contient aucun point modifié par r , on a l'égalité :

$$r^*((f)'_{\overline{S}_I}) = (f)'_X,$$

ce qui, via (3.7), donne l'égalité des cycles $Z_f = Z_I$ sur X , i.e. le i).

Réciproquement, supposons que f vérifie les propriétés i) et ii) de la proposition.

Il est clair que $Z_f = Z_I$ sur X implique $D_f = D_I$ sur \overline{S}_I par projection, i.e. la propriété i) des éléments généraux.

Supposons que la propriété ii) des éléments généraux n'est pas vérifiée. Alors il existe un point $p \in (f)'_{\overline{S}_I} \cap \mathcal{D}$ au voisinage duquel $r : X \rightarrow \overline{S}_I$ n'est pas un isomorphisme local. D'après le théorème principal de Zariski (cf. e.g. [Fi] 4.9) appliqué au germe de surface normale (\overline{S}_I, p) , on a (localement au voisinage de p) une écriture : $r^*(f)' = (f)'_X + E$ où E est un cycle positif non nul sur $\pi^{-1}(0)$, ce qui implique, en revenant à l'écriture globale de $\pi^*(f)$ que $Z_f \geq Z_I + E$, et contredit le i) de l'hypothèse. \square

3.2.3 Éléments généraux et composantes de Tyurina

Cadre standard pour les intersections

Avertissement. On rappelle dans ce paragraphe le cadre standard de théorie de l'intersection qui sera suffisant pour nos besoins, *puisque'on intersectera toujours ici des diviseurs de Cartier avec des diviseurs de Weil*. On rappelle que ce cadre s'applique aussi bien sur les espaces singuliers.

On veut ainsi lever une ambiguïté en ce sens qu'on dispose *pour le cas particulier des surfaces normales* d'un nombre d'intersection plus général défini pour *deux diviseurs de Weil* à partir de leurs pull-back sur une résolution, à valeur dans \mathbb{Q} , introduit par D. Mumford dans [Mum-1] (cf. aussi [Gi], [Fu] Ex. 7.1.16). On n'utilisera pas cette théorie ici (*pas plus qu'elle n'était utile dans [Sn-1] où elle était invoquée cf. thm. 3.5 loc. cit.*).

Le cadre habituel de la théorie de l'intersection sur les espaces algébriques (cf. [Fu] Chap. 2) permet de définir l'intersection d'un diviseur de Cartier et d'un diviseur de Weil (ou plus généralement d'un cycle au sens de [Fu] Chap. 1) comme une *classe d'équivalence linéaire* (ou rationnelle pour les cycles) de diviseurs de Weil (cf. [Fu] 2.3).

Suivant [Fu] 19.2.5. cette construction s'adapte aux espaces analytiques, et on l'utilisera ici dans le cadre suivant :

Si X est une surface analytique, D est un diviseur de Cartier sur X , et C un diviseur de Weil, on peut définir l'intersection $D.C$ comme une classe d'équivalence linéaire de diviseurs de Weil sur C .

Dans ce cadre, on rappelle la :

Définition 3.2.16. Si C est (une courbe) compacte, on appellera *nombre d'intersection de D et C* , et on notera :

$$(D \cdot C) := \deg(D.C),$$

le degré de la classe $D.C$ (somme des multiplicités, cf. [Fu] déf. 1.4).³

Si $r : X \rightarrow \Sigma$ est un morphisme propre entre deux surfaces analytiques, C est un diviseur de Weil de X , et D est un diviseur de Cartier sur Σ , on a la formule de projection ([Fu] prop. 2.3.c) :

$$r_*(r^*(D).C) = D.r_*(C), \quad \text{égalité de cl. d'équiv. lin. sur } |C| \cap |D|. \quad (3.8)$$

Si C est compact, on peut passer aux degrés dans (3.8) et si r est un morphisme de degré 1 (i.e birationnel, resp. biméromorphe) :

$$\deg(r_*(r^*(D).C)) = \deg(r^*(D).C),$$

d'où l'on déduit l'égalité des nombres d'intersection (cf. déf. 3.2.16) :

$$(r^*(D) \cdot C) = (D \cdot r_*(C)). \quad (3.9)$$

Composantes de Tyurina

Soit I un idéal m -primaire de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,O}$ d'un germe de surface normale (S,O) .

Soient $\pi : X \rightarrow (S,O)$ une I -résolution de (S,O) (cf. déf. 3.2.13), et Z_I le diviseur défini par $I.\mathcal{O}_X$. Notons

$$|Z_I| = |\pi^{-1}(0)| = \bigcup_{i=1}^n E_i,$$

la décomposition en composantes irréductibles du diviseur exceptionnel.

Définition 3.2.17. Une composante E_i du diviseur exceptionnel de π qui vérifie :

$$(Z_I \cdot E_i) = 0,$$

où (\cdot) est le nombre d'intersection de la déf. 3.2.16, sera appelée *composante de Tyurina* pour Z_I .

On a alors le résultat suivant, qui reprend [C-P-R] (lem. 2.4) dans le cadre plus général des surfaces normales :

Proposition 3.2.18. *Soit (S,O) un germe de surface normale et I un idéal m -primaire de $\mathcal{O}_{S,O}$. Soit $r : X \rightarrow \overline{S_I}$ une résolution de l'éclatement normalisé $\overline{S_I}$ de I dans (S,O) . Une composante irréductible E du diviseur Z_I défini par $I.\mathcal{O}_X$ se contracte par r sur un point de $\overline{S_I}$ si, et seulement si, c'est une composante de Tyurina, i.e. $(Z_I \cdot E_i) = 0$.*

Preuve: La nécessité de la condition est une conséquence directe de la formule de projection rappelée au (3.9): en effet si on note D_I le diviseur de Cartier sur $\overline{S_I}$ défini par $I.\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$, on a l'égalité :

$$(Z_I \cdot E_i) = (r^*(D_I) \cdot r(E_i)) = 0,$$

puisque $r(E_i)$ est un point de $\overline{S_I}$.

Réciproquement, si E n'est pas contracté sur un point de $\overline{S_I}$ son image par r est une composante irréductible D du diviseur exceptionnel \mathcal{D} de $\overline{S_I}$. D'après la rem. 3.2.7, pour

3. Bien noter que $D.C$ désigne une classe de diviseurs, alors que $(D \cdot C)$ désigne un nombre.

un élément H -général f de I (cf. déf. 3.2.4), sa transformée stricte $(f)_{\overline{S_I}}'$ intersecte *chaque* composante du diviseur exceptionnel \mathcal{D} , en particulier la composante $D = r(E)$ considérée ici.⁴

Comme en outre r est un isomorphisme aux voisinages des points de $(f)_{\overline{S_I}}' \cap \mathcal{D}$ (car ce sont des points lisses de \mathcal{D} et $\overline{S_I}$), on en déduit que $(f)'_X \cap E$ est non vide.

Sur X lisse, on en déduit que la multiplicité d'intersection $((f)'_X \cdot E)$ est strictement positive.

Il suffit alors de remarquer que : $(\pi^*(f) \cdot E) = 0$ d'après la formule de projection (3.8) appliquée à la composée $\pi = e_I \circ r : X \rightarrow (S, O)$, et comme d'après la prop. 3.2.15 ii) : $\pi^*(f) = (f)'_X + Z_I$, on obtient :

$$(Z_I \cdot E) = -((f)'_X \cdot E) < 0. \quad \square$$

3.3 Éléments généraux et nombre de Milnor

3.3.1 Calcul du nombre de Milnor d'un élément général

Cycle numériquement canonique

On rappelle le résultat classique suivant pour les cycles sur le diviseur exceptionnel d'une surface normale (cf. [Fu] Ex. 2.4.4, ou [Mum-1]) :

Lemme 3.3.1. *Si $\pi : X \rightarrow (S, O)$ est une résolution d'un germe de surface normale, le produit d'intersection (\cdot) des cycles sur $\pi^{-1}(0)$ (cf. déf. 3.2.12 et § 3.2.3) est défini négatif, i.e. $(Z \cdot Z) < 0$ pour tout cycle Z non nul.*

Le lemme précédent implique qu'on peut définir (de manière unique) un cycle Z (en général à coefficients dans \mathbb{Q}) en fixant la valeur des intersections $(Z \cdot E_i)$ avec toutes les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0)$. En particulier, on introduit la définition suivante :

Définition 3.3.2. Soit $\pi : X \rightarrow (S, O)$ une résolution d'un germe de surface normale, et

$$|\pi^{-1}(O)| = \bigcup_{i=1}^s E_i,$$

la décomposition du diviseur exceptionnel en composantes irréductibles. On appelle *cycle numériquement canonique* de la résolution π , et on notera Z_K , le cycle à coefficients rationnels $Z_K = \sum_{i=1}^r r_i E_i$, ($r_i \in \mathbb{Q}$) défini par les conditions :

$$\forall i = 1, \dots, r \quad (Z_K \cdot E_i) = -(E_i \cdot E_i) + 2p(E_i) - 2, \quad (3.10)$$

où $p(E_i)$ est le *genre arithmétique* de la courbe réduite, irréductible E_i (cf. e.g. [Har] Chap. V 3.9.2, 3.9.3).

Formule donnant le nombre de Milnor

On généralise ici au cas d'un idéal m -primaire quelconque une formule obtenue par G. Gonzalez-Sprinberg dans [GS] pour l'idéal maximal :

Théorème 3.3.3. *Soit $f \in I$ un élément général d'un idéal m -primaire I de l'anneau local $\mathcal{O}_{S, O}$ d'un germe de surface normale (S, O) . Soit encore $\pi : X \rightarrow (S, O)$ une bonne I -résolution de (S, O) (cf. déf. 3.2.13). La description de la transformée totale $\pi^*(f)$ donnée*

4. C'est l'intérêt de la définition des éléments H -généraux (déf. 3.2.4) par rapport à celle des éléments généraux (déf. 3.2.9).

à la prop. 3.2.15, et le théorème fondamental de [B-G] (thm. 3.1.16 ici) permettent de calculer le nombre de Milnor $\mu(f)$ de la courbe définie par $f^{-1}(0)$ sur (S, O) :

$$\mu(f) = 1 - (Z_I \cdot (Z_I - |Z_I| - K)), \quad (3.11)$$

où Z_I est le diviseur défini par $I \mathcal{O}_X$, $|Z_I|$ est le diviseur réduit associé, Z_K est le cycle numériquement canonique de π (cf. déf. 3.3.2), et (\cdot) désigne le nombre d'intersection (cf. déf. 3.2.16).

Démonstration. (Esquisse) La preuve est analogue à celle du théorème principal (thm. 2.2) de [GS], en remplaçant le lemme 2.1 loc. cit. par notre prop. 3.2.15.

On fixe un représentant S de (S, O) sur lequel O est le seul point singulier et tel que le germe f définisse une fonction sur S , $f : S \rightarrow \mathbb{D}$, où \mathbb{D} est un disque de \mathbb{C} centré en O .

Comme $f \in \mathcal{O}_{S, O}$ est non diviseur de zéro ($\mathcal{O}_{S, O}$ intègre), le morphisme $f : S \rightarrow \mathbb{D}$ est automatiquement plat (cf. [Fi] 3.16), on peut donc au sens du § 3.1.2, le considérer comme une déformation de la courbe $f^{-1}(0)$ et quitte à restreindre \mathbb{D} (et S), on peut supposer que le morphisme $f : S \rightarrow \mathbb{D}$ est un *bon représentant* de la déformation de $f^{-1}(0)$ (cf. déf. 3.1.7).

Alors d'après le thm. 3.1.16, le nombre de Milnor $\mu(f) := \mu(f^{-1}(0), O)$ recherché vérifie :

$$\mu(f) - \mu(f^{-1}(t)) = \dim H^1(f^{-1}(t), \mathbb{C}) = 1 - \chi(f^{-1}(t)), \quad t \neq 0, \quad (3.12)$$

où la première égalité est donnée par loc. cit. ii), et $\mu(f^{-1}(t))$ est la somme des nombres de Milnor aux points singuliers de $f^{-1}(t)$, et la seconde égalité est donnée par loc. cit. i), où, pour une courbe \mathcal{C} , on note :

$$\chi(\mathcal{C}) = \dim H^0(\mathcal{C}, \mathbb{C}) - \dim H^1(\mathcal{C}, \mathbb{C}),$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique. Comme $f^{-1}(t)$ est lisse, le membre de gauche de (3.12) est simplement $\mu(f)$.

En notant $\mathcal{C}_t = f^{-1}(t)$, on est donc ramené au calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{C}_t)$.

Si on note $\pi : X \rightarrow S$ une bonne I -résolution de S (cf. déf. 3.2.13), comme π est un isomorphisme au-dessus de $S - \{O\}$, on a :

$$\chi(\mathcal{C}_t) = \chi(\pi^{-1}(\mathcal{C}_t)).$$

Si on note \mathcal{P} l'ensemble des points d'intersections de toutes les composantes (compactes ou non) de la transformée totale $\pi^{-1}(f)$ sur X , compte-tenu du fait que cette transformée totale est un diviseur à croisements normaux, et que la partie compacte Z_f vérifie (cf. prop. 3.2.15) :

$$Z_f = Z_I = \sum_{i=1}^s m_i E_i,$$

un calcul facile de revêtements (cf. [GS] loc. cit.) montre que :

$$\chi(\pi^{-1}(\mathcal{C}_t)) = \sum_{i=1}^s m_i \chi(E_i \setminus (\mathcal{P} \cap E_i)).$$

De cette formule, il est facile de passer à l'expression en terme de multiplicités d'intersections donnée dans l'énoncé (3.11), exactement comme dans [GS], en remplaçant son « Z_0 » par notre Z_I . \square

3.3.2 Première caractérisation avec le nombre de Milnor

Des pincesaux aux idéaux

On commence par remarquer que pour les *pincesaux de courbes* (cf. § 3.1.1), si on a une résolution simultanée faible au voisinage d'une courbe du pinceau, cette courbe est un *élément général* de l'idéal définissant le pinceau :

Lemme 3.3.4. *Soit $J = (f, g)$ un idéal m -primaire de l'anneau local $\mathcal{O}_{S, O}$ d'un germe de surface normale (S, O) . On suppose que $f \in J$ est un élément v -superficiel de J (cf. e.g. le rappel 3.2.8).*

On note S_J l'éclatement de J dans (S, O) , et on considère comme au cor. 3.1.3, la famille de courbes définie par $f/g : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Si cette famille admet une résolution simultanée faible au voisinage du point $[0 : 1]$ (cf. déf. 3.1.14), alors l'élément f , correspondant à ce point, est un élément général de l'idéal J au sens de la déf. 3.2.9.

Preuve: Parmi les deux conditions de la définition 3.2.9 la condition i) : $f \in J$ est v -superficiel est donnée comme hypothèse ici, et la condition de transversalité ii) est donnée par l'isomorphisme :

$$|n^{-1}(\sigma(\mathbb{D}))| \simeq \mathbb{D} \times |n^{-1}(\sigma(0))|$$

de la définition 3.1.14. □

De ce lemme, et de la prop. 3.2.11, on déduit le résultat suivant (qui est une réciproque partielle de la prop. 3.2.6, partielle car on obtient f général, au lieu de H -général) :

Proposition 3.3.5. *Soit I un idéal m -primaire d'un anneau local $\mathcal{O}_{S, O}$ de surface normale et soit (f, g) un bon couple d'éléments v -superficiels de I tel que, en notant $J = (f, g)$ l'idéal engendré par f et g , la famille de courbes $f/g : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ admet une résolution simultanée faible au voisinage du point $0 = [0 : 1] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.*

Alors f est un élément général de I .

Preuve: Le lemme précédent donne que f est un élément général de J . Comme (f, g) est un bon couple d'éléments superficiels, on a $\overline{(f, g)} = \overline{I}$ (cf. le rappel 3.2.2) et d'après la prop. 3.2.11, on en déduit que f est aussi général dans I . □

Application à la caractérisation

Le théorème suivant est la première étape de la caractérisation des éléments généraux par le nombre de Milnor.

Théorème 3.3.6. *Soient I un idéal m -primaire de l'anneau local $\mathcal{O}_{S, O}$ d'un germe de surface normale (S, O) , et f un élément v -superficiel de I . Alors f est un élément général de I si, et seulement si, son nombre de Milnor $\mu(f) = \mu(f^{-1}(0), 0)$ coïncide avec le nombre de Milnor μ_I du thm. 3.3.3.*

Démonstration. D'après le thm. 3.3.3, la condition est nécessaire. Soit donc f élément v -superficiel de I tel que $\mu(f) = \mu_I$.

On peut choisir un élément $g \in I$ général tel que (f, g) soit un bon couple d'éléments v -superficiels pour I (cf. le rappel 3.2.2, on peut même choisir g H -général).

On note $J = (f, g)$ l'idéal engendré par f et g . Alors comme $\overline{J} = \overline{I}$ le nombre de Milnor associé à J par la formule (3.11) coïncide avec le nombre de Milnor μ_I . Comme on a pris $g \in I$ général on a pour tout $t \neq 0$ assez petit,

$$\mu(f + tg) = \mu_I,$$

et par hypothèse sur f , on a aussi $\mu(f) = \mu_I$. Ainsi la famille $f + tg$ est à μ constant au voisinage de $t = 0$, d'après le thm. 3.1.17, elle admet une résolution simultanée faible. La prop. 3.3.5 précédente donne alors que f est un élément général de I . \square

3.3.3 Caractérisation des éléments généraux par le nombre de Milnor

Le théorème 3.3.6 obtenu à la fin du paragraphe précédent, montre que $\mu(f) = \mu_I$ implique que $f \in I$ est général, à condition de supposer que $f \in I$ est v -superficiel. Le but de cette section (qui détaille le § 5 de la Note [B-L]) est de montrer le même résultat sans cette hypothèse c'est-à-dire de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.7. *Soit I un idéal m -primaire de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,O}$ d'un germe de surface normale, et f un élément de I . Alors $f \in I$ est un élément général (cf. déf. 3.2.9) si, et seulement si, son nombre de Milnor $\mu(f)$ coïncide avec le nombre de Milnor μ_I commun à tous les éléments généraux, donné au thm. 3.3.3.*

D'après le thm. 3.3.6, il suffit pour montrer le thm. 3.3.7, de montrer le théorème suivant :

Théorème 3.3.8. *Si $f \in I$ n'est pas v -superficiel dans I , alors $\mu(f) > \mu_I$.*

Avertissement. Dans tout ce qui suit, on fixe donc I un idéal m -primaire de $\mathcal{O}_{S,O}$, f un élément de I qui n'est pas v -superficiel, g un élément H -général de I (cf. déf. 3.2.4), et on choisit en outre g pour que la transformée stricte $(g)'_{S_I}$ de (g) sur l'éclatement S_I de I n'intersecte pas la transformée stricte de (f) (ce qui est toujours possible par construction des éléments H -généraux). Enfin on notera $J = (f, g)$ l'idéal engendré par f et g , et on supposera que g est aussi H -général dans J .

Existence de points bases

Le premier lemme-clef de la preuve du thm. 3.3.8 est le suivant :

Lemme 3.3.9. *Avec les hypothèses de l'avertissement ci-dessus, l'idéal J a au moins un point base (c'est-à-dire un point où $J\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$ est non principal) dans l'éclatement normalisé $\overline{S_I}$ de I .*

Démonstration.

a) En un point $P \in \overline{S_I}$, l'idéal $J\mathcal{O}_{\overline{S_I},P}$ peut a priori ne pas être principal pour deux raisons :

- i) ou bien il est divisoriel non principal,⁵
- ii) ou bien il n'est pas divisoriel ce qui est équivalent (dans $\mathcal{O}_{\overline{S_I},P}$ de dimension 2) à dire qu'il a une composante m -primaire.

Ici, le cas i) ne peut pas se produire. En effet, $J = (f, g)$ avec g élément H -général de I , en particulier v -superficiel, donc sur $\overline{S_I}$, on a l'égalité :

$$D_g = D_I,$$

entre la partie exceptionnelle D_g de la transformée totale de (g) sur $\overline{S_I}$ et le diviseur de Cartier D_I défini par $I\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$.

Or la composante divisorielle de $J\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$ est l'idéal définissant le diviseur $\min_{h \in J} D_h$, (où \min représente le diviseur avec la plus petite multiplicité sur chaque composante du diviseur exceptionnel). Comme $J \subset I$, pour tout $h \in J$, on a $D_h \geq D_I$ et on a vu que $D_g = D_I$.

⁵ i.e. dans $\mathcal{O}_{\overline{S_I},P}$ tous les idéaux premiers associés à $J\mathcal{O}_{\overline{S_I},P}$ sont de hauteur 1, mais au moins l'un d'entre eux n'est pas principal (i.e. cet idéal définit un diviseur de Weil, qui n'est pas de Cartier)

Ainsi $D_g = D_I$ est un diviseur de Cartier, et représente la composante divisorielle de $J\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$, ce qui exclut le cas i).

b) Donc les points bases éventuels de $J\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$ sont les points P tels que $J\mathcal{O}_{\overline{S_I},P}$ ait une composante m -primaire, ce qui est équivalent à ce que les transformées faibles (cf. § 2.4.4) :

$$(\alpha f + \beta g)^\# = (\overline{e_I})^*(\alpha f + \beta g) - D_I,$$

passent toutes par P .

Si on considère plutôt le pinceau de transformées faibles sur l'éclatement (*non normalisé*) S_I de I , c'est-à-dire les diviseurs sur S_I définis par :

$$(e_I)^*(\alpha f + \beta g) - \mathcal{E}_I,$$

où \mathcal{E}_I est le diviseur défini par $I\mathcal{O}_{S_I}$, et qu'on note $n : \overline{S_I} \rightarrow S_I$ la normalisation, on va montrer au c) qui suit qu'il est équivalent de montrer que $Q = n(P)$ est un point commun à toutes ces transformées faibles sur S_I .

c) En effet, il est clair que la condition du b) sur $\overline{S_I}$ implique celle sur S_I , on s'intéresse donc à la réciproque.

On rappelle d'abord que d'après le § 1.1.2, en fixant des générateurs (h_0, \dots, h_r) de l'idéal I , on associe à chaque élément $h \in I$ un hyperplan H_f^0 de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$ tel que, si $h \in I - I^2$ les points d'intersection de $(e_I)^*(h) - \mathcal{E}_I$ avec le diviseur exceptionnel $\mathcal{E} = |\mathcal{E}_I|$ coïncident avec les points de $H_f^0 \cap \mathcal{E}$.

Ainsi, ici, pour étudier les points d'intersection des transformées faibles $(e_I)^*(\alpha f + \beta g) - \mathcal{E}_I$ avec le diviseur exceptionnel $\mathcal{E} = |\mathcal{E}_I|$ de S_I , il est équivalent de considérer l'intersection avec \mathcal{E} du pinceau d'hyperplans :

$$H_{\alpha f + \beta g}^0 = \alpha H_f^0 + \beta H_g^0,$$

puisque'il est clair qu'on peut se limiter à α, β constants. Comme par hypothèse (cf. l'avertissement p. 107) les transformées strictes de f et g ne s'intersectent pas sur \mathcal{E} , l'intersection de H_f^0 avec H_g^0 ne sera non vide qu'en un point d'une composante de \mathcal{E} incluse dans la transformée faible de f i.e. incluse dans H_f^0 .

Soit donc Q un point d'une telle composante. Comme par hypothèse g est H -général, l'intersection de H_g^0 avec la composante E_Q de \mathcal{E} contenant Q est transverse, et on en déduit immédiatement aussi que pour les $\alpha H_f^0 + \beta H_g^0$ avec $\beta \neq 0$ l'intersection avec \mathcal{E} est aussi transverse, autrement dit que tous les $\alpha f + \beta g$ avec $\beta \neq 0$ sont des éléments H -généraux de I .

On déduit alors de la remarque 3.2.7, que tous les points $P_i \in n^{-1}(Q)$ sont des points des transformées (faibles = strictes, ensemblistement) de ces $\alpha f + \beta g$ ($\beta \neq 0$). Par ailleurs en notant D_i la composante exceptionnelle sur $\overline{S_I}$ contenant P_i , D_i est une composante de $n^{-1}(E_Q)$ et donc une composante de la transformée faible de (f) sur $\overline{S_I}$ (qui est définie comme $n^{-1}((f)^\#)$, si $(f)^\#$ désigne la transformée faible sur S_I).

On vient donc de montrer que *tous les points P_i au-dessus de Q* sont des points bases de J , c'est-à-dire qu'on a montré l'assertion du b).

d) Reste à dire qu'un tel point Q commun à toutes les transformées faibles sur S_I existe bien. Mais c'est direct avec le point de vue du c). Il s'agit de déterminer les points de \mathcal{E} communs à tous les $\alpha H_f^0 + \beta H_g^0$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Or d'après l'étude du c), on sait que ces points correspondent exactement aux points d'intersection de H_g^0 avec les composantes irréductibles de \mathcal{E} qui sont incluses dans H_f^0 . Ces points d'intersection existent puisque l'hyperplan projectif H_g^0 rencontre chaque composante irréductible de la courbe \mathcal{E} . \square

Remarque 3.3.10. Dans la preuve du lemme précédent, on a montré bien plus que le résultat annoncé dans le lemme. On a décrit précisément l'ensemble des points bases de $J\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$. Re transcrite sur $\overline{S_I}$ cette description est la suivante: l'ensemble (fini) des points bases de $J\mathcal{O}_{\overline{S_I}}$ est formé de points P réguliers sur $\overline{S_I}$ et \mathcal{D} , et tel qu'on peut choisir des coordonnées locales (u,v) centrées en P , pour lesquelles les transformées faibles des $\alpha f + \beta g$ s'écrivent :

$$\alpha f'(u,v)v^k + \beta u, \tag{3.13}$$

où v est l'équation de la composante exceptionnelle D_i de \mathcal{D} incluse dans la transformée faible de f , u est l'équation de la transformée stricte de g et $f'(u,v)$ celle de la transformée stricte de f .

Processus d'élimination des points-bases

D'après l'équation (3.13), on est ramené à l'étude des pinceaux de courbes en un point régulier d'une surface (autrement dit, puisqu'on se place localement, de courbes planes), qui est bien connue (cf. e.g. [Lê-We-1]), et on sait alors (cf. loc. cit.) qu'en un nombre fini d'éclatements des points on peut éliminer le point base. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.11.

Dans la situation de l'avertissement p. 107 et du lemme 3.3.9, si on note P_1, \dots, P_b l'ensemble fini des points bases de J sur $\overline{S_I}$, il existe une surface normale Σ et un morphisme $\sigma : \Sigma \rightarrow \overline{S_I}$ composé d'éclatements de points réguliers tels que $J\mathcal{O}_\Sigma$ soit inversible. Par propriété universelle de l'éclatement normalisé, il existe alors un morphisme $\tau : \Sigma \rightarrow \overline{S_J}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma & \\
 \tau \swarrow & & \searrow \sigma \\
 \overline{S_J} & & \overline{S_I} \\
 \overline{e}_J \searrow & & \swarrow \overline{e}_I \\
 & S &
 \end{array} \tag{3.14}$$

où on a noté σ en pointillé pour rappeler que c'est une composition d'éclatements de points.

On donne dans la démonstration ci-dessous la description explicite de l'élimination d'un point base.

Démonstration. Précisément, si on choisit un point base P , et un système de coordonnées (u,v) comme dans la rem. 3.3.10, comme la transformée stricte $f'(u,v)$ vérifie :

$$f'(0,v) \neq 0,$$

(sinon les transformées strictes de f et g auraient une composante commune, et donc aussi les courbes (f) et (g) sur (S,O) aussi, ce qui est exclu, car l'idéal $J = (f,g)$ est m -primaire), si on note :

$$l = \text{val } f'(0,v),$$

le plus petit exposant de v apparaissant dans le développement en série de $f'(0,v)$, on peut effectuer une suite de $k + l$ éclatements de points lisses qui dans la terminologie de [Sp-1] Déf. 1.6, sont tous de « première espèce » (on dit aussi « en ligne ») pour enlever le

point base du pinceau. Cela signifie que pour $i = 1, \dots, k + l$, les transformées strictes des éléments \mathcal{C}_λ du pinceau, définis par :

$$\mathcal{C}_\lambda : u + \lambda v^k f'(u, v),$$

pour $\lambda \neq 0$ se lisent toujours dans la carte dont les coordonnées (u_i, v_i) sont reliées aux coordonnées (u, v) en P par :

$$\begin{cases} u = u_i v_i^i \\ v = v_i. \end{cases} \quad (3.15)$$

Et après ces $s = k + l$ éclatements de points, la transformée stricte de :

$$\mathcal{C}_\lambda : u + \lambda v^k f'(u, v),$$

qui est calculée dans les coordonnées (u_s, v_s) définies par :

$$\begin{cases} u = u_s v_s^s \\ v = v_s \end{cases}$$

passé par le point $(-\lambda, 0)$ de la dernière composante exceptionnelle créée c'est-à-dire l'axe $v_s = 0$. \square

Étude de la contraction de $\Sigma \rightarrow \overline{S}_J$

On expose dans le lemme suivant les principales propriétés de la contraction $\tau : \Sigma \rightarrow \overline{S}_J$ que l'on utilisera pour la démonstration de notre théorème principal (thm. 3.3.8).

Lemme 3.3.12. *On conserve les notations du cor. 3.3.11.*

- i) *Si on note D_{P_i} la composante irréductible du diviseur exceptionnel de \overline{S}_I qui contient le point base P_i , et D'_{P_i} sa transformée stricte sur Σ , alors le morphisme :*

$$\tau : \Sigma \rightarrow \overline{S}_J,$$

contracte chaque composante D'_{P_i} sur un point O_{P_i} de \overline{S}_J .

- ii) *Si on note $(f)'_{\overline{S}_J}$ la transformée stricte de (f) sur \overline{S}_J , alors tous les points O_{P_i} se trouvent aussi sur cette transformée stricte $(f)'_{\overline{S}_J}$.*
- iii) *Si on suppose maintenant que le nombre de Milnor $\mu(f)$ est égal à la valeur μ_I du thm. 3.3.3, alors le point O_{P_i} est un point lisse sur \overline{S}_J .*

Démonstration. On note ici par P l'un des P_i et de même D_P et D'_P plutôt que D_{P_i} et D'_{P_i} .

- i) D'_P est contractée par τ sur un point de \overline{S}_J .

Soit X une résolution des singularités de Σ et D''_P la transformée stricte de D'_P sur X . On peut reformuler la proposition 3.2.18, en disant que D''_P est contractée sur un point de \overline{S}_J si, et seulement si, les transformées strictes des éléments H -généraux (d'un suffit) de J ne passent pas par D''_P .

Cependant, on a pris g élément H -général de J et la transformée stricte de (g) sur \overline{S}_I passe par $P \in D_P$, mais d'après l'équation (3.13), on sait qu'après un éclatement du point P , les transformées strictes de (g) et de D_P ne s'intersectent plus.

Ainsi, D''_P n'intersecte pas la transformée stricte de l'élément H -général g de J , et d'après la prop. 3.2.18, cela signifie bien que D''_P est contractée sur un point de \overline{S}_J .

ii) O_P se trouve sur $(f)'_{\overline{S}_J}$:

On utilise la description de la suite d'éclatements de points définissant σ donnée dans la preuve du corollaire 3.3.11, et les notations correspondantes : sur Σ , D'_P est la transformée stricte de la composante D_P , et soient D_1, \dots, D_s les s courbes exceptionnelles (isomorphes à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$) créées par les s éclatements de points considérés loc. cit.

Le corollaire cité donne en fait, par le même argument qu'au i) précédent, que toutes les composantes $D'_P, D_1, \dots, D_{s-1}$ sont contractées sur le point O_P par $\tau : \Sigma \rightarrow \overline{S}_J$. (*)

On rappelle aussi qu'on a noté $f'(u,v)$ l'équation de $(f)'_{\overline{S}_I}$ en P (qui est un point lisse), et l la valuation de $f'(0,v)$. On remarque alors que :

$$\text{la transformée stricte } (f)'_{\Sigma} \text{ ne peut passer que par } D'_P, D_1, \dots, D_l. \quad (3.16)$$

En effet, après les l premiers éclatements de points dans les cartes considérées au (3.15), la transformée stricte de (f') ne passe plus par l'origine (point de coordonnées $(u_l, v_l) = (0,0)$) qui est éclatée pour obtenir D_{l+1} , d'où l'assertion (3.16) sur $(f)'_{\Sigma}$.

Comme f n'est pas v -superficiel, le k apparaissant dans (3.13) est non nul, et comme $s = r + k$, on a

$$r \leq s - 1,$$

et donc par (*), la transformée stricte $(f)'_{\Sigma}$ ne passe que par des composantes contractées sur O_P d'où le ii).

iii) O_P est un point lisse de \overline{S}_J

L'hypothèse g H -général donne que les $f + tg$ pour $t \neq 0$ assez petit (disons $t \in \mathbb{D}$, pour un petit disque \mathbb{D} centré en 0) sont aussi H -généraux dans I , et donc :

$$\mu(f + tg) = \mu_I \quad \text{pour } t \in \mathbb{D} - \{0\},$$

alors avec l'hypothèse $\mu(f) = \mu_I$, la famille $(f + tg)$ est à μ constant pour $t \in \mathbb{D}$, et donc d'après le thm. 3.1.17, la famille définie par $f/g : S_J \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ admet une résolution simultanée faible au-dessus de $\mathbb{D} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

En particulier, la surface \overline{S}_J est lisse au voisinage de l'intersection de $(f)'_{\overline{S}_J}$ et du diviseur exceptionnel, i.e. le point O_P est un point lisse. \square

Critère de Castelnuovo pour les résolutions minimales

La preuve proprement dite du théorème 3.3.8 va consister à regarder quelles sont les courbes qui se contractent sur \overline{S}_J .

On rappelle pour cela le théorème suivant, qui caractérise les résolutions minimales pour les surfaces :

Théorème 3.3.13. *Une résolution $\pi : X \rightarrow (S,O)$ d'une singularité de surface normale est minimale si, et seulement si, le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ n'a aucune composante irréductible E qui soit une courbe rationnelle lisse (i.e. isomorphe à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$) d'auto-intersection (-1) . Dans ce qui suit, on appellera courbe (-1) une telle courbe rationnelle lisse d'auto-intersection (-1) .*

On renvoie e.g. à [La-1] Chap. 5 pour la preuve, qui consiste d'une part à montrer qu'on peut toujours contracter une courbe (-1) sur un point lisse (critère de Castelnuovo), et d'autre part, qu'une fois qu'il n'y a plus de courbes (-1) on a bien la résolution minimale au sens où toute autre résolution se factorise par celle-ci.

Démonstration du théorème 3.3.8

Résumé – Comme indiqué dans le paragraphe précédent, la démonstration va consister dans l'étude de la contraction sur \overline{S}_J de composantes exceptionnelles, et en supposant par l'absurde que f est un élément v -superficiel avec $\mu(f) = \mu_I$, à montrer qu'un ensemble de composantes exceptionnelles ne contenant aucune courbe (-1) se contracte en un point lisse, ce qui sera en contradiction avec le thm. 3.3.13 rappelé ci-dessus.

a) *Notations* – On garde toutes les notations de l'avertissement page 107, du cor. 3.3.11 et du lem. 3.3.12 précédents. En particulier f est un élément non v -superficiel de I , et g est un élément H -général de I , tel que $J = (f, g)$ est m -primaire.

On introduit en outre les applications suivantes :

$$r_I : X_I \rightarrow \overline{S}_I,$$

et,

$$r : X \rightarrow \Sigma,$$

définies comme les résolutions *minimales* des singularités de \overline{S}_I et Σ respectivement.

Comme le morphisme $\sigma : \Sigma \rightarrow \overline{S}_I$ est une suite d'éclatements de points lisses, et que r et r_I sont des isomorphismes aux voisinages de ces points, on définit, correspondant à σ , un morphisme :

$$\tilde{\sigma} : X \rightarrow X_I,$$

défini par la suite d'éclatements des points correspondants au-dessus de X_I , donc tel que $r_I \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ r$.

Enfin, on notera $\tilde{\tau}$ l'application composée :

$$\tilde{\tau} = \tau \circ r : X \rightarrow \overline{S}_J.$$

Ainsi, on a le diagramme suivant, où toutes les compositions commutent :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & & \downarrow r & \dashrightarrow \tilde{\sigma} & \\
 & & \Sigma & & X_I \\
 & \swarrow \tilde{\tau} & & \searrow \sigma & \downarrow r_I \\
 \overline{S}_J & & & & \overline{S}_I \\
 & \searrow \overline{e}_J & & \swarrow \overline{e}_I & \\
 & & S & &
 \end{array} \tag{3.17}$$

b) *Classification des composantes exceptionnelles* – Notons encore par π_I la composée $\pi_I := \overline{e}_I \circ r_I : X_I \rightarrow S$, et $|\pi_I^{-1}(0)| = \bigcup_{i=1}^m D_i \cup \bigcup_{j=1}^n F_j$ les composantes exceptionnelles de X_I au dessus de S , où les D_i sont les transformées strictes par r_I des composantes exceptionnelles sur \overline{S}_I et les F_j sont les composantes exceptionnelles de la résolution r_I .

On choisit de noter D_1, \dots, D_b les composantes contenant les points bases P_1, \dots, P_b donnés au corollaire 3.3.11 (en répétant une composante si elle contient plusieurs points bases P_i), et $D_i, i > b$ les composantes restantes.

Si $i \leq b$ et $D_i \subset X_I$ contient un point base P_i de J , on note $D_{i,0}$ la transformée stricte de D_i sur X et $D_{i,1}, \dots, D_{i,s_i}$ les courbes exceptionnelles au-dessus de P_i dans X pour le morphisme $\tilde{\sigma}$.

Considérons alors la composée $\pi = \overline{e}_I \circ \sigma \circ r : X \rightarrow S$, et le diviseur exceptionnel (où on note à l'identique les transformées strictes des D_i pour $j \geq b + 1$ et des F_j)

$$|\pi^{-1}(0)| = \bigcup_{i=1}^b \bigcup_{j=0}^{s_i} D_{i,j} \cup \bigcup_{i=b+1}^m D_i \cup \bigcup_{j=1}^n F_j.$$

c) *Auto-intersection des composantes considérées :*

i) Sur X_I : par minimalité de la résolution r_I , les F_j ne sont pas des courbes (-1) pour tout j . Pour les autres composantes exceptionnelles, on sait seulement que $D_i^2 \leq -1$ (cf. e.g. [La-1] IV).

ii) Sur X : on sait encore que les F_j ne sont pas des courbes (-1) et comme $D_{i,0}$ provient de l'éclatement d'au moins un point lisse, on a aussi $D_{i,0}^2 \leq D_i^2 - 1 \leq -2$, et les $D_{i,j}^2 = -2$ pour $j = 1, \dots, s_i - 1$ (courbes exceptionnelles dans une suite d'éclatements en ligne).

d) Ainsi, les seules composantes de $\pi^{-1}(0)$ pouvant être des courbes (-1) sont les :

$$\alpha) D_{i,s_i} \text{ pour } i = 1, \dots, b \quad \text{ou bien} \quad \beta) D_i \text{ pour } i \geq b + 1.$$

e) Aucune des composantes données au d) n'est contractée sur un point de \overline{S}_J par $\tilde{\tau}$.

On utilise la prop. 3.2.18 : dans le cas $\alpha)$, D_{i,s_i} porte les transformées strictes des éléments $g + tf$ (cf. preuve du lemme 3.3.12, ii)). Dans le cas $\beta)$, sur \overline{S}_I la composante D_i ne contient pas de point base de J donc est coupée par des éléments H -généraux de J en des points lisses, c'est donc aussi le cas sur X car $r_I \circ \tilde{\sigma}$ est un isomorphisme au voisinage de ces points.

f) Supposons maintenant que $\mu(f) = \mu_I$.

Alors d'après le lemme 3.3.12 iii), le morphisme $\tilde{\tau}$ contracte une composante de $\pi^{-1}(0)$ sur un point lisse de \overline{S}_J . Or d'après e), parmi les courbes contractées sur \overline{S}_J , il n'y a pas de courbe (-1) , d'où la contradiction, et le théorème 3.3.8. \square

3.3.4 Cas de la dimension supérieure

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, l'implication : f non v -superficiel dans I entraîne $\mu(f) > \mu_I$, au sens où μ_I est le nombre de Milnor minimum des éléments de l'idéal I , garde son sens pour un idéal m -primaire I de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,0}$ d'une singularité d'intersection complète $(X,0)$ de dimension quelconque.

Cependant, la preuve donnée au § 3.3.3 utilise des arguments spécifiques à la dimension deux (critère de Castelnuovo par exemple).

En fait, dans le cas particulier de l'idéal maximal, on peut donner une preuve du même résultat pour les hypersurfaces de dimension quelconque, qui est une conséquence d'un théorème de B. Teissier. On rappelle d'abord (cf. [Te-72]) que pour un germe d'hypersurface $(X,0)$ de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$, on définit $\mu^i(X,0)$ comme le nombre de Milnor d'une section suffisamment générale de $(X,0)$ par un sous-espace linéaire de dimension i de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$.

En notant μ^* la suite des μ^i , B. Teissier a prouvé dans [Te-77] (appendice thm. 2) le théorème suivant, que l'on peut résumer en disant que pour les familles de sections hyperplanes d'une hypersurface, « μ constant » entraîne « μ^* constant » :

Théorème 3.3.14. *Soit $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée. Soit H un hyperplan de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$. Si $\mu(X \cap H,0)$ est minimum (et donc égale par définition $\mu^n(X)$) alors tous les $\mu^i(X \cap H,0) = \mu^i(X)$ pour $i = 1, \dots, n$.*

En particulier, $\mu^1(X,0)$ est la multiplicité $e(X,0)$. En utilisant l'équivalence entre e -transverse et v -superficiel (cf. le corollaire 2.2.8), on obtient le corollaire annoncé :

Corollaire 3.3.15. *Soit $(X,0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée et m l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,0}$. Un élément $f \in m$ à nombre de Milnor minimum est v -superficiel.*

Preuve: Tous les arguments ont été donnés avant le corollaire : on peut voir la section définie par f comme une section hyperplane $X \cap H$ (en choisissant le plongement de $(X,0)$). Alors le théorème précédent dit en particulier que $\mu^1(X,0) = \mu^1(X \cap H,0)$, ce qui se traduit en disant que $e(X,0) = e(X \cap H,0)$ ou encore en terme de multiplicités d'idéaux que $e(m, \mathcal{O}_{X,0}) = e(m/(f), \mathcal{O}_{X,0}/(f))$ et d'après la caractérisation du corollaire 2.2.8, f est v -superficiel. \square

Annexe A

Schémas projectifs

La construction de l'éclatement d'un idéal qu'on rappelle au § 1.1.1 s'exprime de manière naturelle dans le langage des schémas projectifs. A cause de l'usage intensif de ces constructions fait aux chapitres 1 et 2, et pour faciliter les références, on a jugé utile d'inclure cet appendice présentant les constructions de base sur ces schémas projectifs.

On suppose le lecteur familier avec le langage des schémas tel qu'il est exposé (par exemple) dans [Ii] § 1, [E-H] § 1, ou bien sûr [EGA] I, en particulier avec la notion de schéma affine $\text{Spec } A$ associé à un anneau A (commutatif, unitaire).

Les notions projectives suivantes sont exposées avec bien plus de détails dans [Ii] § 3, [E-H] § 3, et [EGA] II § 2, que l'on utilisera comme références.

A.1 Structure de schéma projectif

On rappelle d'abord la définition suivante :

Définition A.1.1. Si on a un anneau gradué (en degrés positifs) :

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad (\text{A.1})$$

on note $\text{Proj } A$ l'ensemble des idéaux premiers homogènes de A ne contenant pas l'idéal « irrelevant »¹ :

$$A_+ = \bigoplus_{n \geq 1} A_n, \quad (\text{A.2})$$

et on munit $\text{Proj } A$ de la topologie dont les fermés sont les ensembles :

$$V(I) = \{p \in \text{Proj } A, p \supset I\}, \quad (\text{A.3})$$

où I parcourt l'ensemble des idéaux homogènes de A .

Si A est un anneau gradué, et si f est un élément homogène de A , l'anneau A_f , formés des fractions a/f^k pour $a \in A$, est également gradué en définissant, si a est un élément homogène de A , le degré de a/f^k comme $\deg(a) - k \deg(f)$.

Définition A.1.2. Si f est un élément homogène de A , la composante homogène de degré 0 de l'anneau des fractions A_f est notée $A_{(f)}$ (dans [EGA] II)² c'est-à-dire :

$$A_{(f)} := \{a/f^d, a \in A_d, d \in \mathbb{N}\},$$

1. il s'agit là d'un anglicisme qu'il faudrait, en suivant D. Perrin (cf. [Pe] II.4), traduire par « inconvenant »

2. pour les autres références citées, les notations sont $A_{[f]}$ dans [Ii] et $(A[1/f])_0$ dans [E-H]. Il faut dire que la notation $A_{(f)}$ présente une ambiguïté dans la situation suivante: si $p = (f)$ est un idéal premier $A_{(f)} = A_p$ désigne aussi l'anneau local au point p de $\text{Spec } A$.

on appellera cet anneau le *localisé homogène* de A par f .

On définit alors une structure de schéma sur l'espace topologique $\text{Proj } A$ de la manière suivante (cf. e.g. [Ii] Lem. 3.1) :

Lemme A.1.3. *Si A est un anneau gradué (en degrés positifs) et $f \in A$ est un élément homogène de A , on peut considérer l'ouvert $D_+(f)$ de $\text{Proj } A$ défini par :*

$$D_+(f) := \text{Proj } A \setminus V(f) = \{p \in \text{Proj } A, p \not\subseteq f\}. \quad (\text{A.4})$$

Les propriétés suivantes permettent de mettre sur $\text{Proj } A$ une structure de schéma :

- i) les ouverts $D_+(f)$, pour f homogène dans A , recouvrent $\text{Proj } A$ (en fait il suffit de prendre une famille (f_i) engendrant A comme A_0 -algèbre)
- ii) l'application ψ_f de $D_+(f)$ dans $\text{Spec } A_{(f)}$ (où $A_{(f)}$ est le localisé homogène de la définition A.1.2), définie par :

$$\psi_f : p \in D_+(f) \mapsto (pA_f) \cap A_{(f)},$$

est un homéomorphisme,

- iii) pour tout couple f, g d'éléments homogènes de A , les applications ψ_f et ψ_g coïncident sur l'intersection $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$.

Remarque A.1.4. Contrairement au cas des schémas affines, deux anneaux gradués non isomorphes peuvent définir le même Proj . Par exemple, en notant $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$, si $A_n = 0$ pour $n \geq n_0$, il est facile de voir que $\text{Proj } A$ est vide.

Réciproquement, si on suppose que A est une A_0 -algèbre de type fini, on vérifie que $\text{Proj } A = \emptyset$ implique que $A_n = 0$ pour n assez grand (cf. [Ii] Prop. 3.1). Un tel anneau gradué A est dit (TN) (notion que l'on retrouvera pour les modules à la définition A.6.2).

A.2 Sous-schémas fermés

On voit apparaître, à travers le lemme A.1.3 précédent, un trait particulier important du langage des schémas projectifs, à savoir qu'on dispose le plus souvent d'une double description : l'une globale (dans l'anneau gradué), l'autre locale (dans les localisés homogènes). C'est en particulier le cas pour la description des sous-schémas fermés d'un schéma projectif $\text{Proj } A$ (cf. e.g. [Ii] § 3.4 pour les lemmes suivants) :

Lemme A.2.1. *Si A est un anneau gradué en degrés positifs (cf. (A.1)), à chaque idéal homogène I de A ne contenant pas l'idéal irrelevant A_+ (cf. (A.2)), on associe un sous-schéma fermé de $\text{Proj } A$, en associant à I le sous-espace fermé $V(I)$ de la déf. A.1.1, et en définissant la structure de schéma sur $V(I)$ dans chaque carte affine $D_+(f) = \text{Spec } A_{(f)}$ comme le sous-schéma fermé de $\text{Spec } A_{(f)}$ associé à l'idéal :*

$$IA_f \cap A_{(f)}. \quad (\text{A.5})$$

Désormais on notera $V(I)$ le sous-schéma de $\text{Proj } A$ défini par I , qui est isomorphe à $\text{Proj } A/I$, (et non plus seulement le sous-espace topologique défini au (A.3)).

Mieux, comme dans le cadre affine, tous les sous-schémas fermés de $\text{Proj } A$ sont associés à un idéal homogène I de A , mais à la différence du cas affine, cet idéal homogène n'est pas déterminé de manière unique :

Lemme A.2.2. *Soit A un anneau gradué, qui est une A_0 -algèbre de type fini. Si Y est un sous-schéma fermé de $\text{Proj } A$, il existe un idéal I homogène tel que $Y = V(I)$ au sens du lemme précédent. Là encore, (cf. rem. A.1.4) deux idéaux homogènes distincts I, J peuvent définir le même sous-schéma $\text{Proj } A/I = \text{Proj } A/J$ (c'est bien sûr le cas si les composantes homogènes I_n et J_n coïncident pour $n \geq n_0$).*

A.3 Un morphisme canonique

On renvoie e.g. à [Ii] Prop. 3.5 pour une preuve du résultat suivant :

Proposition A.3.1. *Si A est un anneau gradué qui est une R -algèbre graduée de type fini (p.ex. pour $R = A_0$), le morphisme structural :*

$$\begin{aligned} \text{Proj } A &\rightarrow \text{Spec } R, \\ p &\mapsto p \cap R, \end{aligned}$$

est un morphisme fermé. Mieux, ce morphisme structural est propre (c'est-à-dire, par définition, séparé, de type fini et universellement fermé, cf. [Ii] p. 90 et p. 92).

A.4 Morphismes de schémas projectifs

Définition A.4.1. A un morphisme gradué d'anneaux gradués :

$$\phi^a : \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

on associe (cf. [Ii] § 3.2 ou [EGA] II (2.8)) un morphisme :

$$\begin{aligned} \phi : G(\phi) \subset \text{Proj } B &\rightarrow \text{Proj } A, \\ q &\mapsto (\phi^a)^{-1}(q). \end{aligned}$$

où $G(\phi)$ est l'ouvert de $\text{Proj } B$ complémentaire du sous-schéma fermé défini par l'idéal homogène :

$$(A_+).B := \phi^a(A_+).B,$$

et A_+ est l'idéal irrelevant $\bigoplus_{n \geq 1} A_n$ (cf. (A.2)).

En particulier si l'on s'intéresse à la condition $G(\phi) = \text{Proj } B$ entier, le résultat cité à la remarque A.1.4 donne ici :

Lemme A.4.2. *Avec les notations de la définition précédente, le morphisme ϕ est défini sur $\text{Proj } B$ entier, si et seulement si, le fermé de $\text{Proj } B$ défini par $V((A_+).B)$ est vide. Si on suppose en outre que A et B sont des algèbres de type fini sur A_0 , resp. B_0 , d'après la remarque A.1.4, cette condition est équivalente à ce que les composantes de degré $n \geq n_0$ du quotient $B/(A_+).B$ soient nulles, c'est-à-dire à l'égalité :*

$$\forall n \geq n_0, [(A_+).B]_n = B_n,$$

entre composantes homogènes de degré n .

A.5 Cas particulier des plongements fermés

Le lemme suivant est une conséquence évidente de la construction du § A.4, que l'on utilisera très souvent :

Lemme A.5.1. *Avec les notations de la définition A.4.1, si $\phi^a : A \rightarrow B$ est une surjection d'anneaux gradués, alors le morphisme associé ϕ est défini sur $\text{Proj } B$ entier, et c'est un plongement fermé de $\text{Proj } B \rightarrow \text{Proj } A$ (i.e. un isomorphisme sur son image, qui est un sous-schéma fermé de $\text{Proj } A$).*

Preuve: Le fait que $G(\phi) = \text{Proj } B$ entier est donné par le lemme A.4.2, et l'isomorphisme $B \simeq A/\ker(\phi^a)$, où $I = \ker(\phi^a)$ est un idéal homogène de A donne la seconde assertion (cf. lem. A.2.1). \square

La définition suivante est surtout une mise au point terminologique :

Définition A.5.2. Soit $\phi^a : A \rightarrow B$ une surjection (graduée) d'anneaux gradués, et $\phi : \text{Proj } B \rightarrow \text{Proj } A$ le plongement fermé associé (cf. le lemme précédent).

Si I est un idéal homogène de A , et $F = V(I)$ est le sous-schéma fermé de $\text{Proj } A$ correspondant à I (cf. lem. A.2.1), alors la *préimage schématique* $\phi^{-1}(F)$ sera aussi notée (suivant le contexte) $\phi^*(F)$, et appelée *pull-back* de F sur $\text{Proj } B$, ou encore notée $(\text{Proj } B) \cap F$ et appelée *intersection schématique* de $\text{Proj } B$ avec F .

En terme d'équations, si l'idéal I est engendré par les éléments homogènes (f_1, \dots, f_m) de A , alors la préimage $\phi^{-1}(V(I))$ est le sous-schéma fermé $V(\phi^a(f_1), \dots, \phi^a(f_m))$ de $\text{Proj } B$.

A.6 Modules \tilde{M} sur $\text{Proj } A$

On renvoie e.g. à [EGA] II §2.5 pour la construction suivante :

Définition A.6.1. Si A est un anneau gradué en degrés positifs (cf. (A.1)), et $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ est A -module gradué, et si on note $X = \text{Proj } A$, on associe à M un faisceau \tilde{M} de \mathcal{O}_X -modules cohérents (qui coïncide dans chaque carte affine $X_f = \text{Spec } A_{(f)}$, avec la construction, affine, du \mathcal{O}_{X_f} -module cohérent $\widetilde{M_{(f)}}$). Cette construction est *fonctorielle*, c'est-à-dire qu'à un morphisme gradué de degré 0 :

$$u : M \rightarrow N,$$

entre deux A -modules gradués, correspond un morphisme de \mathcal{O}_X -modules :

$$\tilde{u} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}.$$

Suivant [EGA] II (2.7.2) on introduit la définition :

Définition A.6.2. Si M est un A -module gradué, on dira que M est (TN) s'il existe un entier n_0 tel que $M_n = 0$ pour $n \geq n_0$.

Il est alors facile de montrer le résultat suivant ([EGA] II (2.7.3)) :

Proposition A.6.3. Si M est un A -module gradué de type fini, alors $\tilde{M} = 0$ si, et seulement si, M est (TN).

Corollaire A.6.4. On introduit encore la terminologie suivante : un morphisme $u : M \rightarrow N$ de modules gradués est dit (TN)-injectif (resp. (TN)-surjectif), si et seulement si son noyau (resp. son conoyau) est (TN). Enfin on dira qu'un u est un (TN)-isomorphisme s'il est (TN)-injectif et (TN)-surjectif.

Par exactitude du foncteur $\tilde{}$ de la déf. A.6.1, on déduit de la proposition précédente que, pour un morphisme gradué de degré 0, $u : M \rightarrow N$ entre A -modules gradués de type fini, le morphisme associé $\tilde{u} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ est injectif, (resp. surjectif, resp. un isomorphisme) si, et seulement, le morphisme u est (TN)-injectif (resp. (TN)-surjectif, resp. un (TN)-isomorphisme).

A.7 « Bons » anneaux gradués

A plusieurs reprises dans les constructions précédentes est apparue la condition de finitude: A est une A_0 -algèbre de type fini.

Comme $A = A_0[A_+]$ cette condition est équivalente à ce que l'idéal irrelevant A_+ (défini au (A.2)) soit de type fini (cf. [EGA] II (2.1.4)).

En fait, lorsqu'on étudie les faisceaux (dit de Serre) $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{A(n)}$ (cf. [EGA] II 2.5) sur $X = \text{Proj } A$ associés aux A -modules $A(n)$ dont la composante de degré k $A(n)_k$ est :

$$A(n)_k = A_{n+k}, \quad (\text{A.6})$$

on utilise aussi l'hypothèse que A_+ est engendré par les éléments de degré un, pour montrer que ces faisceaux sont inversibles (cf. loc. cit).

Aussi peut-on dire, en suivant [Ii] §3.3, a) que :

Définition A.7.1. Un anneau gradué $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un « bon anneau gradué pour faire de la géométrie »³, s'il vérifie les conditions suivantes :

- i) A_0 est un anneau noethérien,
- ii) l'idéal A_+ a un nombre fini de générateurs,
- iii) A_+ est engendré par ses éléments de degré un.

3. évidemment, c'est un dénomination abusive: ces hypothèses de finitude ne sont pas nécessaires pour tous les résultats, surtout celle sur les générateurs en degré un. Voir aussi [Go-Wa] Chap. 5 où, même pour l'étude des faisceaux de Serre, la condition d'engendrement en degré un est remplacé par une condition plus faible. Mais elles seront vérifiées dans le cadre qui nous intéresse ici, qui est celui du § 1.1.1.

Annexe B

Questions de dimensions

Par rapport au cadre classique des schémas de type fini sur un corps, le cadre général choisi pour l'étude des éclatements dans les chapitres 1 et 2 nécessite une certaine prudence pour obtenir les résultats « naturels » de dimension d'espaces éclatés, et de diviseurs sur les schémas considérés.

Cela a déjà été observé au § 1.1.6 où on a vu que la dimension de chaque composante de l'espace total S_I de l'éclatement d'un idéal I dans un anneau R était cependant directement contrôlable à partir de celle des composantes de $\text{Spec } R$, dès que l'on supposait R *universellement caténaire* (cor. 1.1.21 i) et ii)).

Assez étonnamment, on montre ici (§ B.1) qu'on peut facilement contourner cette hypothèse de caténarité et retrouver le même résultat pour la dimension des composantes de S_I sans l'hypothèse R universellement caténaire!

En revanche, les résultats sur la dimension du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I annoncés au iii) du cor. 1.1.21 sont plus délicats.

On montre ici au § B.2 comment, pour passer d'un résultat sur la dimension de l'espace total à S_I à celle du diviseur de Cartier \mathcal{E}_I , il faut d'une part se garder de croire qu'en général un diviseur de Cartier est toujours de dimension « un de moins », (cf. l'exemple B.2.2) mais que d'autre part on peut ici conclure encore pour les schémas projectifs au-dessus d'un anneau *local* universellement caténaire (cf. prop. B.2.6).

Le § B.3 introduit (suivant [EGA]) la notion de schéma *biéquidimensionnel* pour prouver la proposition B.2.6 : sur un schéma biéquidimensionnel, les sous-schémas de Cartier sont équidimensionnels de dimension un de moins, et donc montrer B.2.6 revient à montrer cette propriété de biéquidimensionnalité pour les espaces $\text{Proj } A$ avec A_0 local (universellement caténaire), ce qui est fait à la prop. B.3.6.

Une autre méthode pour obtenir un résultat sur la dimension de l'espace éclaté $S_I = \text{Proj } B(I, R)$ et $\mathcal{E}_I = \text{Proj } G(I, R)$ consisterait à partir de résultats algébriques donnant (sans hypothèse sur l'anneau R noethérien) la dimension de Krull des anneaux $B(I, R)$ et $G(I, R)$ rappelés au § B.4 : cela donne bien sûr la dimension des cônes $\text{Spec } B(I, R)$ et $\text{Spec } G(I, R)$.

Mais ensuite, si R/I est de dimension positive, il n'est pas si facile de passer de la dimension de ces cônes à celle des Proj correspondant.

B.1 Dimension de l'espace total de l'éclatement

On montre ici, de manière alternative à la preuve donnée au § 1.1.6, comment on peut donner la même conclusion qu'au corollaire 1.1.21 sans supposer R universellement

caténaire.¹

Minoration de $\dim \text{Proj } A$ par $\dim A_0$

On rappelle le résultat suivant pour les morphismes surjectifs, fermés, sans hypothèse de caténarité :

Proposition B.1.1 (cf. [EGA] IV (5.4.1)). *Soient X et Y deux schémas localement noethériens, et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. Si f est surjectif et fermé (resp. ouvert) alors on a : $\dim X \geq \dim Y$.*

(Il ne suffit pas d'avoir un morphisme surjectif : cf. contre exemple dans loc. cit. (5.4.3)).

La proposition précédente s'applique immédiatement au cas du morphisme structural $\text{Proj } A \rightarrow \text{Spec } A_0$ des schémas projectifs (cf. § A.3.1), à condition que ce morphisme soit surjectif :

Corollaire B.1.2. *Soit $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un anneau gradué noethérien (i.e. A_0 noethérien et A est une A_0 algèbre de type fini). Si on suppose que le morphisme structural $\text{Proj } A \rightarrow \text{Spec } A_0$ est surjectif, alors on a :*

$$\dim \text{Proj } A \geq \dim A_0.$$

Le corollaire s'applique au cas des éclatements : on peut même l'appliquer composante par composante : si R est un anneau noethérien et $\text{Min}(R) = \{p_1, \dots, p_n\}$ est l'ensemble des idéaux premiers minimaux de R , alors si $I \not\subset p_i$ on a une surjection fermée (les notations sont celles du § 1.1.6) :

$$(S_I)_i \rightarrow \text{Spec } R/p_i,$$

et en appliquant le corollaire B.1.2, on obtient :

$$\dim(S_I)_i \geq \dim R/p_i, \tag{B.1}$$

sans hypothèse de caténarité.

Mais l'autre inégalité :

$$\dim(S_I)_i \leq \dim R/p_i, \tag{B.2}$$

est facile (cf. e.g. [HIO] (12.14)).

On en déduit donc la :

Proposition B.1.3. *On a la même conclusion qu'au corollaire 1.1.21 i) et ii)) sans supposer l'anneau R universellement caténaire : à savoir que pour chaque composante irréductible $\text{Spec } R/p_i$ de l'anneau noethérien R , telle que $I \not\subset p_i$ la composante irréductible $(S_I)_i$ correspondante dans l'éclatement de I a même dimension que R/p_i .*

B.2 Dimension des sous-schémas de Cartier

On se demande dans ce paragraphe à quelle condition un sous-schéma de Cartier (cf. déf. 1.1.3) d'un schéma X équidimensionnel de dimension d est équidimensionnel de dimension $d - 1$. Cette question intervient au § 1.1.6 pour déduire du résultat sur la dimension de l'éclatement S_I celle du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I . Dans le cas du diviseur exceptionnel de l'éclatement d'un idéal m -primaire cette question est élémentaire (cf. lem. B.2.4 infra). Le cas général fait l'objet de la proposition B.2.6.

Le cas le plus facile est bien sûr le cas des anneaux locaux (cf. e.g. [Ei] 10.9) :

1. au cas où cela pourrait servir...

Lemme B.2.1. *Si A est un anneau local noethérien équidimensionnel, si on note $\text{Min}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A , et f est un élément de A tel que $f \notin p_i$ pour tout $p \in \text{Min}(A)$, alors on sait que $A/(f)$ est équidimensionnel de dimension $\dim(A) - 1$.*

On donne ici (suivant [EGA] IV 5.2.5) un exemple d'un anneau A noethérien régulier (évidemment non local) avec un élément (f) tel que :

$$\dim A/(f) = \dim A - 2.$$

(Bien sûr, si l'on considère un anneau non local non équidimensionnel, un tel exemple est très facile à construire, il suffit de faire passer f par une composante de dimension petite cf. e.g. [Ei] ex. 10.8).

Exemple B.2.2. On considère R un anneau de valuation discrète², d'idéal maximal (u), et considère l'anneau $A := R[T]$ des polynômes sur R . Alors $\dim A = 2$ et si on pose $f = uT - 1$, le quotient $A/(f)$ est de dimension zéro.

Preuve: Le quotient $A/(f) = R[T]/(uT - 1)$ est isomorphe à l'anneau localisé R_u de R par la partie multiplicative engendrée par u . Comme ici (u) est l'idéal maximal de l'anneau local R , l'anneau R_u est le corps des fractions $\text{Frac}(R)$ d'où l'assertion sur la dimension. \square

Cas des anneaux gradués

Dans le cas des anneaux gradués sur un anneau d'Artin, le lemme B.2.1 admet l'avatar facile suivant :

Lemme B.2.3. *Soit $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un anneau noethérien gradué où A_0 est un anneau d'Artin.*

Si on suppose que $\text{Spec } A$ est équidimensionnel de dimension d et f est un élément homogène de A qui n'est dans aucun idéal premier minimum de A alors $\text{Spec } A/(f)$ est équidimensionnel de dimension $d - 1$.

En terme de schémas projectifs, toujours dans l'hypothèse où A_0 est un anneau d'Artin, la correspondance entre les composantes irréductibles du cône $\text{Spec } A$ et celle de $\text{Proj } A$ donne immédiatement :

Lemme B.2.4. *Soit $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un anneau noethérien gradué où A_0 est un anneau d'Artin.*

Si $\text{Proj } A$ est équidimensionnel de dimension d et $f \in A$ est un élément homogène tel que $\dim \text{Proj } A/(f) < \dim \text{Proj } A$ alors $\text{Proj } A/(f)$ est équidimensionnel de dimension $d - 1$.

Il faut se garder d'espérer qu'un diviseur de Cartier d'un schéma projectif avec A_0 de dimension positive soit toujours de dimension « un de moins » car l'exemple B.2.2 s'adapte immédiatement au cas projectif :

Exemple B.2.5. En considérant l'anneau $B := A[X]$ et l'idéal homogène fX où A et f sont ceux de l'ex. B.2.2, on obtient $\text{Proj } B = \text{Spec } A$, et aussi $\text{Proj } B/(f.X) = \text{Spec } A/(f)$ et donc :

$$\dim \text{Proj } B/(f.X) = \dim \text{Proj } B - 2.$$

Cas des anneaux gradués sur un anneau local

Cependant, pour les anneaux gradués sur un anneau A_0 de dimension quelconque, on a un résultat positif en supposant A_0 local, universellement caténaire (c'est bien sûr le caractère local qui fait la différence) :

² en particulier on peut prendre pour R le gentil anneau $R := k[X]_{(X)}$ localisé de $k[X]$ par l'idéal maximal (X) avec k un corps!

Proposition B.2.6. Soit $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un anneau gradué avec A_0 un anneau noethérien local, universellement caténaire. On suppose aussi que A est une A_0 -algèbre de type fini (ce qui équivaut à A noethérien).

Si D est un sous-schéma de Cartier de $P = \text{Proj } A$, alors sur chaque composante irréductible P_i de P , $D \cap P_i$ est équidimensionnel de dimension $\dim P_i - 1$.

De cette proposition, on déduit immédiatement le corollaire 1.1.21 iii) sur la dimension du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I de l'éclatement d'un idéal, que l'on rappelle ici, pour la commodité du lecteur :

Corollaire 1.1.21 iii) Si (R, m) est un anneau local noethérien de dimension d universellement caténaire, et I est un idéal de R , alors sur chaque composante $(S_I)_i$ de dimension d_i de l'éclatement de I dans R , le diviseur exceptionnel \mathcal{E}_I est équidimensionnel de dimension $d_i - 1$.

B.3 Biéquidimensionnalité

Ce paragraphe étudie la notion d'espace biéquidimensionnel, en vue de la preuve de la proposition B.2.6.

Définitions

Les définitions suivantes sont données dans [EGA] 0.14 :

Définition B.3.1. i) Dans un schéma X , on appelle *codimension* d'un point $x \in X$ la dimension de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$.

ii) Un schéma X est dit *équicodimensionnel* si tous les points fermés $x \in X$ ont la même codimension.

iii) Un schéma X est dit *biéquidimensionnel*, s'il est *caténaire* (cf. la déf. 1.1.18), *équidimensionnel*, et *équicodimensionnel*.

Exemple B.3.2. i) Le spectre d'un anneau *local* est trivialement équicodimensionnel (un seul point fermé).

ii) Les spectres des k -algèbres de type fini, mais aussi de \mathbb{Z} -algèbres de type fini (cf. la notion d'anneaux de Jacobson dans [EGA] IV §10, et [Ei] § 4.5)³ sont équicodimensionnels.

Caractérisation

La caractérisation facile suivante des schémas biéquidimensionnels (cf. [EGA] 0 14.3.3) explique l'introduction de cette notion pour la preuve de la prop. B.2.6 :

Proposition B.3.3. Un schéma X est biéquidimensionnel si, et seulement si, X est équidimensionnel et, pour tout couple (A, B) de parties fermées irréductibles de X avec $A \subset B$, on a l'égalité :

$$\dim(B) = \dim(A) + \text{codim}(A, B). \quad (\text{B.3})$$

En particulier, on déduit de cette caractérisation la propriété suivante :

Corollaire B.3.4. Si X est biéquidimensionnel, et Z est un sous-espace fermé irréductible de X , alors Z est aussi biéquidimensionnel.

3. un anneau de Jacobson est un anneau où tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux : on montre (cf. [EGA] IV (10.4.6)) que toute algèbre de type fini sur un anneau de Jacobson est un anneau de Jacobson.

(En effet, les fermés de Z étant des fermés de X , la condition (B.3) est vérifiée.)

Pour un sous-schéma de Cartier D d'un schéma X , d'après le théorème de l'idéal principal de Krull (cf. e.g. [Ei] 10.1), chaque composante irréductible de D est de codimension un, donc la proposition B.3.3 admet aussi comme corollaire :

Corollaire B.3.5. *Si D est un sous-schéma de Cartier d'un schéma biéquidimensionnel de dimension d alors D est équidimensionnel de dimension $d - 1$.*

En particulier, ce corollaire redonne bien sûr le lemme B.2.1 si on considère un anneau local *caténaire*.

Application à la preuve de la prop. B.2.6

D'après le corollaire B.3.5, pour montrer la proposition B.2.6, il suffit de montrer qu'avec les notations de cette proposition, chaque composante irréductible du schéma $\text{Proj } A$ est biéquidimensionnelle (et en fait il n'y a que l'équicodimensionnalité à vérifier).

On va déduire ce résultat de la proposition suivante, dont l'énoncé est une légère généralisation d'un énoncé de S. Kleiman et A. Thorup dans [Kl-Th] (3.8) :

Proposition B.3.6. *Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de type fini de schémas (localement) noethériens, si f envoie les points fermés de X sur des points fermés de Y , et si Y est équicodimensionnel et universellement caténaire, alors chaque composante irréductible de X est biéquidimensionnelle.*

La proposition ci-dessus s'applique directement pour montrer B.2.6 : on prend $X = \text{Proj } A$, $Y = \text{Spec } A_0$, $f : \text{Proj } A \rightarrow \text{Spec } A_0$ est le morphisme structural (cf. A.3.1) et avec les hypothèses de B.2.6, A étant une A_0 -algèbre de type fini, c'est bien un morphisme de type fini, fermé (qui envoie donc en particulier les points fermés sur des points fermés).

Démonstration. (de B.3.6)

Soit $x \in X$ un point fermé et soit X_i une composante irréductible de X passant par x . Il s'agit (seulement) de montrer que X_i est équicodimensionnelle i.e. $\dim \mathcal{O}_{X_i, x} = \dim X_i$.

Soit $y := f(x)$ l'image de x par f , qui est un point fermé par hypothèse, et soit $Z := \overline{f(X_i)}$ l'adhérence de l'image $f(X_i)$ dans Y , encore irréductible.

Comme Y est équicodimensionnel (et caténaire), le sous-espace fermé irréductible Z de Y est aussi équicodimensionnel (il suffit d'appliquer le corollaire B.3.4 à la composante irréductible Y_i de Y contenant Z : Y_i est biéquidimensionnelle donc Z aussi).

Ainsi, au point fermé $y \in Z$ on a : $\dim \mathcal{O}_{Z, y} = \dim Z$.

Comme Y est universellement caténaire, le sous-schéma Z l'est aussi, et on a d'après la formules des dimensions pour le morphisme $f : X_i \rightarrow Z$ avec Z universellement caténaire (cf. [EGA] IV (5.6.5.3)) :

$$\dim \mathcal{O}_{X_i, x} = \dim \mathcal{O}_{Z, y} + f = \dim Z + f,$$

où f est la dimension de la fibre du point générique de Z .

Ainsi, $\dim \mathcal{O}_{X_i, x}$ est indépendant du point fermé $x \in X_i$ choisi, et donc $\dim \mathcal{O}_{X_i, x} = \dim X_i$. □

B.4 Dimensions des Spec et Proj d'anneaux gradués

Sans hypothèse de catéarité sur un anneau noethérien R , le corollaire 1.1.21 (difficile) admet l'avatar beaucoup plus facile suivant, si au lieu d'étudier les schémas $\text{Proj } B(I, R)$ et $\text{Proj } G(I, R)$ (cf. loc. cit.) on étudie les « cônes affines » $\text{Spec } B(I, R)$ et $\text{Spec } G(I, R)$.

Précisément, on démontre assez facilement le résultat suivant (cf. e.g. [HIO] (9.7) ou [Ei] Ex. 13.8) :

Proposition B.4.1. *Si R est un anneau noethérien et I est un idéal de R , alors :*

i) *l'anneau $B(I, R) := R[It]$ admet comme idéaux premiers minimaux les idéaux premiers $B(I, p_i \subset R) := p_i R[t] \cap R[It]$ (cf. [HIO] 4.5) pour $p_i \in \text{Min}(R)$ et donc les composantes irréductibles du schéma $\text{Spec } B(I, R)$ sont exactement les schémas $\text{Spec } B((I + p_i)/p_i, R)$ qui sont de dimension $\dim R/p_i$ si $I \subset p_i$ et $\dim R/p_i + 1$ si $I \not\subset p_i$.*

ii) *l'anneau $G(I, R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n/I^{n+1}$ a pour dimension le dimension maximale $\dim R_P$ où P parcourt les idéaux maximaux de R contenant I . En particulier si R est local, $\dim G(I, R) = \dim R$ (et on peut aussi dans ce cas montrer l'équidimensionnalité composante par composante...)*

D'une manière générale, si $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un anneau gradué, il n'est pas évident de passer de la dimension de $\text{Spec } A$ à celle de $\text{Proj } A$:

a) non pas tellement à cause du fait que dans $\text{Proj } A$ on ne considère que des idéaux homogènes car à cela il y a un remède (cf. e.g. [HIO] (9.1) ou [Ei] ex. 13.7) : on considère pour chaque $p \in \text{Spec } A$ le plus grand idéal homogène contenu dans p , que l'on note $H(p)$ dont on vérifie immédiatement qu'il est encore premier, et qui s'il n'est pas égal à p entier vérifie :

$$\text{ht } H(p) = \text{ht } p - 1,$$

ce qui permet de relier les chaînes d'idéaux premiers aux chaînes d'idéaux premiers homogènes,

b) mais plutôt parce, dans $\text{Proj } A$, on ne considère que des idéaux homogènes qui ne contiennent pas l'idéal irrelevant $A_+ = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$.

Remarque B.4.2. Comme cité à la prop. 1.1.22, il y a bien sûr un cas où on a toujours :

$$\dim \text{Proj } A = \dim \text{Spec } A - 1, \tag{B.4}$$

c'est le cas où A_0 est un anneau d'Artin. Mieux, dans ce cas, les composantes irréductibles de $\text{Proj } A$ et de $\text{Spec } A$ se correspondent une à une et on a (B.4) pour chacune de ces composantes irréductibles.

B.5 La dimension des fibres

Sans lien direct avec les discussions précédentes, on consigne ici pour référence le théorème de semi-continuité de la dimension des fibres des morphismes dû à Chevalley tel qu'on le trouve dans [EGA] IV (13.1.3) :

Théorème B.5.1.

Soit $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme (localement) de type fini. Pour tout entier n , l'ensemble $F_n(X)$ des $x \in X$ tels que $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geq n$ est fermé.

Au chapitre 2, on utilise en fait son corollaire pour les morphismes fermés (cf. [EGA] IV (13.1.5) :

Corollaire B.5.2.

Soit $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme fermé localement de type fini. Alors pour tout entier n l'ensemble des $y \in Y$ tels que : $\dim f^{-1}(y) \geq n$ est fermé.

Annexe C

Calculs avec Singular

Au chapitre 2, on a utilisé SINGULAR pour faire les calculs suivants : calculs d’anneaux gradués $G(m, R)$ et $G(I, R)$, calculs de multiplicités d’anneaux $G(m, R)$, et enfin calculs de décompositions primaires. Dans [RES], on a utilisé SINGULAR pour un calcul de normalisation (§ 1.2), et on l’a cité aussi à propos de la possibilité de calculer une résolution libre d’un module (fin du § 2.2).

Pour mener à bien ces calculs, il est nécessaire de connaître quelques notions sur l’algèbre commutative effective, assistée par ordinateur (“Computer algebra”). Sont notamment fondamentales les notions d’*ordre monomial* et de *base standard* pour un tel ordre monomial.

Pour les calculs dans les anneaux de polynômes, qui sont ceux de la géométrie algébrique globale, ces notions sont bien connues et la littérature les concernant est aujourd’hui fournie : à titre d’exemple, le livre de Cox, Little et O’Shea ([CLO]) fait de ces méthodes algorithmiques un biais d’introduction à la géométrie algébrique élémentaire (voir aussi, pour un panorama plus succinct, avec un lien avec la théorie des singularités, l’article de O’Shea [O’S]). Elle trouvent aussi leur place dans les ouvrages généralistes (cf. le chap. 15 de [Ei]). La notion centrale y est celle de *base de Gröbner* pour un ordre monomial.

Cependant, les ordres monomiaux considérés dans ces ouvrages, que l’on appellera *ordre globaux*, ne s’adaptent pas aux calculs dans les anneaux locaux (localisés d’anneaux de polynômes ou anneaux de séries). Grâce aux travaux de T. Mora (cf. [Mor]) à partir de 1982, et à d’autres après lui (Greuel, Pfister, Grassmann..., cf. e.g. [Gr-2000]), des algorithmes ont été développés permettant la détermination d’une *base standard* pour des *ordres monomiaux locaux* (ou mixtes), ouvrant la voie à de nombreuses applications en algèbre locale : calcul de multiplicités locales, de nombres de Milnor, etc (cf. e.g. [Gr-2000] pour une introduction, et le manuel de [GPS]).

Le lecteur désireux de se familiariser avec ces notions devra donc se reporter à ces dernières références (et à la collection REPORTS ON COMPUTER ALGEBRA¹ de l’université de Kaiserslautern), car je ne connais pas d’ouvrage de référence paru sur ces notions.²

A titre d’exemple, on verra ci-dessous (§ C.2.2) que le calcul du cône tangent, qui est possible (mais plus coûteux) avec un ordre global (cf. e.g. [Ei] 15.10.3), est la première conséquence naturelle du calcul d’une base standard pour un ordre local, si bien que Mora avait d’ailleurs donné à son algorithme le nom de *Tangent Cone algorithm*.

La détermination de l’anneau du cône normal $G(I, R)$ pour un idéal I non maximal demande un peu plus d’efforts : on expose ici (au § C.2.3) une méthode due à Mora (cf.

1. disponible sur http://www.singular.uni-kl.de/Reports_on_ca/

2. Cette lacune sera certainement comblée par la parution annoncée d’un livre intitulé *A Singular Introduction to commutative algebra*, par G.M. Greuel, G. Pfister et al., cf. <http://www.singular.uni-kl.de/>.

[Mor]) que l'on a utilisée pour le calcul de l'exemple 2.3.30.³

C.1 Ordre monomiaux et bases standard

C.1.1 Ordre monomial

Les définitions suivantes reprennent [Gr-2000] § 5 (voir aussi les références qui s'y trouvent) :

On fixe un corps K , et un ensemble d'indéterminées x_1, \dots, x_n , et on utilise le multi-
indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour la notation $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, de sorte qu'on écrira aussi :

$$K[x] := K[x_1, \dots, x_n].$$

Définition C.1.1. Un ordre monomial $>$ est un ordre total sur l'ensemble des monômes $\{x^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ satisfaisant :

$$x^\alpha > x^\beta \Rightarrow x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma}, \text{ pour tout } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n.$$

On appelle un ordre monomial $>$ *global* (resp. *local*, resp. *mixte*) si $x_i > 1$ pour tout i (resp. $x_i < 1$ pour tout i , resp. s'il existe des i tels que $x_i > 1$ et des j tels que $x_j < 1$).

La notion d'ordre monomial définie dans les manuels usuels (cf. [CLO] ou [Ei]) est celle d'ordre monomial global; on remarquera qu'un ordre monomial est global si, et seulement si, c'est un bon ordre (tout ensemble admet un plus petit élément).

Définition C.1.2. Tout polynôme $f \in K[x] \setminus \{0\}$ peut s'écrire :

$$f = cx^\alpha + f',$$

avec $c \in K \setminus \{0\}$ et $\alpha > \alpha'$ pour tous les exposants α' apparaissant dans les monômes de f' . On appelle *monôme directeur* (leading monomial ou Leitmonomial) du polynôme f , et on note $L(f)$, le monôme x^α .

La particularité des ordres locaux (ou mixtes) provient de la construction suivante :

Définition C.1.3. Pour un ordre monomial $>$ on définit le sous-ensemble multiplicatif :

$$S_{>} = \{u \in K[x_1, \dots, x_n], L(u) = 1\},$$

et la localisation de $K[x]$ selon S , à savoir :

$$\text{Loc } K[x] := K[x]_{S_{>}} = \left\{ \frac{f}{u}, f \in K[x], u \in S_{>} \right\},$$

appelé *l'anneau associé à l'ordre $>$ sur $K[x]$* .

On observe alors que $\text{Loc } K[x] = K[x]$ pour un ordre global, et que pour un ordre local :

$$\text{Loc } K[x] = \left\{ \frac{f}{1+g}, f \in K[x], g \in (x_1, \dots, x_n) \right\}, \quad (\text{C.1})$$

c'est-à-dire que $\text{Loc } K[x]$ est le localisé de $K[x]$ par l'idéal maximal $M = (x_1, \dots, x_n)$.

Alors, pour tout élément $f/u \in \text{Loc } K[x]$ on définit encore son monôme directeur $L(f/u)$ comme le monôme directeur de f , $L(f)$.

Cela justifie les dénominations d'ordre global et local, car on va voir (déf. C.1.9) que la notion de *base standard* pour un ordre $<$ doit être exprimée dans l'anneau $\text{Loc } K[x]$ correspondant.

3. Je dois la connaissance de l'article [Mor] à Hans Schoenemann.

Ainsi, on définit déjà la notion d'idéal directeur comme un idéal de $\text{Loc } K[x]$:

Définition C.1.4. Soit $>$ un ordre monomial sur $K[x]$ et $\text{Loc } K[x]$ l'anneau localisé correspondant suivant la déf. C.1.3. Pour un sous-ensemble $G \subset \text{Loc } K[x]$ (en particulier de $G \subset K[x]$), on appelle *idéal directeur de G* , et on note $L(G)$, l'idéal de $\text{Loc } K[x]$:

$$L(G) = (L(g), g \in G \setminus \{0\}),$$

engendré par les monômes directeurs des éléments de G (cf. déf. C.1.2, étendue à $\text{Loc } K[x]$ à la déf. C.1.3).

C.1.2 Exemples d'ordres monomiaux

On décrit ainsi quelques ordres monomiaux classiques, avec leur dénomination dans SINGULAR, où ils sont implémentés (cf. [GPS], appendice B.2).

Ordres globaux

Ces ordres sont désignés par deux lettres dont la seconde est **p** pour *polynômes* :

- **lp** : l'ordre lexicographique, défini par :

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \exists 1 \leq i \leq n : \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i < \beta_i. \quad (\text{C.2})$$

Ainsi, dans $K[x, y, z]$ avec **lp**, on a l'ordre suivant sur les variables

$$1 < z < y < x,$$

et tout monôme z^n est inférieur à un monôme contenant un y , qui lui-même, s'il ne contient pas de facteur en x , est inférieur à un monôme contenant un x (on dira à la déf. C.1.8 ci-dessous, que c'est un ordre d'élimination par rapport aux premières variables).

- **dp** : l'ordre « degré + lexicographique renversé » défini par :

$$\begin{aligned} x^\alpha < x^\beta &\Leftrightarrow \deg(x^\alpha) < \deg(x^\beta) \text{ ou} \\ \deg(x^\alpha) = \deg(x^\beta) &\text{ et } \exists 1 \leq i \leq n : \\ \alpha_n = \beta_n, \dots, \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, &\alpha_i > \beta_i. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, dans $K[x, y, z]$ avec **dp** on a l'ordre suivant :

$$1 < z < y < x < z^2 < yz < xz < y^2 < xy < x^2 \dots$$

(et ainsi de suite en degrés croissants, on dira à la déf. C.1.6 ci-dessous qu'il raffine l'ordre par le degré).

- **Dp** : l'ordre « degré + lexicographique » défini par :

$$\begin{aligned} x^\alpha < x^\beta &\Leftrightarrow \deg(x^\alpha) < \deg(x^\beta) \text{ ou} \\ \deg(x^\alpha) = \deg(x^\beta) &\text{ et } \exists 1 \leq i \leq n : \\ \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, &\alpha_i < \beta_i. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Dans $K[x, y, z]$ avec **Dp** on a l'ordre suivant :

$$1 < z < y < x < z^2 < yz < y^2 < xz < xy < x^2 \dots$$

(et ainsi de suite en degrés croissants).

Ordres locaux

Leur désignation comporte deux lettres dont la seconde est *s* pour *séries*:

- **ls** : l'ordre lexicographique négatif défini par :

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \exists 1 \leq i \leq n : \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i. \quad (\text{C.5})$$

A titre d'exemple, dans $K[x,y,z]$ avec **ls**, on a :

$$1 > z > y > x$$

et pour tout entier n , $z^n > y > x$, etc.

- **ds** : l'ordre par « degrés inversées + lexicographique renversé » :

$$\begin{aligned} x^\alpha < x^\beta &\Leftrightarrow \deg(x^\alpha) > \deg(x^\beta) \text{ ou} \\ \deg(x^\alpha) = \deg(x^\beta) &\text{ et } \exists 1 \leq i \leq n : \\ \alpha_n = \beta_n, \dots, \alpha_{i+1} = \beta_{i+1}, \alpha_i &> \beta_i. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Ainsi, dans $K[x,y,z]$ avec **ds**, on a :

$$1 > x > y > z > x^2 > xy > y^2 > xz > yz > z^2, \dots$$

(à degré fixé, pour un monôme, plus on a d'exposant dans les dernières variables, plus il est petit!).

- **Ds** : l'ordre par « degrés inversés + lexicographique » :

$$\begin{aligned} x^\alpha < x^\beta &\Leftrightarrow \deg(x^\alpha) > \deg(x^\beta) \text{ ou} \\ \deg(x^\alpha) = \deg(x^\beta) &\text{ et } \exists 1 \leq i \leq n : \\ \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i &< \beta_i. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Dans l'exemple de $K[x,y,z]$, avec **Ds**, on a :

$$1 > z > y > x > z^2 > yz > xz > y^2 > xy > x^2 > \dots$$

Déclaration d'anneaux dans Singular

Notation C.1.5. Dans SINGULAR, on commence toujours par déclarer l'anneau dans lequel on travaille, sous la forme suivante :

ring R=c, (var), ordre;

pour déclarer un anneau R de la forme $K[x_1, \dots, x_n]$, où K est un corps dont la caractéristique est donnée par c (0 ou un nombre premier jusqu'à 32003), (var) désigne la suite des indéterminées (x_1, \dots, x_r) , et **ordre** désigne un ordre monomial (cf. les paragraphes précédents).

Par exemple on déclarera :

ring R=0, (x,y,z), lp;

pour un anneau $R = K[x,y,z]$ avec K de caractéristique zéro, et l'ordre lexicographique lp.

On renvoie au manuel de [GPS] (§ 3.2 et appendice B) pour plus de précisions.

C.1.3 Quelques propriétés des ordres monomiaux

Définition C.1.6 (Ordre raffinant le degré ou la valuation).

Sur $K[x]$ on dispose de l'ordre partiel par le degré des polynômes. Les ordres \mathbf{dp} , et \mathbf{Dp} , définis ci-dessus pour les monômes raffinent cet ordre partiel (contrairement à $\mathbf{1p}$).

En revanche, si $<$ est un ordre local, $\text{Loc } K[x] = K[x]_{(x)}$ est formé des éléments des fractions de la forme $f/(1+g)$ (cf. déf. C.1.3) et est donc inclus dans l'anneau $K[[x]]$ des séries formelles, qui est muni d'un ordre partiel par la valuation val des séries.

Si on note $M = (x_1, \dots, x_n)$ l'idéal maximal de $\text{Loc } K[x]$ cet ordre correspond à la fonction d'ordre associé à cet idéal i.e. $\text{val}(f) = i$ si, et seulement si, $f \in M^i \setminus M^{i+1}$ (cf. § C.2.1).

Évidemment, pour les monômes, les notions de valuation et de degrés coïncident! *On dira (par abus de langage) que les ordres \mathbf{ds} et \mathbf{Ds} définis ci-dessus raffinent l'ordre par la valuation (en fait ils raffinent l'ordre «inverse» $f < g \Leftrightarrow \text{val}(f) > \text{val}(g)$).*

Remarque C.1.7. Cette notion d'ordre raffinant la valuation est centrale pour les calculs de *formes initiales* pour l'idéal maximal (cf. § C.2.2), et donc de cônes tangents, multiplicités, et polynômes de Hilbert-Samuel (cf. § C.3).

Définition C.1.8 (Ordre d'élimination).

Si on note $S = k[x_1, \dots, x_n]$ et

$$T = S[y_1, \dots, y_m] = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m],$$

on appelle *ordre d'élimination sur T par rapport aux variables y_1, \dots, y_m* , un ordre monomial $<$ sur T vérifiant la propriété suivante :

$$\text{Si } f \in T \text{ et } L(f) \in S, \text{ alors } f \in S.$$

A titre d'exemple, l'ordre lexicographique $\mathbf{1p}$ défini ci-dessus sur l'anneau $K[x_1, \dots, x_n]$ est un ordre d'élimination par rapport à toute suite de « premières variables » (x_1, \dots, x_i) .

En revanche, son pendant local $\mathbf{1s}$ n'est pas un ordre d'élimination (car avec $\mathbf{1s}$, $z^n > x > xz^n$, par exemple, car en terme de triplets $(0,0,n) > (1,0,0) > (1,0,n)$ pour $\mathbf{1p}$).

On renvoie au § C.4.2, pour l'application de la notion d'ordre d'éliminations.

C.1.4 Notion de base standard

La définition suivante suit [Gr-2000] § 5 (on insiste sur le fait que cette notion est définie pour les idéaux de $\text{Loc } K[x]$) :

Définition C.1.9. Soit $K[x] := K[x_1, \dots, x_n]$ muni d'un ordre monomial $<$, et $R = \text{Loc } K[x]$ l'anneau localisé correspondant (cf. déf. C.1.3). Soit $I \subset R$ un idéal. Un ensemble fini $G \subset I$ est appelé une *base standard* de I si, et seulement si, l'idéal $L(G)$ engendré par les monômes directeurs des éléments de G (cf. déf. C.1.2) coïncide avec l'idéal $L(I)$, c'est-à-dire si pour tout $f \in I \setminus \{0\}$ il existe un $g \in G$ tel que $L(g)$ divise $L(f)$.

Si l'ordre monomial est *global*, une base standard pour $<$ est aussi appelée une *base de Gröbner*.

Remarque C.1.10. Avec les notations précédentes, si G est une base standard de I pour $>$, c'est en particulier un système générateur de l'idéal I (cf. e.g. [CLO] Chap. 2 § 5 Cor. 6 ou exercice 6).

Dans le cas des ordres globaux, le calcul d'une base standard repose sur un algorithme dû à Buchberger et exposé e.g. dans [Ei] §15.3 et 15.4.

Dans le cas local, il faut se passer de la propriété de *bon ordre* des ordres globaux, ce qui demande une adaptation de l'algorithme de Buchberger (voir les surveys [Mor] et [Gr-2000]). On retient le résultat ici :

Théorème C.1.11.

Pour tout ordre monomial $<$ sur $K[x_1, \dots, x_n]$, en notant $R = \text{Loc } K[x]$ l'anneau localisé correspondant (cf. déf. C.1.3), pour tout idéal $I = (f_1, \dots, f_m)$ de R , il existe un algorithme donnant une base standard de I , formée de polynômes g_1, \dots, g_s dans $K[x]$.

Cet algorithme a été implémenté dans SINGULAR, et on obtient une base standard avec le code suivant : on commence par déclarer un anneau, avec un ordre monomial (cf. notation C.1.5), puis :

```
ideal I=f1, ..., fm;
std(I); (donne la base standard)
```

C.2 Lien avec les bases standard pour les filtrations I -adiques

C.2.1 Notion de I -base standard

Si, au lieu de considérer $K[x]$ avec un ordre monomial, on considère un anneau local noethérien (quelconque) (R, m) et un idéal I de R , cet idéal définit une fonction d'ordre ν_I qui à un $x \in R$ associe l'unique entier $i = \nu_I(x)$ défini par la condition :

$$x \in I^i - I^{i+1},$$

(cet entier existe, car d'après le théorème d'intersection de Krull, l'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I^i = (0)$, cf. [Ei] 5.4).

Remarque C.2.1. Aux chapitres 1 et 2, on utilise cette terminologie en disant qu'un élément $f \in I^s - I^{s+1}$ est un élément d'ordre s de I , ce que ici on peut traduire sous la forme $\nu_I(f) = s$.

Comme on a défini la notion de *monôme directeur* $L(f)$ pour un ordre monomial (cf. déf. C.1.2), on rappelle ici la notion de *forme initiale* pour la fonction d'ordre ν_I (déjà donnée à la définition 1.3.5) :

Définition C.2.2. Soit (R, m) un anneau local noethérien et I un idéal de R . Soit $x \in I^s - I^{s+1}$ un élément d'ordre s de I . On appelle *forme initiale* de x pour I (il faudrait dire plutôt pour la filtration I -adique $(I^i)_{i \in \mathbb{N}}$) l'élément $\bar{x} = \text{in}_I(x)$ qui est la classe de x dans I^s/I^{s+1} .

De même, en notant :

$$G(I, R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n / I^{n+1},$$

on définit l'idéal $\text{in}_I(J)$ de $G(I, R)$, qui est l'idéal de $G(I, R)$ engendré par les formes initiales $\text{in}_I(g)$ des éléments $g \in J$.

Suivant e.g. [HIO] § 13, on définit également la notion de *base standard* pour la fonction ν_I (comparer avec la déf. C.1.9), que l'on appellera *I -base standard* :

Définition C.2.3. Soit (R, m) un anneau local noethérien et I un idéal de R . Si $J \subset R$ est un sous-ensemble de R (le plus souvent un idéal), on dira qu'une famille (f_1, \dots, f_m) d'éléments de J est une I -base standard de J si l'idéal $\text{in}_I(J)$ est engendré par les formes initiales $(\text{in}_I(f_1), \dots, \text{in}_I(f_m))$.

Remarque C.2.4. De même qu'à la remarque C.1.10, si (f_1, \dots, f_m) est une I -base standard de J , c'est aussi un système de générateurs de J (cf. e.g. [HIO] (13.3) pour une preuve).

Remarque C.2.5. L'intérêt géométrique de cette notion de I -base standard est donné au chapitre 1 : la connaissance de l'idéal $\text{in}_I(J)$ donne celle de l'anneau gradué $G(I/J, R/J)$, via la relation (cf. (1.32) page 38) :

$$G(I/J, R/J) \simeq G(I, R)/\text{in}_I(J).$$

Cet anneau gradué $G(I/J, R/J)$ décrit la partie exceptionnelle de la transformée stricte de $V(J)$ dans l'éclatement de I dans $\text{Spec } R$ (cf. § 1.1.5).

A priori, la détermination algorithmique d'une base standard pour la fonction d'ordre ν_I n'est pas commode, contrairement au cas des ordres monomiaux (déjà parce qu'il est beaucoup plus compliqué de tester la divisibilité d'un élément par un polynôme que par un monôme). On renvoie à [HIO] § 13 et notamment (13.7) pour des critères sur les I -bases standards et des applications de ces critères au § 14.

Cependant, on va voir dans ce qui suit, que pour une classe assez large d'anneaux locaux, on peut, pour le calcul d'une I -base, se ramener au calcul d'une base standard pour un ordre monomial bien choisi, le cas le plus simple étant le cas où I est l'idéal maximal.

C.2.2 M -Bases standard et ordres locaux raffinant la valuation

Le lemme facile⁴ suivant permettra d'appliquer les algorithmes de calcul d'une base standard pour un ordre monomial à la détermination d'une M -base standard, à condition de choisir un ordre local, raffinant la valuation :

Lemme C.2.6.

Soit S un anneau local ayant la forme $S = K[X_1, \dots, X_d]_{(X_1, \dots, X_d)}$ ou $K[[X_1, \dots, X_d]]$ (ou encore un anneau de séries convergentes si K est valué), et J un idéal de S engendré par une famille (f_1, \dots, f_m) de polynômes f_i de $K[X_1, \dots, X_d]$.

Soit $M = (X_1, \dots, X_d)$ l'idéal maximal de S .

Si $>$ est un ordre monomial local sur S raffinant l'ordre par la valuation (cf. déf. C.1.6), et si (g_1, \dots, g_r) est une base standard de J pour l'ordre monomial $>$ (cf. déf. C.1.9), alors (g_1, \dots, g_r) est aussi une M -base standard de J au sens de la définition C.2.3, c'est-à-dire que l'idéal $\text{in}_M(J)$ est engendré par les formes initiales $\text{in}_M(g_i)$ dans l'anneau $G(M, S) = k[X_1, \dots, X_d]$.

Preuve: La preuve est analogue à celles des remarques C.1.10 et C.2.4 (en plus simple!). Si $f \in J$ est un élément d'ordre s de M , il s'écrit $f = f_s + f'$ où f_s est un polynôme homogène de degré s et $f' \in M^{s+1}$. Via l'identification de $G(M, S)$ avec $K[X_1, \dots, X_r]$, f_s est la forme initiale de f pour M .

Il s'agit de montrer qu'il existe des polynômes $a_i \in K[X_1, \dots, X_r]$ tels que :

$$f - \sum_{i=1}^r a_i g_i \in M^{s+1}, \quad (\text{C.8})$$

On peut écrire le polynôme homogène f_s comme une somme finie $f_s = \sum_{j=1}^t m_j$, où les m_j sont des monômes de degré s .

Comme l'ordre monomial choisi raffine celui par la valuation, le monôme directeur $L(f)$ coïncide avec $L(f_s)$. On choisit alors d'ordonner les monômes m_j dans l'ordre décroissant pour $>$, ainsi $m_1 = L(f_s)$.

⁴ tellement facile que son énoncé est étonnement omis des références [GPS] et [Gr-2000]. Cela explique aussi que nous en incluons la preuve

L'hypothèse $((g_1, \dots, g_r)$ base standard pour $>$) donne alors qu'il existe des $\alpha_i^1 \in K[X_1, \dots, X_r]$ (pour $i = 1, \dots, r$) tels que :

$$L(f - \sum_{i=1}^r \alpha_i^1 g_i) < L(f) = m_1.$$

On peut alors poser $f^1 = f - \sum_{i=1}^r \alpha_i^1 g_i$ et écrire encore $L(f^1)$ en fonction des $L(g_i)$, ce qui donnera des polynômes α_i^2 tels que :

$$L(f^1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 g_i) < L(f^1).$$

En itérant ce procédé, au bout d'au plus t (le nombre de monômes dans f_s) étapes, on aura obtenu des polynômes a_i (égaux à la somme $\sum_{j=1}^t \alpha_i^j$), tels que le monôme directeur de $L(f - \sum_{i=1}^r a_i g_i)$ est inférieur à tous les monômes de degré s , donc a un degré au moins $s + 1$, ce qui donne aussi (C.8) et la conclusion. \square

La proposition précédente a le corollaire « géométrique » suivant (cf. rem. C.2.5) :

Corollaire C.2.7. *Avec les mêmes hypothèses qu'au lemme C.2.6 précédent, si l'on considère l'anneau local $R = S/J$, dont l'idéal maximal est $m = M/J$, on peut, suivant la relation (1.32) rappelée à la remarque C.2.5, calculer l'anneau $G(m, R)$ définissant le cône tangent à $\text{Spec } R$, comme le quotient :*

$$G(m, R) = G(M, S) / \text{in}_M(J) = k[X_1, \dots, X_d] / \text{in}_M(J),$$

où, suivant le lemme C.2.6 précédente, on peut appliquer l'algorithme de calcul d'une base standard pour l'ordre monomial $>$ (thm. C.1.11) au calcul de $\text{in}_M(J)$.

Exemple d'application du corollaire – Dans l'exemple du § 2.1.3, on a calculé $G(m, R)$ pour :

$$R = k[[x, y, z, w]] / (y^2 w^3 - z^2, yz - xw^3, xz - y^3, y^4 - x^2 w^3).$$

Pour appliquer le corollaire, on utilise l'ordre local ds (qui raffine l'ordre par la valuation, cf. C.1.6), et le code utilisé est alors le suivant :

```
ring S=0, (x,y,z,w), ds;
ideal J=y2w3-z2,yz-xw3,xz-y3,y4-x2w3;
std(J);
qui donne la base standard suivante pour J :
```

$$(xz - y^3, yz - xw^3, z^2 - y^2 w^3, y^4 + x^2 w^3),$$

Alors l'idéal $\text{in}_M(J)$ des formes initiales pour la filtration M -adique est :

$$\text{in}_M(J) = (xz, yz, z^2, y^4). \quad (\text{C.9})$$

d'où :

$$G(m, R) = k[x, y, z, w] / (xz, yz, z^2, y^4).$$

C.2.3 Calculs des cônes normaux pour un idéal non maximal

Description de l'algorithme

On expose ici une méthode de calcul due à T. Mora (dans [Mor]) pour l'anneau $G(I, R)$ du cône normal à un idéal I différent de l'idéal maximal.

a) On se donne un anneau local R de la forme :

$$R = k[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)} / J,$$

et on considère un idéal $I \supset J$ de $k[X_1, \dots, X_r]$. On veut donner une présentation de l'anneau gradué $G(I/J, R)$.

Avertissement. Pour simplifier, on suppose que J est fermé pour la topologie I -adique, c'est-à-dire que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (J + I^n) = J, \quad (\text{C.10})$$

ce qui est équivalent (cf. [S-Z] Chap. IV Thm. 12 et 12') à demander que I contienne tous les idéaux premiers associés à J dans R ; cette condition est automatique si J est premier, ce qui nous suffira ici.

Sinon, il faudrait remplacer J par sa fermeture (cf. [Mor] § 6), c'est-à-dire le membre de gauche dans (C.10), mais l'algorithme général de Mora fait aussi ce travail-là.

b) Si $J = (f_1, \dots, f_t)$ et $I = (h_0, \dots, h_r)$ on rajoute $r + 1$ indéterminées (T_0, \dots, T_r) c'est-à-dire qu'on considère l'anneau :

$$k[T_0, \dots, T_r, X_1, \dots, X_n], \quad (\text{C.11})$$

et on le munit d'un *ordre produit* (cf. déf. C.2.8 ci-dessous) sur les deux blocs de variables (T_0, \dots, T_r) et (X_1, \dots, X_r) dont la restriction au premier bloc est un *ordre local qui raffine l'ordre par la valuation* (p.ex. ds cf. déf. C.1.6).

La notion d'ordre produit fait l'objet de la définition suivante :

Définition C.2.8. Soient (T_0, \dots, T_r) et (X_1, \dots, X_n) deux ensembles de variables, munis chacun d'un ordre monomial, notés respectivement $<_T$ et $<_X$. L'ordre produit $(<_T, <_X)$ est l'ordre $<$ sur les monômes en

$$(T_0, \dots, T_r, X_1, \dots, X_n),$$

défini par :

$$T^\alpha X^\beta < T^{\alpha'} X^{\beta'} \Leftrightarrow T^\alpha <_T T^{\alpha'} \text{ ou } (T^\alpha = T^{\alpha'} \text{ et } X^\beta <_X X^{\beta'}).$$

Dans SINGULAR on peut déclarer un anneau avec un ordre produit de la manière suivante :

`ring r=0, (T(0), ..., T(r), X(1), ..., X(n)), (ds(r+1), dp(n));`

où la déclaration `(ds(r+1), dp(n))` définit l'ordre produit de l'ordre local `ds` sur les $r + 1$ premières variables T et de l'ordre global `dp` sur les n dernières.

c) Dans l'anneau (C.11) on considère l'idéal :

$$K := (h_0 - T_0, \dots, h_r - T_r, f_1, \dots, f_s),$$

On calcule alors une *base standard* de cet idéal K pour l'ordre produit défini en-dessous de (C.11). Cela donne des générateurs (k_1, \dots, k_t) de K .

d) On conserve ensuite les *formes initiales pour l'ordre* (T_0, \dots, T_r) -adique (voir la déf. C.2.2) des générateurs k_i de la base standard de K obtenue au c). C'est-à-dire que si on note $m_T := (T_0, \dots, T_r)$ on considère l'idéal :

$$(\text{in}_{m_T}(k_1), \dots, \text{in}_{m_T}(k_t)). \quad (\text{C.12})$$

Proposition C.2.9 (cf. [Mor] lem. 4 et prop. 6).

Avec les hypothèses du a) ci-dessus, l'anneau $G(I/J, R)$ est le quotient de :

$$[T_0, \dots, T_r, X_1, \dots, X_n]$$

par l'idéal défini au (C.12) ci-dessus.

Exemple de Mora

Pour permettre au lecteur de se retrouver par rapport à l'article de Mora (et ses nombreuses notations...), on donne ici le code SINGULAR correspondant à l'exemple 5 de [Mor].

Dans cet exemple Mora considère l'anneau :

$$k[X, Y, Z]/(Y^2 - XZ),$$

dans lequel il éclate l'idéal $J = (Y^2 - XZ, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$.

(On est bien dans les conditions de l'avertissement du a) ci-dessus car $(Y^2 - XZ)$ est premier).

L'idéal J a trois générateurs, donc on rajoute trois indéterminées et on déclare :

```
>ring r=0, (T(0), T(1), T(2), X, Y, Z), (ds(3), dp(3)); (ordre produit vérifiant le b) ci-dessus)
```

```
>ideal K= Y2-XZ-T(0), X3-YZ-T(1), X2Y-Z2-T(2), Y2-XZ; ( cf. c) ci-dessus)
```

```
>ideal Ks=std(K); (calcule la base standard suivant le c) ci-dessus)
```

On obtient alors le résultat suivant pour l'idéal Ks :

```
Ks[1]=T(1)
```

```
Ks[2]=Y2-XZ-T(1)
```

```
Ks[3]=X3-YZ-T(0)
```

```
Ks[4]=T(0)Y+T(1)Z-T(2)X
```

```
Ks[5]=T(0)Z+T(1)X2-T(2)Y
```

```
Ks[6]=X2Y-Z2-T(2)
```

D'après le d) ci-dessus, il suffit alors de conserver la partie homogène de plus bas degré pour le degré total en $(T(0), T(1), T(2))$, c'est-à-dire qu'avec les notations du d) ci-dessus, on obtient pour les $\text{in}_{m_T}(k_i)$ (pour $i = 1, \dots, 6$) :

- les trois générateurs de J à savoir : $Y^2 - XZ, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2$ (qui correspondent aux formes initiales de $Ks[2]$, $Ks[3]$, $Ks[6]$)
- et trois autres générateurs :

$$T_1, T_0Y + T_1Z - T_2X, T_0Z + T_1X^2 - T_2Y.$$

On obtient alors :

$$G(I, R) = (k[X, Y, Z]/J) [T_0, T_2]/(T_0Y - T_2X, T_0Z - T_2Y),$$

ce qui est le même résultat que celui obtenu par Mora dans l'exemple cité.

L'exemple 2.3.30 du chapitre 2

Pour l'exemple cité p. 78, on a utilisé le même algorithme que ci-dessus, avec le résultat donné loc. cit.

Remarque C.2.10. Noter que cet exemple est aussi un exemple d'éclatement d'un système de paramètres, en l'occurrence x_0, x_1 , qui n'est pas une suite régulière.

C.3 Applications : polynômes de Hilbert-Samuel

C.3.1 Du local au global

Au corollaire C.2.7, on a obtenu une expression de l'anneau gradué $G(m, R)$ d'un anneau local $R = S/J$ (avec S anneau régulier de la forme $K[X_1, \dots, X_d]_{[X_1, \dots, X_d]}$), comme un quotient :

$$G(m, R) = k[X_1, \dots, X_d]/\text{in}_M(J), \quad (\text{C.13})$$

où le calcul explicite des générateurs (h_0, \dots, h_r) de l'idéal $\text{in}_M(J)$ est donné par le calcul d'une *base standard* de J pour un ordre local $>$ sur S raffinant l'ordre par la valuation (c'est-à-dire tel que pour deux monômes m_1, m_2 , $\deg m_1 > \deg m_2$ implique $m_1 < m_2$, cf. déf. C.1.6).

En fait, on a encore mieux (cf. [Mor] Prop. 4 ii) pour la démonstration très facile) :

Lemme C.3.1. *Avec les notations précédentes, (en particulier $>$ est l'ordre monomial local considéré sur S , qui raffine l'ordre par la valuation), on considère l'ordre monomial global $>_w$ sur $k[X_1, \dots, X_d]$ défini par :*

$$m_1 >_w m_2 \Leftrightarrow \deg(m_1) > \deg(m_2) \text{ ou } (\deg(m_1) = \deg(m_2) \text{ et } m_1 > m_2).$$

Alors, la base standard (h_0, \dots, h_r) de J obtenue dans S pour l'ordre monomial $>$ a la propriété que les formes initiales $(\text{in}_M(h_0), \dots, \text{in}_M(h_r))$ forment une base standard de $\text{in}_M(J)$ pour l'ordre global $>_w$.

Remarque C.3.2. Ce que l'on gagne avec le lemme précédent est que l'expression de l'équation (C.13) est maintenant une expression de la forme :

$$G(m, R) = K[X_1, \dots, X_d]/(H_0, \dots, H_t), \quad (\text{C.14})$$

où les polynômes homogènes $H_i = \text{in}_M(h_i)$ forment une base de Gröbner (nom des bases standard pour les ordres globaux) de l'idéal (H_0, \dots, H_t) , pour l'ordre global $>_w$.

C.3.2 Fonction de Hilbert d'anneaux gradués $G(m, R)$

Par définition, la fonction de Hilbert-Samuel $F_{m, R}^0(n)$ de l'anneau local (R, m) est la fonction de Hilbert de l'anneau gradué $G(m, R)$ (cf. (1.15) § 1.2.1). Précisément, si on note $[G(m, R)]_n$ la composante homogène de degré n de $G(m, R)$, on a :

$$F_{m, R}^0(n) = \dim_K([G(m, R)]_n),$$

pour un anneau $G(m, R)$ de la forme du (C.13) précédent.

Grâce à l'expression (C.14) de l'anneau gradué $G(m, R)$ comme un quotient de l'anneau des polynômes $k[X_1, \dots, X_d]$ par une *base de Gröbner*, et au résultat standard suivant dû à Macaulay (sur les ordres globaux), il devient facile de calculer la fonction $F_{m, R}^0$. On redonne d'abord le résultat de Macaulay (cf. e.g. [Ei] 15.3) :

Lemme C.3.3.

Pour un idéal homogène I de l'anneau des polynômes $k[X_1, \dots, X_d]$, et si $>_w$ est un ordre monomial global sur $k[X_1, \dots, X_d]$, il y a un isomorphisme de k -espaces vectoriels entre les composantes homogènes des anneaux gradués $K[X_1, \dots, X_d]/I$ et $k[X_1, \dots, X_d]/L(I)$, où $L(I)$ désigne l'idéal engendré par les monômes directeurs des éléments de I (cf. déf. C.1.4).

Corollaire C.3.4. Soit $S = K[X_1, \dots, X_d]_{(X_1, \dots, X_d)}$ et $R = S/J$ quotient de S par un idéal J . On note m l'idéal maximal de R .

A partir de l'expression (C.14) de la remarque C.3.2 donnant l'anneau gradué $G(m, R)$ comme un quotient de $k[X_1, \dots, X_d]$ par un idéal (H_0, \dots, H_t) dont les générateurs forment une base de Gröbner pour l'ordre global $>_w$, on déduit du lemme C.3.3, que le calcul de la fonction de Hilbert $F_{m, R}^0$ est le même que celui de la fonction de Hilbert de l'anneau gradué :

$$k[X_1, \dots, X_n]/(L(H_0), \dots, L(H_t)),$$

quotient de $K[X_1, \dots, X_n]$ par un idéal monomial.

C.3.3 Code utilisé

Si les paragraphes précédents permettent de comprendre comment on déduit les calculs des fonctions de Hilbert à partir de l'algorithme du cône tangent (local) et d'algorithmes globaux bien connus (cf. cor. C.3.4), le calcul pratique de la fonction de Hilbert-Samuel $F_{m, R}^0$ (et donc aussi de la multiplicité $e(m, R)$) se fait avec SINGULAR directement en déclarant un anneau avec un ordre local raffinant l'ordre par la valuation (i.e. `ds` ou `Ds` cf. déf. C.1.6) et les commandes `hilb` et `mult`.

Ainsi, pour les calculs de multiplicités du § 2.2.3 exemple 2.2.10, le code utilisé est le suivant :

```
ring S=0, (x,y,z,w), ds;
ideal J=y2w3-z2,yz-xw3,xz-y3,y4-x2w3;
ideal Js=std(J);
mult(Js);
```

donne le résultat : $e(m, R) = 4$.

Pour les sections par x, y, z :

```
ideal Cx=J, x;
ideal Cxs=std(Cx);
mult(Cxs);
```

donne la multiplicité $e(m/x, R/x) = 4$.

(De même pour le calcul des multiplicités $e(m/y, R/y) = 5$, et $e(m/z, R/z) = 11$.)

C.3.4 Fonction de Hilbert pour un idéal m -primaire $I \neq m$

L'algorithme décrit brièvement au § C.2.3 (convenablement prolongé...) permet aussi de calculer la fonction de Hilbert $F_{I, R}$ en se ramenant à des bases de Gröbner pour un ordre global sur la deuxième composante de l'ordre produit déclaré au (C.11). Ceci est décrit de manière détaillée dans [Mo-Ro].

C.4 Algorithmes avec des ordres globaux

C.4.1 Calcul de décomposition primaire

Le calcul de la décomposition primaire avec Singular ne se fait pas dans les anneaux locaux, mais dans les anneaux de polynômes, c'est-à-dire avec un ordre global (p.ex. l'ordre lexicographique `lp`). On renvoie à [DGP] pour une présentation des approches algorithmiques pour la décomposition primaire.

Dans l'exemple du § 2.1.3, à partir de l'idéal $\text{in}_M(J) = (xz, yz, z^2, y^4)$ obtenu au (C.9), on utilise le code suivant :

```

ring P=0,(x,y,z,w),lp;
ideal inJ=xz,yz,z2,y4;
LIB "primdec.lib";
primdecGTZ(inJ);

```

on obtient la décomposition primaire suivante pour $\text{in}(J)$:

$$\text{in}(J) = (Z, Y^4) \cap (Z^2, YZ, Y^4, X),$$

qui est celle donnée au (2.4) du § 2.1.3.

C.4.2 Images d'applications, méthode d'élimination

La méthode d'élimination dans les anneaux de polynômes en utilisant les bases de Gröbner est bien connue et décrite dans les manuels e.g. [Ei] 15.10.4: étant donné un anneau de polynôme $S = k[x_1, \dots, x_n]$ et un sur-anneau $T = S[y_1, \dots, y_m]$ on veut calculer l'intersection $I \cap S$ d'un idéal I de T avec S . Pour cela, on vérifie (cf. loc. cit.) qu'il suffit de calculer une base standard de I pour un ordre monomial (global) sur T qui est un ordre d'élimination pour les variables y_1, \dots, y_m (cf. déf. C.1.8).

Avec SINGULAR, on obtient directement le résultat avec la commande `elim1`, du package `elim.lib`: étonnamment, on déclare un anneau avec un ordre monomial quelconque (pas forcément d'élimination) mais cet ordre ne sera en fait attribué qu'aux variables non éliminées, et SINGULAR choisira un ordre d'élimination pour les variables à éliminer.

Ainsi le calcul du b) de la preuve de la prop. 1.3.17 a été obtenu avec le code suivant :

```

LIB "elim.lib";
ring r=0,(x,y,z,t),dp;
ideal i=x-t6,y-t7,z-t15;
elim1(i,t);
qui élimine la variable t.

```


Deuxième partie

Résolution des surfaces par éclatements normalisés

1 Introduction

1.1 Résolution des singularités des courbes

Soit $C := \{f = 0\}$ une courbe algébrique complexe plane donnée par une fonction polynomiale

$$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

On suppose que le polynôme f est réduit, c'est-à-dire qu'il n'a pas de facteur carré dans sa décomposition en facteurs polynomiaux irréductibles. Dans ce cas, un point singulier de C est un point où la différentielle de f s'annule. On sait que les points singuliers de C sont en nombre fini. Une *résolution des singularités de C* est un morphisme algébrique $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ d'une courbe non singulière \tilde{C} dans C qui est propre, à fibres finies, et qui induit un isomorphisme au-dessus des points non singuliers de C . On peut alors remarquer qu'au-dessus d'un petit voisinage U d'un point x de C (pour la topologie induite par celle de \mathbb{C}), la préimage $\pi^{-1}(U)$ est isomorphe à une union disjointe de disques de la droite complexe \mathbb{C} . La restriction de π à l'un des disques n'est autre qu'une *paramétrisation locale* de la courbe C en x .

Ainsi la résolution des singularités d'une courbe est donnée localement par des paramétrisations locales de la courbe. En fait, si la courbe a plusieurs composantes analytiques en la singularité, appelées branches de la courbe en ce point singulier, il y a une paramétrisation par branche.

i) Une construction explicite d'une paramétrisation locale en un point (a,b) de \mathbb{C}^2 est donnée par le Théorème de Puiseux dont la démonstration n'est autre que la méthode d'approximation successive de Newton pour trouver les séries s à puissances rationnelles en $x - a$ qui sont solutions de

$$f(x,s) = 0,$$

quand $f(x,b)$ n'est pas identiquement nul (cf. [Chn] Chap. VIII, et les mémoires originaux [Nt] et [Pu]).

Cette méthode de paramétrage, contrairement aux méthodes des ii), et iii) ci-dessous, est spécifique à la caractéristique zéro. Pour le cas de la caractéristique positive, et la notion de développement de Hamburger-Noether, on renvoie au livre de A. Campillo (cf. [Ca]). Il est à noter que le passage par des corps de caractéristique positive permet un calcul rapide des développements de Puiseux des courbes complexes (voir le module *hnoether* de SINGULAR, cf. [GPS]).

ii) Une autre méthode pour résoudre les singularités des courbes planes consiste à composer une suite finie d'applications qui sont des *éclatements de points* (voir § 2.3). Cette méthode, due essentiellement à M. Noether (dans [Noe], voir aussi le *Bericht* donné dans [N-B] Chap. 6), donne en fait une *résolution plongée* de la courbe plane, c'est-à-dire un morphisme algébrique propre ρ d'une surface non singulière \tilde{S} sur le plan \mathbb{C}^2 ,

- qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert $V := \mathbb{C}^2 - \{z_1, \dots, z_k\}$ de \mathbb{C}^2 , complémentaire des points singuliers de C ,
- tel que la fonction composée $f \circ \rho$ définisse dans \tilde{S} un *diviseur à croisements normaux*, c'est-à-dire s'écrive localement sous la forme $x^a y^b$ dans un système de coordonnées (x,y) de \tilde{S} ,
- et qui induit une résolution des singularités de C , en restreignant ρ à la fermeture dans \tilde{S} de l'image inverse $\rho^{-1}(C - \{z_1, \dots, z_k\})$ de la courbe moins ses points singuliers, appelée *transformée stricte de C par ρ* .

Ce processus est *effectif*, car on dispose d'un invariant qui diminue strictement après chaque étape: le nombre de Milnor $\mu(C)$ (somme des nombres de Milnor locaux cf. § 4.2). Voir

p.ex. [Ph] pour la formule reliant le nombre de Milnor de la transformée stricte au nombre de Milnor de C .

Le lecteur trouvera une introduction très détaillée aux méthodes du i) et ii) dans [B-K] Chap. 8.

iii) Enfin, un point de vue moderne (immédiat mais peu algorithmique), pour obtenir la résolution des singularités d'une courbe algébrique réduite est de considérer l'opération de *normalisation* (cf. § 2.2).

1.2 Cas des singularités de dimension supérieure

On renvoie au § 2.1 pour la définition générale d'une singularité en toute dimension. La notion de normalisation (déjà évoquée au § 1.1 iii)) explique (à cause de l'existence de variétés de dimension supérieure normales et singulières cf. § 2.2), qu'on ne peut espérer en dimension supérieure obtenir en général des paramétrisations locales comme pour les courbes.

Par contre, *la notion de résolution des singularités* garde tout son intérêt, et H. Hironaka a démontré (mieux, cf. [Hk-2] p. 132, Main theorem I) :

Théorème (Hironaka).⁵

Soit V une variété algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Il existe une résolution des singularités de V , c'est-à-dire un morphisme algébrique $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ d'une variété algébrique sans singularité \tilde{V} dans V qui soit surjectif, propre et qui induit un isomorphisme au-dessus du sous-ensemble des points non singuliers de V .

1.3 Cas particulier des surfaces

Dans le cas particulier des surfaces (variétés algébriques de dimension deux), il existe plusieurs approches plus élémentaires que celle de Hironaka pour obtenir la résolution des singularités.

Pour faire un parallèle avec les points i), ii), iii) du § 1.1, le iii), dans le cas des surfaces, dit que, pour résoudre les surfaces algébriques, on peut se restreindre aux surfaces normales (cf. § 2.2).

i) L'approche du § 1.1 i), par paramétrisation, a pu être adaptée au cas des surfaces, en paramétrisant des morceaux (« coins » ou « wedges ») de la surface, en montrant que ces paramétrisations se recollent au dessus du lieu non singulier, et en obtenant comme espace de départ une variété lisse (non affine dès que la surface considérée au départ n'est pas lisse). Cela a donné la première démonstration complète du théorème de résolution pour les surfaces, due à R. Walker (cf. [Wk]) à partir de l'important travail de H. Jung (cf. [Ju] et § 1.4 infra).

ii) L'approche du § 1.1 ii) par éclatement de points s'adapte également au cas des surfaces, à condition de composer ces éclatements avec des normalisations (voir pourquoi au § 2.3). Précisément, O. Zariski a obtenu dans [Za-2] le théorème suivant :

Théorème (Zariski). *Soit S une surface algébrique normale sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Il existe une résolution des singularités de S qui soit la composée d'un nombre fini d'éclatements normalisés.*

Contrairement au § 1.1 ii), cela ne donne pas une *résolution plongée* de la surface. Le lecteur intéressé par la résolution plongée des surfaces consultera [Or] et [Za-4] (en caractéristique 0) et [Ab-2].

5. Pour des développements récents sur la désingularisation en toute dimension en caractéristique zéro, le lecteur consultera [B-M], [E-V].

1.4 Le théorème démontré ici

Le but du travail présenté ici est de donner un théorème de résolution des singularités de surfaces (théorème 8.2 cité ci-dessous) qui redémontre et précise le théorème de résolution de Zariski ci-dessus, et dont on espère qu'il pourra permettre ultérieurement de donner une borne au nombre total d'éclatements normalisés nécessaires pour résoudre les singularités.

Pour ce qui est de la théorie des singularités de surfaces, on a pris le parti d'être aussi introductif que possible, et on aimerait que cet exposé puisse permettre au lecteur d'acquérir une meilleure compréhension d'idées et de techniques de la théorie locale des surfaces, surtout à partir des courbes tracées sur ces singularités (cf. début du § 1.5 infra).

On considère le problème localement, c'est-à-dire qu'on considère un germe (S,O) de surface (cf. § 2), et on se place sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Le principe de Lefschetz (cf. p.ex. [Sho] Chap. 2, § 1.10) permet cependant d'en déduire le résultat pour les variétés algébriques sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro (cf. § 9).

L'idée est d'associer à toute singularité (S,O) une paire d'entiers (ν,γ) formée de la multiplicité $\nu = e(S,O)$ de cette singularité et de sa multiplicité polaire γ (multiplicité du discriminant d'une projection générique, cf. déf. 8.1), et de montrer alors le théorème suivant :

Théorème (8.2). *i) Au bout d'un nombre fini $f = N_S$ d'éclatements normalisés à partir de (S,O) , on obtient une surface \overline{S}_f dont toutes les singularités (\overline{S}_f, O_f^i) ont des paires (ν_i, γ_i) strictement plus petites pour l'ordre lexicographique que la paire (ν, γ) correspondant à (S,O) .*

ii) Ce nombre N_S est inférieur au nombre d'éclatements nécessaire pour obtenir une résolution plongée du discriminant d'une projection générique de la surface (S,O) sur \mathbb{C}^2 .

Le théorème de résolution de Zariski ci-dessus est une conséquence de ce dernier théorème, car un point d'une surface normale est non-singulier si, et seulement si, sa multiplicité ou sa multiplicité polaire égale 1 (cf. § 8.1). En revanche, le ii) apporte un contrôle du nombre d'éclatements qui n'est pas donné par le théorème de Zariski.

Avertissement – *La démonstration du théorème 8.2 ci-dessus est donnée aux § 7 et § 8. Le lecteur suffisamment informé de la théorie des singularités devrait commencer sa lecture à cet endroit, pour revenir ensuite aux techniques des § 5 et § 6, qui ont leur intérêt propre. Par ailleurs, la lecture de ce qui suit sera plus facile si l'on consulte le diagramme p. 176 et la description du processus faite au § 8.2.*

On voudrait ici mettre en avant les deux points clefs de la démonstration. Le premier est bien connu, le second constitue l'aspect original de notre travail :

i) Premier point clef – Pour une projection *générique* (cf. déf. 3.1)

$$p : S \rightarrow U \subset \mathbb{C}^2,$$

d'un petit représentant S d'une singularité de surface normale (S,O) sur un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{C}^2 , si $e_0 : U_1 \rightarrow U$ est l'éclatement de 0 dans U , la première étape de notre processus est de considérer l'application $p_1 : \Sigma_1 \rightarrow U_1$ déduite de p par le changement de base e_0 (cf. diagramme p. 176).

Le premier point clef est alors que la normalisation $\overline{\Sigma}_1$ de Σ_1 coïncide avec l'éclatement normalisé \overline{S}_1 de S en O (cf. prop. 3.15 et le diagramme loc. cit.).

Si, sur la surface \overline{S}_1 obtenue, il y a un point O_1 de même multiplicité que O , alors la projection $p_1 \circ n_1 : \overline{S}_1 = \overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1 \rightarrow U_1$ sur U_1 est encore une projection générique pour le germe (\overline{S}_1, O_1) , et on itère le processus : voir le diagramme p. 179.

Remarque. Cette méthode de pull-back successifs remonte à l'idée de Jung (cf. [Ju]) qui

consiste à résoudre le discriminant d'une projection de la surface sur \mathbb{C}^2 . Cette méthode, complétée par les travaux de Walker et Hirzebruch (cf. [Wk] et [Hz]), donne une méthode de résolution des surfaces complètement indépendante de celle de Zariski, et n'utilisant pas la notion de normalisation (voir [La-1] Chap. 2 pour un exposé très détaillé de cette méthode et [Ne] Chap. 1 Appendix, pour un algorithme déduit de cette méthode, pour des surfaces particulières $z^n = f(x,y)$).

On peut dire donc qu'ici, on va démontrer notre théorème 8.2 à partir de la méthode de Jung. On souligne cependant ici les deux différences essentielles entre notre méthode et celle de Jung :

- La première différence est qu'on ne s'autorise à faire le pull-back que si la multiplicité ne baisse pas (pour garder des projections génériques, cf. le premier point-clef ci-dessus), et qu'à chaque étape on considère les normalisations des pull-back obtenus.
- La seconde différence est que dans la méthode de Jung on est ramené à l'étude d'une classe de singularités particulières, dites *quasi-ordinaires* (dont les normalisations sont aussi appelées singularités de Jung-Hirzebruch cf. [BPV] Chap. 3 § 5), pour lesquelles le discriminant d'une projection sur \mathbb{C}^2 présente un point double ordinaire. Avec notre méthode, on est ramené à l'étude d'une classe différente de singularités, *les singularités minimales*, introduite par J. Kollár (cf. § 6): ceci est expliqué dans le *second point clef* ci-dessous.

Ce qui est commun entre la méthode de Jung et notre processus est le fait suivant : si, en itérant le processus du i), on obtient à chaque étape un point singulier (\overline{S}_i, O_i) de même multiplicité que la multiplicité de (S, O) , on aboutit à une singularité (\overline{S}_f, O_f) , de même multiplicité que (S, O) , qui est au-dessus d'un point double ordinaire du discriminant. A ce stade, si on voulait seulement montrer le théorème de Zariski de résolution par éclatements normalisés, on pourrait conclure grâce à l'étude des singularités de Jung-Hirzebruch (cf. [BPV] III, § 5). Mais ici, on préfère considérer l'évolution de la multiplicité polaire γ (pour pouvoir montrer le ii) du théorème 8.2), et on fait l'observation suivante :

ii) Second point clef – Grâce à la description de l'évolution du discriminant dans le processus ci-dessus (cf. § 7), et avec les mêmes notations, on montre (prop. 8.4) que ou bien la *multiplicité polaire* $\gamma(\overline{S}_f, O_f)$ est strictement plus petite que $\gamma(S, O)$, ou bien la singularité (S, O) considérée au début est une *singularité minimale*.

On est donc ramené à l'étude de ces *singularités minimales* :

Les singularités minimales de surfaces normales sont aussi connues dans la littérature comme *les singularités rationnelles à cycle fondamental réduit*. Mais cette définition fait explicitement référence à une résolution (même si on peut aussi définir la notion de singularité rationnelle sans parler de résolution cf. [La-2]).

L'intérêt de la définition de J. Kollár (déf. 6.1) est de définir, sans référence à une résolution, la notion de singularité minimale, en toute dimension, comme singularité Cohen-Macaulay à *multiplicité minimale*, et à cône tangent réduit.

On vérifie enfin (§ 8.4) que si la singularité de départ (S, O) est minimale, le processus décrit dans les i) et ii) précédents aboutit directement à une résolution des singularités (en particulier fait chuter la multiplicité polaire!).

Conclusion – *Ainsi, les singularités (\overline{S}_f, O_f) au-dessus de la résolution du discriminant (si la multiplicité n'a pas baissé avant!) ont une multiplicité polaire inférieure à celle de la singularité (S, O) de départ. Ce résultat donne bien le ii) du théorème 8.2.*

1.5 Sommaire

Le lecteur trouvera une **table des matières** à la page 4. On donne ici la motivation de chacune des parties.

Les premières sections sont de nature introductive : elles veulent aussi (surtout à partir du § 3) illustrer la thèse fondamentale de ce travail qui est l'importance de l'étude des courbes tracées sur une singularité de surface pour l'étude de celle-ci. L'avatar algébrique de ce point de vue est l'étude des valuations sur une singularité (cf. [Za-2]). Un autre point de vue pour l'étude de l'ensemble de ces courbes est donné par le « programme de Nash » (cf. [Ns]), repris notamment dans les travaux de M. Lejeune-Jalabert et G. Gonzalez-Sprinberg (cf. [G-L2] et les références qui s'y trouvent).

Le § 2 familiarise le lecteur avec les singularités de surfaces, et les notions de normalisation et d'éclatement de point. Un exemple montre que le processus d'éclatement normalisé est à l'origine de singularités apparemment « plus compliquées » que la singularité initiale !

Le § 3 passe en revue, pour la commodité du lecteur, les notions classiques de multiplicité, de clôture intégrale des idéaux et d'éclatement, et l'interaction profonde qui existe entre ces trois notions, bien connue depuis le séminaire de M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier [LJ-Te]. On insiste spécialement sur la théorie de la multiplicité au § 3.1. Comme indiqué au début de ce § 3, le résultat principal pour la suite est la proposition 3.15.

Le § 4 est consacré à la notion de discriminant. On distingue ici la notion de *discriminant Fitting* (§ 4.1) définie par B. Teissier dans [Te-76], de celle de *discriminant divisoriel* défini comme la partie divisorielle de ce discriminant Fitting (§ 4.4). La proposition du § 4.3 et l'exemple de calcul du § 4.5 mettent en évidence les relations et les différences entre ces deux notions.

Cependant, si l'on s'intéresse seulement à la multiplicité du discriminant Fitting, celle-ci ne tient pas compte des composantes immergées. On la calcule donc à partir du discriminant divisoriel, et elle est reliée à la notion de nombre de Milnor par la formule de Lê-Greuel (lem. 4.9).

On a aussi inclus, au § 4.2, une présentation des principales propriétés du *nombre de Milnor* défini par R. Buchweitz et G.M. Greuel pour toute courbe complexe réduite, en soulignant pour chacune ses applications dans les sections suivantes.

Le § 5 étudie les courbes tracées sur une singularité qui sont définies par une équation (diviseurs de Cartier) : en utilisant un plongement de la singularité, on peut les considérer comme des sections hyperplanes. Le cône tangent à la singularité défini au § 5.1 joue un rôle important pour l'étude de ces sections. Au § 5.2, on insiste sur la structure analytique des sections hyperplanes, et notamment le problème d'éventuelles composantes immergées : le § 5.2 expose les principales propriétés des anneaux Cohen-Macaulay utilisées par la suite.

On définit alors deux conditions d'incidence pour un hyperplan H :
 – d'abord au § 5.3, la notion d'hyperplan *v-superficiel* qui permet de contrôler la multiplicité d'une section, ce qui sera essentiel au § 6.
 – ensuite, au § 5.4, la notion d'hyperplan *général*, définie pour une surface à singularité non nécessairement isolée (ce qui sera encore utile au § 6). On explicite ensuite des propriétés particulières aux sections hyperplanes générales des surfaces normales (§ 5.4), qui interviendront au § 7.

On renvoie à la partie I de la thèse (et notamment les chapitres 2 et 3) pour plus de détails sur les techniques et résultats évoqués dans ce § 5.

La preuve proprement dite du théorème de résolution (8.2) occupe les trois dernières sections :

Le § 6 expose la théorie des singularités minimales (essentiellement en vue de la dimension un et deux). On a repris des énoncés de J. Kollár dans [Ko], en donnant toutes les

démonstrations : presque toutes utilisent le résultat fondamental de J. Sally qui donne que le cône tangent à une singularité minimale est Cohen-Macaulay (cf. thm. 6.2). On a fait aussi un usage intensif des notions introduites au § 5. Cette section culmine au théorème 6.9 qui donne une preuve élémentaire, nouvelle, du fait que l'éclatement d'une singularité minimale de surface normale est une surface *normale*, à *singularités minimales*, ce qui est la première étape pour notre théorème de résolution (8.2).

Le § 7, intitulé *Calcul du discriminant après un éclatement*, est la seconde étape vers la preuve du théorème.

Le § 8, enfin, introduit la paire (ν, γ) attachée à une singularité, formée de la multiplicité et de la multiplicité polaire (au sens de la définition 8.1), énonce et démontre alors notre théorème de résolution par éclatements normalisés (théorème 8.2) suivant le schéma indiqué au § 1.4.

2 Éclatement normalisé d'une surface complexe

2.1 Singularités de courbes et de surfaces

On peut, dans un premier temps, se donner une singularité de surface (resp. de courbe) complexe comme un *germe d'ensemble analytique* de dimension 2 (resp. 1). C'est-à-dire qu'une telle singularité (S, O) (resp. (C, O)) est donnée comme une classe d'équivalence de sous-ensembles analytiques X d'un voisinage ouvert U de O dans \mathbb{C}^N , de la forme

$$X = \{x \in U, f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\},$$

(où les f_i sont des fonctions holomorphes dans U), en identifiant deux tels ensembles $X_1 \subset U_1$ et $X_2 \subset U_2$ s'il existe un ouvert $\Omega \subset U_1 \cap U_2$ contenant O tel que $X_1 \cap \Omega = X_2 \cap \Omega$. (On utilise [Gu] comme référence, voir ici le Chap. A pour plus de détails sur les définitions. On trouvera aussi dans [Nar] chap. 3 les principaux résultats ci-dessous).

On peut inversement considérer l'idéal $I(X, O)$ de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, O}$ des germes en O de fonctions holomorphes dans \mathbb{C}^N , formé des germes de fonctions qui s'annulent sur (X, O) (cf. [Gu] B 3). On montre que cet idéal est engendré par un nombre fini de germes de fonctions (g_1, \dots, g_l) (cf. [Gu] A 8).

On définit alors *l'anneau local* attaché au germe (X, O) comme

$$\mathcal{O}_{X, O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, O} / I(X, O).$$

Cet anneau attaché à (X, O) contient toute l'information sur le germe (X, O) (cf. [Gu] B 17). Il est *réduit* (i.e. sans éléments nilpotents) car l'idéal $I(X, O)$ est radical (i.e. si $f^m \in I(X, O)$ alors $f \in I(X, O)$).

On dit qu'un germe d'ensemble analytique (X, O) est *irréductible* si, et seulement si, il ne peut pas s'écrire sous la forme $X = X_1 \cup X_2$ avec X_1, X_2 deux germes d'ensembles analytiques distincts de X . Cette propriété est équivalente à la propriété : $I(X, O)$ est un idéal premier, ou encore $\mathcal{O}_{X, O}$ est un anneau intègre (cf. [Gu] B 6).

D'une manière générale, un germe d'ensemble analytique (X, O) quelconque admet une décomposition unique (à l'ordre près) en germes irréductibles :

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r,$$

appelés *composantes irréductibles* de (X, O) (cf. [Gu] B 7).

Pour un germe *irréductible* (X, O) , on définit sa dimension à partir du *critère jacobien* suivant sur la famille (g_1, \dots, g_l) définissant l'idéal *radical* $I(X, O)$. Soit

$$X = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0\}$$

un petit représentant de (X, O) dans un ouvert U sur lequel les g_i définissent des fonctions holomorphes. Si on définit pour tout $p \in X$ le rang :

$$r(p) = \text{rang} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i \in \{1, \dots, l\}, j \in \{1, \dots, N\}},$$

alors la dimension d du germe (X, O) est la valeur minimale des $N - r(p)$ pour $p \in X$.

Pour un germe *réductible* $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$, on définit la dimension de X comme le maximum des dimensions $\dim X_i$ des composantes irréductibles. Cette dimension coïncide avec la *dimension de Krull* de l'anneau local attaché au germe (X, O) (cf. [Gu] G 20).

On dit que le germe (X, O) de dimension d est *lisse* si $N - r(O) = d$. Le lecteur vérifiera que cela implique que (X, O) est irréductible.

D'une manière générale, si $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ est un représentant assez petit d'une décomposition d'un germe d'espace analytique réductible, et $d_i = \dim X_i$, on définit *le lieu singulier* de X comme le germe de l'ensemble analytique

$$\text{Sing } X = \bigcup_{i=1}^r \{p \in X_i, r(p) < N - d_i\},$$

et on dit que (X, O) est à *singularité isolée* si $\text{Sing } X = O$.

A bien des points de vue, les singularités les plus simples sont les singularités d'*hypersurfaces* : c'est-à-dire pour les courbes, les singularités de courbes planes $C = \{(x, y) \in U \subset \mathbb{C}^2, f(x, y) = 0\}$, et pour les surfaces celles de la forme $S = \{(x, y, z) \in U \subset \mathbb{C}^3, f(x, y, z) = 0\}$. Par exemple la singularité A_1 donnée dans \mathbb{C}^3 par l'équation

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

est une hypersurface à singularité isolée.

Viennent ensuite les singularités d'*intersections complètes* pour lesquelles le nombre minimal l de générateurs de l'idéal $I(X, O)$ est égal à la codimension $N - \dim(X, O)$ de la singularité dans \mathbb{C}^N . Le lecteur trouvera une étude détaillée de cette classe très riche de singularités dans [Lo].

Cependant, la classe des singularités isolées d'intersections complètes n'est pas stable par le processus d'éclatements normalisés considéré ici (cf. § 2.3). C'est pourquoi, on se place ici dans le cadre plus général des singularités de surfaces normales, définies au § 2.2.

Par ailleurs, notamment lorsqu'on s'intéresse à la notion d'intersection, ou de cône tangent (cf. § 5), on est amené à considérer une singularité comme un germe d'*espace analytique*. Cet objet géométrique est attaché à un anneau analytique local non nécessairement réduit (i.e. pouvant avoir des éléments nilpotents). On renvoie à [Ho] II, ou à [Nar] Chap. 4, pour cette notion d'espace analytique. (Voir aussi les constructions du § 3).

Ainsi on considérera la courbe $x^2 = 0$ et la courbe $x = 0$ dans le plan \mathbb{C}^2 comme deux espaces analytiques distincts.

2.2 Normalisation

La notion de normalisation repose sur la construction algébrique suivante (cf. [S-Z] Chap. 5). Pour un anneau réduit A , en notant K son anneau total des fractions, on dit qu'un élément $x \in K$ est entier sur A s'il est solution d'une équation *unitaire*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

où les a_i sont dans A .

On montre que l'ensemble \overline{A} des éléments de K entiers sur A est un anneau, appelé *clôture intégrale* de l'anneau A dans K (cf. [S-Z] Chap. 5 § 1). On dira encore qu'un anneau local est *normal* s'il est intègre et s'il est égal à sa clôture intégrale dans son corps des fractions.

L'application de cette notion en géométrie est due à O. Zariski dans le cadre de la géométrie algébrique (cf. [Za-1]). Le lecteur trouvera la construction de la normalisation d'une variété algébrique dans [Sha] Chap. II, § 5, par exemple. Comme souvent, la construction analogue en géométrie analytique est moins directe : on expose ici les définitions et résultats qui nous seront utiles, en renvoyant à [Nar] Chap. 6 pour les démonstrations.

Un germe d'espace analytique sera dit *normal* si l'anneau local correspondant est normal (cf. supra). Une propriété fondamentale des ensembles analytiques normaux (i.e. normaux en tout point) est que le lieu singulier est de codimension au moins deux (cf. le critère algébrique de Serre prop. 5.6 iv). Aussi une courbe normale est lisse, et une surface normale est à singularité isolée.

Inversement, le même critère de Serre assure que les singularités isolées d'intersection complète sont normales (cf. § 5.2).

Il se trouve que, pour un espace analytique réduit X , on peut construire un espace analytique normal \overline{X} et un morphisme $n : \overline{X} \rightarrow X$ appelé *normalisation* tel qu'au dessus d'un point $x \in X$, pour $n^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_r\}$ le produit direct $\prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{\overline{X}, y_i}$ soit exactement la clôture intégrale $\overline{\mathcal{O}_{X,x}}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans son anneau total des fractions (cf. [Nar] Chap. 6 Thm. 4).

Pour les courbes, ce processus donne une résolution des singularités (cf. § 1.1).

Pour les surfaces ce processus commence par séparer chaque composante irréductible locale, et au-dessus de chacune fabrique une surface à singularité isolée.

Deux problèmes se posent avec ce processus : le premier est qu'en pratique, la normalisation se calcule difficilement (cependant un algorithme dû à T. de Jong est implémenté dans SINGULAR cf. [DJGP] et [GPS]. Voir aussi [Tr].)

Le second est que la normalisation d'une hypersurface, ou d'une intersection complète à singularité non isolée n'est plus une hypersurface (ou même une intersection complète). Par exemple, la singularité d'hypersurface (S, O) définie dans les coordonnées (u, v, w) de \mathbb{C}^3 par

$$u^9 + u^4 v^{10} + w^6 = 0, \quad (1)$$

admet pour normalisation la restriction de la projection $\mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^3$, définie par

$$(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \mapsto (t_1, t_2, t_3),$$

à la surface \overline{S} définie par les quatre équations suivantes dans \mathbb{C}^5 :

$$(t_4^2 + t_3 t_5, t_3 t_4 - t_1 t_5, t_3^2 + t_1 t_4, t_2^{10} + t_1^5 + t_5^2). \quad (2)$$

On peut montrer en calculant une résolution libre de l'anneau local correspondant (par exemple avec la commande `res` de SINGULAR) que cette singularité n'est pas Gorenstein (cf. [Ei] (21.16)), en particulier ce n'est pas une intersection complète (cf. [Ei] (21.19)).

2.3 Éclatement (et éclatement normalisé) d'une singularité en O

La construction suivante sera reprise avec plus de généralité au § 3.2.

Soit $\widetilde{\mathbb{C}^N}$ le sous-espace de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1}$ défini par les équations $(x_i T_j - x_j T_i)$ (pour i, j dans $\{1, \dots, N\}$), en notant $(T_1 : \dots : T_N)$ les coordonnées dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1}$. On note e_0 la restriction à $\widetilde{\mathbb{C}^N}$ de la première projection :

$$\mathbb{C}^N \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}^N.$$

L'application obtenue $e_0 : \widetilde{\mathbb{C}^N} \rightarrow \mathbb{C}^N$ est appelée *l'éclatement de O dans \mathbb{C}^N* .

Pour un représentant S d'une singularité (S, O) de surface (resp. de courbe) réduite dans \mathbb{C}^N , on définit alors *l'éclatement de O dans S* comme l'ensemble analytique S_1 adhérence de $(e_0)^{-1}(S \setminus \{O\})$ dans $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1}$. (La construction du § 3.2 montre que c'est effectivement un ensemble analytique).

Du point de vue de la résolution des singularités, on sait qu'on peut résoudre une singularité de courbe par une suite finie d'éclatements de points (cf. § 1.1).

Pour les surfaces, le premier obstacle est que l'éclatement d'une surface à singularité isolée n'est plus nécessairement à singularité isolée. Par exemple, si l'on considère la singularité de surface (S, O) définie dans \mathbb{C}^3 par l'équation :

$$x^{15} + y^{10} + z^6 = 0, \quad (3)$$

alors un ouvert de l'éclatement S_1 de S en O s'écrit dans une carte de coordonnées (u, v, w) de $\widetilde{\mathbb{C}^3}$ sous la forme $u^9 + u^4 v^{10} + w^6 = 0$, ce qui est la singularité non isolée définie au (1), § 2.2.

On définit *l'éclatement normalisé* d'un germe (S, O) comme la composition $e_0 \circ n : \overline{S_1} \rightarrow S$ de l'éclatement $e_0 : S_1 \rightarrow S$ et de la normalisation $\overline{S_1} \rightarrow S_1$.

Ainsi d'après l'exemple étudié au § 2.2, l'éclatement normalisé de la singularité d'hypersurface (S, O) donnée par l'équation (3) présente une singularité en un sens « plus compliquée » (non Gorenstein), donnée par les équations (2). Cependant, le théorème de Zariski, dont nous donnons ici une nouvelle démonstration, dit qu'on obtient bien une résolution des singularités par itération de ce processus! Déjà, à la remarque 3.16, on vérifiera que la multiplicité ne peut pas augmenter.

Nota bene – (Pour le lecteur plus savant) On peut même montrer que la singularité de l'éclatement normalisé $\overline{S_1}$ de $S : x^{15} + y^{10} + z^6 = 0$, définie par l'idéal (2), n'est pas numériquement Gorenstein (cf. [Ne] (2.33) pour cette notion) : la méthode pour cela consiste à calculer la résolution de (S, O) avec la méthode de Jung (voir les références du § 8, Scholie) à partir de la *projection générique* $p : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ (cf. déf. 3.1). Grâce à la prop. 3.15, on peut en déduire le graphe de résolution de $\overline{S_1}$. (On trouve comme diviseur exceptionnel de la résolution minimale de $\overline{S_1}$ une courbe E de genre 11 et d'auto-intersection -3, ce qui donne $Z_K = (23/3)E$ pour le cycle numériquement canonique).

3 Systèmes de paramètres génériques

Comme indiqué dans le sommaire, on rappelle dans ce paragraphe un certain nombre de constructions importantes dans le cadre de la géométrie analytique locale. On utilisera [Ho] (Exp. 19 §1) comme référence pour la construction des espaces analytiques locaux. On pourra aussi consulter l'appendice de [HIO] (I §3).

Au § 3.1, après un bref historique sur la notion de multiplicité, on définit les *systèmes de paramètres génériques* en un point d'une surface normale comme ceux induisant une projection dont le degré égale la multiplicité de la surface (définition 3.1).

Suivant la philosophie évoquée dans l'introduction (début du § 1.5), à savoir l'étude des singularités de surfaces à l'aide de familles de courbes tracées sur ces surfaces, les outils

rappelés aux § 3.2 et 3.3 permettent la description de *l'éclatement normalisé* d'une surface comme la *normalisation de la surface de déformation* associée au pinceau engendré par un système de paramètres génériques (proposition 3.15).

3.1 Multiplicité et projections génériques

On définit la multiplicité d'un idéal I , m -primaire (c'est-à-dire contenant une puissance m^i de l'idéal m) dans un anneau local (R, m) , grâce à la construction suivante. On considère la *fonction de Samuel* de I dans R , donnée par :

$$F_{I,R}(n) = l_R(R/I^n),$$

où l_R désigne la longueur comme R -module. Pour nous, R sera l'anneau local $\mathcal{O}_{X,O}$ d'un germe d'espace analytique, et $F_{I,R}(n) = \dim_{\mathbb{C}} R/I^n$.

D'après un théorème de Samuel ([Sa] Chap. 1, thm. 9), il existe un *polynôme* $P_{I,R}$, appelé *polynôme de Hilbert-Samuel*, et un entier n_0 tels que les valeurs $F_{I,R}(n)$ et $P_{I,R}(n)$ coïncident pour tout $n \geq n_0$.

On sait alors que le degré d de $P_{I,R}$ coïncide avec la dimension de Krull de l'anneau R ([Sa] p. 184) et que le coefficient directeur de $P_{I,R}$ est de la forme $e(I,R)/d!$ où $e(I,R)$ est un entier appelé *multiplicité de l'idéal* I . Dans la suite, on utilise la notation plus abrégée $e(I)$.

Dans son article ([Sa] p. 187 et seq.), P. Samuel montre aussi que sa définition généralise la notion de multiplicité introduite avant lui par C. Chevalley dans [Chv] pour les *systèmes de paramètres* (d -uplets x_1, \dots, x_d engendrant un idéal m -primaire de R), dans le cadre de la géométrie formelle, précisément pour les anneaux locaux complets réduits, contenant une copie de leur corps résiduel. (Pour plus de détails, on pourra aussi consulter [HIO] (6.7)).

Dans le cadre analytique, la définition de Chevalley s'interprète comme le degré local d'une projection : cette traduction est faite pour les anneaux analytiques réduits dans [Dr]. (Le cas non réduit est traité dans l'appendice II de [HIO].)

Par souci de simplicité, on explicite ces notions dans le cadre de la dimension 2 qui sera le nôtre par la suite: si $R = \mathcal{O}_{S,O}$ est l'anneau local d'un germe de surface analytique réduite, dire que (f,g) est un *système de paramètres* de $\mathcal{O}_{S,O}$ (i.e. que l'idéal (f,g) est m -primaire) signifie qu'on peut choisir un représentant S du germe de surface (S,O) sur lequel f et g sont définies, et sur lequel les courbes $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ s'intersectent seulement en O (Nullstellensatz de Hilbert-Rückert, cf. [Gu] E 2).

Alors l'application $p = (f,g) : S \rightarrow \mathbb{C}^2$, définie par $x \mapsto (f(x), g(x))$, est un morphisme *fini* (i.e. propre à fibres finies), et on peut interpréter la multiplicité $e(f,g)$ comme le *degré local* de la projection finie $p : S \rightarrow \mathbb{C}^2$, c'est-à-dire le nombre de points dans une fibre suffisamment générale (cf. p.ex. [HIO], App. II (5.1.4)).

Définition 3.1. On dira qu'une projection $p = (f,g) : S \rightarrow U$ dans un ouvert U de \mathbb{C}^2 est *générique*, si elle est donnée par deux fonctions $f, g \in \mathcal{O}_S$, induisant un idéal (f,g) , m -primaire dans $\mathcal{O}_{S,O}$ de même multiplicité que l'idéal maximal, c'est-à-dire si l'inégalité

$$\deg_O p = e(f,g) \geq e(m), \tag{4}$$

donnée par l'inclusion de l'idéal (f,g) dans m est une *égalité*.

On dira aussi que le *système de paramètres* (f,g) est générique dans m .

Dans la suite, la multiplicité $e(m)$ est désignée comme la *multiplicité de la surface* S en O , et est notée $e(S,O)$.

Remarque 3.2. Si, comme au § 5, on considère un plongement $S \subset \Omega$ dans un ouvert Ω de \mathbb{C}^N , telle que les fonctions f et g soient les restrictions à S de deux formes linéaires $x_1, x_2 : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$, la condition « $p : S \rightarrow U$ est générique », est équivalente à ce que l'intersection du $N - 2$ plan de \mathbb{C}^N défini par $x_1 = x_2 = 0$ avec le cône tangent $C_{S,O}$ à (S,O) (cf. § 5.1) soit seulement le point O . (Voir le § 5.1, et [Te-81] Chap. 1 pour plus de détails).

3.2 Clôture intégrale des idéaux et éclatements normalisés

Clôture intégrale des idéaux

Soit I un idéal d'un anneau R . On rappelle qu'un élément f de R est *entier sur l'idéal* I (cf. [S-Z] Appendix 4, Définition 2 ou [LJ-Te] § 1) s'il existe une relation

$$f^k + \sum_{i=1}^k a_i f^{k-i} = 0$$

dans laquelle on a $a_j \in I^j$ pour $j = 1, \dots, k$.

En introduisant l'anneau $B(I,R)$ suivant, gradué par les puissances de t :

$$B(I,R) = R[It] = R \oplus It \oplus I^2 t^2 \oplus \dots \oplus I^n t^n \oplus \dots$$

on vérifie que $f \in R$ est entier sur I si, et seulement si, $ft \in R[t]$ est entier sur le sous-anneau $B(I,R)$ (cf. § 2.2). En particulier l'ensemble des éléments de R entiers sur I forme un idéal \bar{I} appelé *clôture intégrale* de l'idéal I dans R .

Si on note $\overline{B(I,R)} \subset R[t]$, la fermeture intégrale de l'anneau $B(I,R)$ dans $R[t]$, alors on peut montrer l'égalité ([LJ-Te] (1.7)) :

$$\overline{B(I,R)} = R \oplus \bar{I}t \oplus \bar{I}^2 t^2 \oplus \dots \oplus \bar{I}^n t^n \oplus \dots$$

où \bar{I}^n est la clôture intégrale de l'idéal I^n dans R .

On fera aussi usage du résultat suivant (cf. (7) infra) :

Remarque 3.3. Si R est un anneau réduit, normal, d'anneau total des fractions K , alors $R[t]$ est intégralement fermé dans $K[t]$, de sorte que $\overline{B(I,R)}$ est aussi la fermeture intégrale de $B(I,R)$ dans $K[t]$.

Construction de l'éclatement

La construction d'un objet analytique correspondant à l'anneau $B(I,R)$ ci-dessus passe par la remarque suivante :

Remarque 3.4. Si $R = \mathcal{O}_{S,O}$ est un anneau analytique local, et I un idéal de $\mathcal{O}_{S,O}$ de la forme (h_1, \dots, h_r) , on peut choisir un représentant S du germe (S,O) sur lequel les h_i sont bien définies, et définir ainsi un faisceau cohérent \mathcal{I} sur S engendré par les sections globales (h_1, \dots, h_r) . On dira que \mathcal{I} est le faisceau cohérent sur S associé à I .

Avec les notations de la remarque, on peut définir la \mathcal{O}_S -algèbre $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ suivante :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{I}t \oplus \mathcal{I}^2 t^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{I}^n t^n \oplus \dots$$

Pour un représentant S assez petit, cette \mathcal{O}_S -algèbre est de présentation finie. Si on l'écrit sous la forme $\mathcal{B}_{\mathcal{I}} = \mathcal{O}_S[X_1, \dots, X_r]/\mathcal{J}$, où \mathcal{J} est un idéal homogène en les variables

X_1, \dots, X_r , on voit qu'on peut lui associer un sous-espace analytique de $S \times \mathbb{C}^n$ défini par \mathcal{J} , appelé Specan $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ (cf. [Ho] Exp. 19), avec un morphisme

$$p : \text{Specan } \mathcal{B}_{\mathcal{I}} \rightarrow S, \quad (5)$$

restriction de la première projection $S \times \mathbb{C}^n \rightarrow S$, et dont les fibres sont des cônes.

Définition 3.5. (Éclatement de \mathcal{I})

On peut faire la même construction en associant à l'idéal \mathcal{J} un sous-espace analytique de $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ noté Projan $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$. Le morphisme associé :

$$e_{\mathcal{I}} : \text{Projan } \mathcal{B}_{\mathcal{I}} \rightarrow S, \quad (6)$$

est l'éclatement du faisceau \mathcal{I} dans S , et on notera $S_{\mathcal{I}}$ l'espace Projan $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$. (Les fibres de $e_{\mathcal{I}}$ sont les images dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ des cônes obtenus comme fibres de l'application p considérée au (5).)

Remarque 3.6. Par abus de langage, on parlera de l'éclatement de l'idéal I dans S , pour désigner l'éclatement du faisceau \mathcal{I} de \mathcal{O}_S associé à I par la remarque 3.4 (cf. aussi les notations $e_{\mathcal{I}}$ et $S_{\mathcal{I}}$).

Si on suppose que $\mathcal{O}_{S,O}$ est réduit, on peut choisir un représentant S qui est un espace analytique réduit, et l'espace $S_{\mathcal{I}}$ est alors réduit.

Dans ce cas, suivant [Ho] Exp. 21, on peut définir la normalisation $n : \overline{S_{\mathcal{I}}} \rightarrow S_{\mathcal{I}}$ de l'espace $S_{\mathcal{I}}$. L'espace $\overline{S_{\mathcal{I}}}$ obtenu, muni de l'application composée $e_{\mathcal{I}} \circ n : \overline{S_{\mathcal{I}}} \rightarrow S$ est appelé l'éclatement normalisé de \mathcal{I} dans S .

Sens géométrique de la clôture intégrale des idéaux

La propriété fondamentale suivante (cf. [LJ-Te] 2.1) permet de « voir » la clôture intégrale des idéaux sur l'éclatement normalisé :

Théorème 3.7. *Si I, J sont deux idéaux d'un anneau analytique local réduit $\mathcal{O}_{S,O}$, en notant \mathcal{I} et \mathcal{J} les faisceaux cohérents associés à I et J sur un représentant réduit S du germe (S,O) (cf. rem. 3.4), les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) I et J ont la même clôture intégrale,
- ii) sur l'éclatement normalisé $\overline{S_{\mathcal{I}}}$, on a l'égalité des faisceaux :

$$\mathcal{I}\mathcal{O}_{\overline{S_{\mathcal{I}}}} = \mathcal{J}\mathcal{O}_{\overline{S_{\mathcal{I}}}}.$$

De ce théorème, on déduit (cf. [LJ-Te] (2.6)) :

Corollaire 3.8. *Soient I un idéal de $\mathcal{O}_{S,O}$, \overline{I} sa clôture intégrale dans $\mathcal{O}_{S,O}$, et $\mathcal{I}, \overline{\mathcal{I}}$ les faisceaux cohérents sur S associés respectivement par la rem. 3.4. Alors pour tout $x \in S$, en notant $\overline{\mathcal{I}}_x$ la clôture intégrale de \mathcal{I}_x dans $\mathcal{O}_{S,x}$, on a l'égalité :*

$$(\overline{\mathcal{I}})_x = \overline{\mathcal{I}}_x.$$

(C'est-à-dire que la construction de la clôture intégrale des idéaux se localise, ce qui est direct dans la catégorie algébrique, mais utilise ici le théorème des images directes de Grauert, cf. [LJ-Te], loc. cit.).

Par ailleurs, d'après [Ho] Exp. 21, la définition des *clôtures intégrales d'algèbres* se transmet aussi aux faisceaux cohérents d'algèbres dans les espaces analytiques réduits, en particulier, si S est normale, compte-tenu de la remarque 3.3, et du corollaire 3.8, on obtient, en notant :

$$\overline{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{O}_S \oplus \overline{\mathcal{I}}t \oplus \overline{\mathcal{I}}^2t^2 \oplus \dots \oplus \overline{\mathcal{I}}^nt^n \oplus \dots$$

que la \mathcal{O}_S -algèbre $\overline{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}}$ ainsi définie coïncide avec la clôture intégrale de $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ dans $\mathcal{M}[t]$, où \mathcal{M} est le faisceau des fonctions méromorphes sur S .

Cela permet d'exprimer l'éclatement normalisé $\overline{S_{\mathcal{I}}}$ comme :

$$\overline{S_{\mathcal{I}}} = \text{Projan } \overline{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}}. \quad (7)$$

De l'équation (7) et des propriétés élémentaires de la clôture intégrale (précisément de l'égalité $\overline{I^n} = \overline{I}^n$), on déduit le résultat suivant :

Proposition 3.9. *Si S est un espace analytique normal, et I est un idéal de $\mathcal{O}_{S,O}$ définissant un faisceau cohérent \mathcal{I} sur S , les éclatements normalisés $\overline{S_{\mathcal{I}}}$ de \mathcal{I} dans S , et $\overline{S_{\overline{\mathcal{I}}}}$ de $\overline{\mathcal{I}}$ dans S sont isomorphes.*

3.3 Clôture intégrale et multiplicité

Une autre approche de la notion de clôture intégrale d'un idéal (due à Northcott et Rees, dans [N-R]) fait intervenir la notion de *réduction* : si $J \subset I$ est un idéal tel que $\overline{J} = \overline{I}$ dans un anneau R noethérien, alors (cf. p.ex. [HIO] (4.13)) il existe un entier n tel que :

$$I^n = J.I^{n-1}.$$

(On dit que J est une *réduction* de I ([N-R] def. 1)).

De cette propriété, et de la définition de Samuel (cf. § 3.1), on déduit immédiatement que deux idéaux m -primaires I, J avec $J \subset I$, ayant même clôture intégrale $\overline{I} = \overline{J}$ ont la même multiplicité $e(I) = e(J)$.

Un théorème de Rees (cf. [Re]) dit que la réciproque est vraie si R est *formellement équidimensionnel*. Elle l'est en particulier dans le cadre des anneaux locaux analytiques normaux (car un anneau local normal est intègre, et un anneau analytique intègre a son complété intègre, cf. [Se-1] Annexe).

Avec cette hypothèse sur R , si deux idéaux m -primaires vérifient $J \subset I$, et $e(I) = e(J)$, alors leurs clôtures intégrales coïncident. En particulier :

Corollaire 3.10. *Pour un système de paramètres génériques (f, g) (cf. définition 3.1) d'un anneau local $\mathcal{O}_{S,O}$ de surface normale, on a l'égalité des clôtures intégrales :*

$$\overline{(f, g)} = \overline{m} = m.$$

3.4 Éclatements de systèmes de paramètres

Au (6) § 3.2, on a défini l'éclatement d'un idéal cohérent \mathcal{I} sur un espace analytique S en termes d'algèbres graduées. Dans le cas où l'espace S est réduit et où le faisceau \mathcal{I} est engendré par ses sections globales, on peut donner la construction suivante pour l'éclatement de \mathcal{I} (pour l'équivalence avec la construction du Projan, cf. [H-R] § 1) :

Proposition 3.11. *Soit (S, \mathcal{O}_S) un espace analytique complexe réduit et \mathcal{I} un faisceau cohérent d'idéaux de \mathcal{O}_S engendré par des sections globales g_1, \dots, g_r . L'espace $S_{\mathcal{I}}$ de l'éclatement de \mathcal{I} dans S est isomorphe à l'espace analytique complexe fermeture dans $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ du graphe de l'application de $S \setminus V(\mathcal{I})$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ qui à $z \in S \setminus V(\mathcal{I})$ fait correspondre $(g_1(z) : \dots : g_r(z)) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$, et l'éclatement $e_{\mathcal{I}}$ est isomorphe à la projection de la fermeture de ce graphe sur S .*

Remarque 3.12. La proposition précédente s'étend au cas non-réduit, en considérant une *adhérence idéaliste* (cf. [H-R] et [Fi] 0.44).

La proposition 3.11, bien que plus intuitive, ne rend pas les calculs explicites des éclatements plus faciles. En vérité, la définition «graduée» est plus simple de ce point de vue, via la construction de *bases standards* (cf. p.ex. [HIO] § 13).

Dans le cas particulier où l'on éclate une *suite régulière* (cette notion est rappelée au § 5.2), la construction de l'éclatement est particulièrement simple (cf. p.ex. [HIO] (14.1)). On l'explique en dimension deux :

Proposition 3.13. *Si $J = (f, g)$ est l'idéal engendré par une suite régulière (cf. § 5.2) dans un anneau analytique local $\mathcal{O}_{S, O}$ de dimension deux, l'éclatement de l'idéal J associé dans un représentant S assez petit du germe (S, O) est le sous-espace de $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ défini par l'idéal $(f\mu - g\lambda)$ dans $\mathcal{O}_S[\lambda, \mu]$, où $(\lambda : \mu)$ est un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.*

On renvoie le lecteur au § 5.2 pour les notions utilisées dans la remarque suivante :

Remarque 3.14 (Cas des surfaces normales). D'après un critère dû à J.P. Serre (cf. la prop. 5.6 infra), tout anneau local normal est S_2 , et donc, en dimension 2, toute surface normale est Cohen-Macaulay : ainsi, si (S, O) est un germe de surface normale, tout système de paramètres (f, g) définit une suite régulière de $\mathcal{O}_{S, O}$, ce qui permettra d'appliquer la proposition 3.13.

En reprenant la proposition 3.9, le corollaire 3.10, et la description de la proposition 3.13, on obtient finalement (cf. aussi [Lê-97] § 3 pour un cas particulier important) :

Proposition 3.15. *Si (S, O) est une singularité de surface normale, pour tout système de paramètres générique (f, g) dans m (cf. déf. 3.1), l'éclatement normalisé \overline{S}_1 du point O dans S est isomorphe à la normalisation de la surface de déformation associée au pinceau linéaire engendré par f et g , à savoir la surface S_J d'équation $\mu g - \lambda f$ dans $S \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, qui est l'éclatée de l'idéal $J = (f, g)$ dans S .*

Remarque 3.16. On déduit de ce qui précède qu'en tout point O_1 de l'éclatement normalisé \overline{S}_1 de (S, O) , on a l'inégalité

$$e(\overline{S}_1, O_1) \leq e(S, O).$$

Preuve: La description de \overline{S}_1 comme normalisation de la surface S_J dans la prop. 3.15, que l'on reprendra avec le diagramme p. 176, donne (cf. loc. cit.) une projection ϕ_1 d'un voisinage de O_1 dans \overline{S}_1 sur un ouvert de \mathbb{C}^2 , dont le degré local en O_1 est inférieur ou égal au degré $e(S, O)$ d'une projection générique $p : S \rightarrow U$.

Or, d'après la déf. 3.1, on a vu que la multiplicité $e(\overline{S}_1, O_1)$ de la surface \overline{S}_1 en un point O_1 est le plus petit degré d'une projection finie d'un voisinage de O_1 sur un ouvert de \mathbb{C}^2 , ce qui donne la conclusion. \square

4 Discriminant et nombre de Milnor

4.1 Discriminant comme idéal de Fitting

Grâce à la théorie des idéaux de Fitting (cf. [Te-76] § 1, ou [Ei] chap. 20), B. Teissier définit dans [Te-76] une structure analytique sur le lieu critique d'un morphisme plat d'espaces analytiques $f : X \rightarrow Y$.

Précisément, si d est la dimension des fibres de f (localement constante par platitude cf. [Fi] (3.19)) et Ω_f le faisceau des différentielles relatives de f (cf. [Te-76] § 2.3), B. Teissier définit l'espace critique \mathcal{C} de f par le faisceau cohérent d'idéaux de Fitting $F_d(\Omega_f)$ dans \mathcal{O}_X .

Par ailleurs, pour un morphisme analytique $g : W \rightarrow Z$ fini, il définit (loc. cit. § 1) l'image directe analytique de g comme le sous-espace de Z défini par le faisceau cohérent

d'idéaux de Fitting $F_0(g_*\mathcal{O}_W)$ (le faisceau $g_*\mathcal{O}_W$ est cohérent car g est fini, cf. [Nar] IV, Th. 7).

En particulier, pour un morphisme plat $f : X \rightarrow Y$ comme ci-dessus, si on suppose en outre que la restriction $f|_{\mathcal{C}}$ de f à l'espace critique \mathcal{C} est un morphisme fini, B. Teissier définit l'espace discriminant Δ_f de f comme l'image directe analytique de l'espace \mathcal{C} , définie dans \mathcal{O}_Y par le 0-ième idéal de Fitting $F_0(f_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}})$ (loc. cit. § 2.6).

Cet espace Δ_f sera appelé ici *discriminant Fitting* du morphisme f . Cette construction est motivée par le *lemme de changement de base* suivant, que l'on énonce pour les morphismes finis :

Lemme 4.1. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini, plat, d'espaces analytiques. Considérons un morphisme $h : Y' \rightarrow Y$ et l'espace $X' = X \times_Y Y'$ déduit de X par changement de base, alors pour le morphisme induit $f' : X' \rightarrow Y'$ qui est encore fini et plat, le discriminant Fitting Δ'_f s'obtient comme la préimage analytique $h^{-1}(\Delta_f)$ du discriminant Fitting Δ_f de f .*

4.2 Nombre de Milnor des courbes complexes

Dans la suite, on utilise de manière essentielle la théorie du nombre de Milnor pour les courbes réduites (non planes) introduite par R.O. Buchweitz et G.M. Greuel dans [B-G]. Ce nombre de Milnor est un invariant polaire relié à la multiplicité du discriminant (cf. la formule de Lê-Greuel, lem. 4.9 infra).

Du point de vue arithmétique, ce nombre de Milnor est relié très simplement à l'invariant classique δ , dont on rappelle les propriétés au § 4.2, de sorte que la plupart des propriétés établies pour δ (dans [Hk-1] et [Te-80]) se transmettent à μ .

Mais le résultat principal qui justifie l'introduction du nombre de Milnor de [B-G] est de nature topologique: c'est le lien entre le nombre de Milnor et le nombre de cycles évanescents dans une lissification de la courbe. Ces résultats topologiques font l'objet du § 4.2.

Propriétés arithmétiques, diminution du genre δ

Pour un germe de courbe complexe *réduite* (C, \mathcal{O}) , on peut définir sa normalisation (cf. § 2.2) $n : (\overline{C}, \overline{\mathcal{O}}) \rightarrow (C, \mathcal{O})$, qui induit une inclusion d'anneaux :

$$n^\# : \mathcal{O}_{C, \mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{C}, \overline{\mathcal{O}}}$$

qui fait de $\mathcal{O}_{\overline{C}, \overline{\mathcal{O}}}$ un $\mathcal{O}_{C, \mathcal{O}}$ -module fini.

On définit la *diminution du genre* $\delta(C, \mathcal{O})$ (cf. p.ex. [Hk-1]) par :

$$\delta(C, \mathcal{O}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\overline{C}, \overline{\mathcal{O}}} / \mathcal{O}_{C, \mathcal{O}} . \quad (8)$$

Si (C, \mathcal{O}) est *analytiquement irréductible*, alors $\mathcal{O}_{\overline{C}, \overline{\mathcal{O}}} \simeq \mathbb{C}\{t\}$, est un anneau de valuation discrète, de valuation v_t . Via l'inclusion $n^\#$, on peut considérer la restriction de v_t à $\mathcal{O}_{C, \mathcal{O}}$, et définir le *semi-groupe* Γ de la branche (C, \mathcal{O}) (cf. [Te-73]) par :

$$\Gamma = \{v_t(f), f \in \mathcal{O}_{C, \mathcal{O}}\} \subset \mathbb{N}.$$

On montre facilement que l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \Gamma$ des *lacunes* de Γ est fini. Précisément, l'invariant $\delta(C, \mathcal{O})$ mesure le nombre de lacunes $\text{Card}(\mathbb{N} \setminus \Gamma)$ dans le semi-groupe $\Gamma \subset \mathbb{N}$ associé à (C, \mathcal{O}) (cf. [Te-73] (2.11.1)).

Si (C, O) est *analytiquement réductible*, on dispose du lemme suivant (cf. [Hk-1] ou [B-G] (1.2.2)) :

Lemme 4.2. *Si (C_1, O) et (C_2, O) sont deux germes de courbes, définies dans (\mathbb{C}^n, O) par les idéaux I_1 et I_2 de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, O}$, on définit le nombre d'intersection d'ordre 0 (cf. rem. infra) de (C_1, C_2) par :*

$$I(C_1, C_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, O} / (I_1 + I_2).$$

i) *Alors, si on suppose que C_1 et C_2 sont réduites et ne possèdent pas de branche commune, et qu'on considère la courbe (C, O) réunion de (C_1, O) et de (C_2, O) , on a l'égalité :*

$$\delta(C, O) = \delta(C_1, O) + \delta(C_2, O) + I(C_1, C_2).$$

ii) *En particulier, si (C, O) est une courbe à r branches C_1, \dots, C_r , en notant $\delta_i = \delta(C_i, O)$, on a toujours l'inégalité :*

$$\delta(C, O) \geq \sum_{i=1}^r \delta_i + r - 1,$$

avec égalité si, et seulement si, les espaces tangents de Zariski $T_O C_i$ aux branches (C_i, O) (cf. § 5) forment une somme directe d'espaces vectoriels.

Remarque 4.3. La terminologie *nombre d'intersection d'ordre 0* provient de la « formule des Tor » de Serre pour la multiplicité d'intersection de C_1 et C_2 dans l'espace lisse \mathbb{C}^n (cf. [Se-2] V, (C)), dans laquelle le nombre $I(C_1, C_2)$ est le terme d'indice 0. Pour les courbes non planes, ce nombre d'intersection d'ordre 0 n'est pas additif.

Dans [B-G] (1.1), avec les mêmes notations, en introduisant le faisceau dualisant $\omega_{C, O}$ d'une courbe réduite (C, O) et une application naturelle (via la normalisation)

$$d : \mathcal{O}_{C, O} \rightarrow \omega_{C, O},$$

est défini le nombre de Milnor généralisé $\mu(C, O)$ comme :

$$\mu(C, O) = \dim_{\mathbb{C}} \omega_{C, O} / d \mathcal{O}_{C, O}.$$

Il se trouve ([B-G] (1.2)) que le nombre de Milnor ainsi défini est relié à l'invariant δ par la formule, si r est le nombre de branches de (C, O) :

$$\mu = 2\delta - r + 1. \tag{9}$$

On utilisera ces résultats pour la caractérisation des *points ν -uple ordinaires* à l'aide du nombre de Milnor (cf. lem. 6.5 infra), caractérisation qui interviendra de manière décisive dans la preuve du résultat principal (cf. § 8.3 infra).

Propriétés topologiques des invariants δ et μ

Les propriétés topologiques que nous considérons ici concernent les déformations plates d'un germe de courbe réduite, et demandent à être exprimées pour un « bon représentant » de cette déformation. Précisément (on suit ici [B-G] (2.1)) :

Soit $f : (S, O) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de déformation plate de la courbe réduite $(C, O) = (f^{-1}(0), O)$. Le germe (S, O) est alors de dimension 2, réduit, Cohen-Macaulay (cf. § 5.2 pour cette notion).

On fixe une fois pour toute un « bon représentant » $f : S \rightarrow \mathbb{D}$, au dessus d'un disque $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ centré en O , avec les propriétés suivantes (cf. aussi [Lo] § 2.B), en notant $C_t = f^{-1}(t)$ les fibres de f :

- il existe une boule ouverte B_0 de \mathbb{C}^n dans laquelle est plongée un représentant C du germe (C, O) , pour laquelle, en notant $B = B_0 \times \mathbb{D}$, l'espace S est plongé dans B de sorte que $f : S \rightarrow \mathbb{D}$ soit la restriction à S de la seconde projection,
- le représentant $C - O$ est lisse, et si $\text{Crit}(f)$ est le lieu critique de f (cf. § 4.1), $f|_{\text{Crit}(f)} : \text{Crit}(f) \rightarrow \mathbb{D}$ est un morphisme fini.
- le bord ∂B_0 de B_0 coupe $C_t = f^{-1}(t)$ transversalement pour chaque $t \in \mathbb{D}$ et en outre, toute sphère $S_\varepsilon \subset B_0$ centrée en O coupe C transversalement.

Sous ces hypothèses, toutes les fibres $C_t = f^{-1}(t)$ sont réduites, de dimension un, et à singularités isolées. En outre S est réduit, Cohen-Macaulay, et $\dim \text{Crit}(f) \leq 1$.

Le résultat suivant (cf. [LLT] et [Te-80] (1.3.2)) étudie l'invariant δ dans une telle famille de courbes :

Lemme 4.4. *Soit $f : S \rightarrow \mathbb{D}$ un bon représentant (cf. ci-dessus) d'un germe de déformation plate d'une courbe réduite (C, O) . En notant $n : \tilde{S} \rightarrow S$ la normalisation de la surface réduite S , $\tilde{f} = f \circ n$, et $\tilde{C}_t = \tilde{f}^{-1}(t)$, on a les propriétés suivantes :*

- i) $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{D}$ est plate,
- ii) pour chaque $t \in \mathbb{D} - \{0\}$, on a l'égalité $\tilde{C}_t = \overline{C}_t$, où \overline{C}_t est la normalisation de C_t , et

$$\delta(C_0) - \delta(C_t) = \delta(\tilde{C}_0),$$

où $\delta(C_t)$ note la somme des invariants δ de tous les points singuliers (en nombre fini) de C_t .

On en déduit que la constance de l'invariant δ dans une famille donne une *normalisation en famille*.

Le résultat principal de [B-G] (thm. (4.2.2)) relie le nombre de Milnor et le nombre de cycles évanescents (c'est-à-dire la dimension $\dim_{\mathbb{C}} H^1(C_t, \mathbb{C})$ du premier groupe de cohomologie de la fibre générale C_t) dans une déformation comme ci-dessus :

Théorème 4.5. *Si $f : S \rightarrow \mathbb{D}$ est un bon représentant d'une famille plate de courbes réduites, alors avec les notations ci-dessus, pour chaque $t \in \mathbb{D}$:*

- i) C_t est connexe,
- ii) $\mu(C, O) - \mu(C_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C_t, \mathbb{C})$,
- iii) $\mu(C, O) - \mu(C_t) \geq \delta(C, O) - \delta(C_t)$,

où les nombres $\delta(C_t)$ et $\mu(C_t)$ sont les sommes de ces invariants sur tous les points singuliers de C_t .

L'expression ii) est le résultat fondamental qui permettra ici de généraliser la formule de Lê-Greuel au cas des surfaces normales (cf. lem. 4.9).

L'expression iii) sera utilisée pour les déformations des points ν -uples ordinaires (cf. prop. 6.6).

Complétant le lemme 4.4, R. Buchweitz et G.M. Greuel montrent aussi que la constance du nombre μ dans une famille de courbes avec sections est équivalente à la *résolution simultanée faible* de cette famille (on renvoie à [B-G] (5.2.2) pour la définition de cette notion).

Ce lien entre nombre de Milnor et résolution simultanée faible permet par exemple de montrer que deux *sections hyperplanes générales* ont le même nombre de Milnor (cf. prop. 5.22 iii) (sans faire référence à une résolution des singularités).

La *résolution simultanée faible* d'une famille de sections hyperplanes générales interviendra aussi pour la preuve de la proposition 7.1. Mais on ne se servira en vérité que du fait que cette résolution simultanée faible implique la *normalisation en famille* (au sens du lemme 4.4).

4.3 Nature du discriminant Fitting

Grâce aux outils introduits au § 4.2, on peut maintenant étudier plus précisément le discriminant Fitting introduit au § 4.1.

On applique la construction du § 4.1 aux morphismes finis $p : S \rightarrow U$ d'un représentant S d'un germe de surface normale sur un ouvert U de \mathbb{C}^2 . Un tel morphisme est automatiquement plat (car S est Cohen-Macaulay, cf. [Fi] (3.20) et le § 5.2 infra).

Proposition 4.6. *Si $p : S \rightarrow U$ est un morphisme fini d'un représentant S d'un germe de surface normale sur un ouvert U de \mathbb{C}^2 , on distingue les trois cas suivants pour son discriminant Fitting Δ :*

- i) *Si (S, \mathcal{O}) est une intersection complète, Δ est une hypersurface de U (i.e. est défini par un idéal principal).*
- ii) *Si (S, \mathcal{O}) est une surface Gorenstein non intersection complète, Δ n'est jamais une hypersurface, i.e. possède toujours une composante immergée.*
- iii) *Si (S, \mathcal{O}) est une surface qui n'est pas Gorenstein, les deux cas précédents peuvent se produire.*

Preuve: a) L'idéal $I_\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ définissant le germe $(\Delta, 0)$ admet une décomposition primaire en un idéal principal $(I_\Delta)_{div}$ et (éventuellement) un idéal m -primaire non unique, mais dont la colongueur est unique, $(I_\Delta)_{imm}$ (cf. p.ex. [Se-2] I B).

On considère une droite L de \mathbb{C}^2 passant par 0, qui n'est pas dans le cône tangent de $(\Delta, 0)$ (cf. § 5.1 pour cette notion) : on dira qu'une telle droite est générique pour $(\Delta, 0)$. Alors la multiplicité d'intersection $(\Delta, L)_0$ (qui coïncide ici avec le nombre d'intersection d'ordre 0 défini au lemme 4.2) vérifie l'inégalité

$$(\Delta, L)_0 \geq (\Delta_{div}, L)_0, \quad (10)$$

où $(\Delta_{div}, 0)$ est le diviseur défini par $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}/(I_\Delta)_{div}$, et (10) est une égalité si, et seulement si, $(\Delta, 0)$ n'admet pas de composante immergée.

Ainsi, l'existence, ou non, d'une composante immergée dans Δ se déduit de la comparaison des multiplicités d'intersections $(\Delta, L)_0$ et $(\Delta_{div}, L)_0$.

b) La formule de Lê-Greuel (cf. lemme 4.9 infra) permet de calculer la multiplicité $(\Delta_{div}, L)_0$ (à partir de l'intersection de Δ_{div} avec des droites voisines ne passant pas par l'origine). En notant $X_0 = p^{-1}(L)$, on a la formule suivante :

$$(\Delta_{div}, L)_0 = \mu(X_0, \mathcal{O}) + \deg p - 1, \quad (11)$$

où μ est le nombre de Milnor du § 4.2.

c) Pour étudier la multiplicité $(\Delta, L)_0$, on utilise le lemme de changement de base 4.1 pour le discriminant Fitting : si $i : (L, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est l'inclusion de L , et $X_0 = p^{-1}(L)$ est la courbe définie sur (S, \mathcal{O}) par la préimage de L , la préimage schématique $i^{-1}(\Delta)$ coïncide avec le discriminant de la projection q restriction de p à X_0 ,

$$q = p|_{X_0} : (X_0, \mathcal{O}) \rightarrow (L, 0).$$

c'est-à-dire qu'on a l'égalité :

$$(\Delta, L)_0 = e(\Delta_q, 0). \quad (12)$$

Ainsi, on est ramené à l'étude des discriminants de projections finies de courbes réduites, traitée dans [B-G] § 6.2.

Dans le cas i), (X_0, O) est une courbe intersection complète réduite, et d'après [B-G], rem. (6.2.6) (1), la multiplicité $e(\Delta_q, 0) = \mu(X_0, 0) + \deg q - 1$, ce qui coïncide avec la multiplicité prévue par la formule de Lê-Greuel (11), d'où l'égalité $(\Delta, L)_0 = (\Delta_{div}, L)_0$ et le i) (d'après la discussion du a).

Dans le cas ii), on applique un résultat dû à Berger, Herzog et Kunz, cité dans [B-G] rem. (6.2.6) (2), comparant la différente de Dedekind (définie dans [H-K] Chap. 7 § 3) et la différente de Kähler (définie par l'idéal de Fitting $F_0(\Omega_{S/L})$, du module des différentielles relatives de l'application projection $S \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow L$).

Pour le cas iii), on renvoie à l'étude faite au § 4.5. □

La proposition précédente reliait la nature arithmétique du discriminant à la nature de la singularité (S, O) . Le lemme plus élémentaire suivant ne fait intervenir que la géométrie du discriminant *réduit*:

Lemme 4.7. *Si $p : S \rightarrow U$ est une projection finie d'une surface normale sur un ouvert U de \mathbb{C}^2 , de discriminant réduit $|\Delta_p|$, alors, au dessus de tout point $y \in |\Delta_p|$ non singulier sur $|\Delta_p|$, les points $\{x_1, \dots, x_l\}$ de la fibre $p^{-1}(y)$ sont des points lisses de S .*

On renvoie à [BPV] III (5.2) pour la preuve de ce lemme (exercice facile pour le lecteur connaissant la classification des revêtements).

Remarque 4.8. Ainsi de la prop. 4.6 i) et du lemme 4.7 on déduit encore qu'en tout point *non singulier* du discriminant réduit $|\Delta_p|$, le discriminant Fitting est divisoriel.

4.4 Calcul de la partie divisorielle du discriminant

La méthode *topologique* suivante de calcul de multiplicité pour le discriminant est due à D.T. Lê: elle fut d'abord introduite dans le cas des intersections complètes dans [Lê-74]. Dans ce cadre des intersections complètes, une preuve algébrique a été donnée indépendamment par G. M. Greuel dans [Gr].

Grâce au théorème principal de [B-G] (thm. 4.5 ici), la méthode de [Lê-74] s'étend au cas général du discriminant des surfaces normales pour le calcul de la partie *divisorielle* du discriminant Fitting, au sens défini à la preuve de la proposition 4.6 a).

Précisément, on a le résultat suivant (cf. [Sn-1] lemme (4.4)) que l'on appellera *formule de Lê-Greuel*:

Lemme 4.9. *Soient $p : (S, O) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ une projection d'un germe de surface normale, $l : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire, et soit $\sigma = l \circ p$. Si la courbe $\sigma^{-1}(0)$ est réduite, alors en notant Δ_{div} la partie divisorielle du discriminant Fitting de p , la multiplicité d'intersection $(\Delta_{div}.l^{-1}(0))_0$ en 0 est égale à $\mu(\sigma^{-1}(0), O) + \deg_O p - 1$.*

Dans toute la suite, on appellera discriminant divisoriel de p , et on notera $(\Delta_p)_{div}$ (sauf au § 8) la partie divisorielle du discriminant Fitting de p .

On donne aussi ici la multiplicité du discriminant divisoriel d'une projection en un point générique:

Lemme 4.10. *Si $p : S \rightarrow U \subset \mathbb{C}^2$ est un représentant d'un germe $p : (S, O) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de projection générique d'un germe de surface normale de multiplicité ν , alors la multiplicité de $(\Delta_p)_{div}$ en un point générique d'une de ses branches (valant 1 si, et seulement si, la branche correspondante est réduite), est toujours majorée par $\nu - 1$.*

Preuve: En un point générique y d'une branche de Δ_p , le discriminant réduit $|\Delta_p|$ est lisse, et d'après le lemme 4.7, les points $\{x_1, \dots, x_l\}$ de $p^{-1}(y)$ sont lisses sur S . De plus, d'après la remarque 4.8, en y le discriminant divisoriel de p coïncide avec le discriminant Fitting.

Soit V un petit voisinage de y dans \mathbb{C}^2 tel que $p^{-1}(V)$ soit une union disjointe $\cup_{i=1}^l S_i$ de voisinages ouverts S_i des x_i dans S . Le lemme de changement de base (4.1), appliqué à l'inclusion de V dans U , permet alors de calculer la multiplicité $e(\Delta_p, y)$ comme celle du discriminant de l'application :

$$p : p^{-1}(V) \rightarrow V,$$

et, mieux, en notant p_i la restriction $p_i = p|_{S_i} : S_i \rightarrow V$, les S_i étant des ouverts disjoints, on a l'additivité des multiplicités :

$$e(\Delta_p, y) = \sum_{i=1}^l e(\Delta_{p_i}, y). \quad (13)$$

Comme $p_i : (U_i, x_i) \rightarrow (V, y)$ est un morphisme entre deux espaces lisses :

$$e(\Delta_{p_i}, y) = \deg_{x_i} p - 1.$$

Or la somme $\sum_{i=1}^l \deg_{x_i} p = \deg_{\mathcal{O}} p$, et ce degré est ν car p est supposée générique. Ceci, dans (13), donne finalement :

$$e(\Delta_p, y) = \nu - l,$$

où l est le nombre de points de la fibre de y . On a toujours $l \geq 1$, d'où l'inégalité annoncée. \square

4.5 Un calcul de discriminant Fitting

Projection d'un point ν -ordinaire

On considère le germe (X_ν, \mathcal{O}) de courbe analytique défini dans \mathbb{C}^ν par l'idéal $I = (x_i x_j)_{1 \leq i < j \leq \nu}$ de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_\nu\}$: X_ν est formé des ν axes de coordonnées.

On veut calculer ici le discriminant Fitting de la projection :

$$\begin{aligned} q : X = X_\nu &\rightarrow B = (\mathbb{C}, 0) \\ (x_1, \dots, x_\nu) &\mapsto t = x_1 + \dots + x_\nu. \end{aligned}$$

Cette projection q est générique au sens de la définition 3.1 (adaptée au cas des courbes).

On utilise la suite exacte de \mathcal{O}_X -modules (cf. [Te-76] § 2.3) :

$$q^* \Omega_B \xrightarrow{\partial q} \Omega_X \rightarrow \Omega_q \rightarrow 0,$$

où, en écrivant $q^* \Omega_B = \mathcal{O}_X dt$, et

$$\Omega_X = \bigoplus_{i=1}^{\nu} \mathcal{O}_X dx_i / J, \quad \text{avec } J = (x_i dx_j + x_j dx_i)_{1 \leq i < j \leq \nu},$$

l'application ∂q envoie dt sur $dx_1 + \dots + dx_\nu$.

On en déduit la résolution libre suivante de Ω_q :

$$\bigoplus_{1 \leq i < j \leq \nu} \mathcal{O}_X u_{i,j} \oplus \mathcal{O}_X v \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{k=1}^{\nu} \mathcal{O}_X e_k \rightarrow \Omega_q \rightarrow 0,$$

où $\phi(u_{i,j}) = x_j e_i + x_i e_j$ et $\phi(v) = e_1 + \dots + e_\nu$.

D'après le § 4.1, l'espace critique \mathcal{C} de q est défini par l'idéal $I_{\mathcal{C}} = F_0(\Omega_q)$ engendré par les $\nu \times \nu$ mineurs de ϕ . Dans les calculs des ces mineurs, les seuls monômes qui apparaissent qui ne sont pas dans l'idéal I sont les $x_i^{\nu-1}$ pour $i = 1, \dots, \nu$, de sorte que

$$I_{\mathcal{C}} = (x_1^{\nu-1}, \dots, x_{\nu}^{\nu-1}) \mathcal{O}_X.$$

Dans l'anneau local $\mathcal{O}_B = \mathbb{C}\{t\}$, l'idéal $I_{\Delta_q} = F_0(q_* \mathcal{O}_{\mathcal{C},0})$ définissant le discriminant Fitting Δ_q est de la forme (t^{Δ_q}) (avec le léger abus de notation consistant à identifier le discriminant Δ_q concentré au point 0 avec sa multiplicité).

Or si M est un $\mathbb{C}\{t\}$ -module à support 0, le calcul de l'idéal de Fitting F_0 est facile (cf. [Te-76] p. 588-589) : $F_0(M) = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Ici, on obtient $\Delta_q = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathcal{C},0}$, soit :

$$\Delta_q = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{\nu}\} / (I + (x_1^{\nu-1}, \dots, x_{\nu}^{\nu-1})),$$

ce qui donne pour le discriminant Fitting,

$$\Delta_q = 1 + \nu(\nu - 2) = (\nu - 1)^2. \quad (14)$$

Application au discriminant d'une singularité minimale

Soit (S, \mathcal{O}) une singularité de surface normale, et $p : S \rightarrow \mathbb{C}^2$ une projection générique (cf. déf. 3.1). On considère une droite L de $(\mathbb{C}^2, \mathcal{O})$ qui n'est pas dans le cône tangent du discriminant $(\Delta, 0)$ de p . Alors la préimage $p^{-1}(L)$ de L dans S est appelée une *section hyperplane générale* de (S, \mathcal{O}) (cf. § 5.4).

On suppose ici que (S, \mathcal{O}) est une singularité *minimale* de surface (cf. déf. 6.1 infra) de multiplicité ν . On montrera au lemme 6.8 que pour une telle singularité *minimale*, les sections hyperplanes générales $p^{-1}(L)$ sont isomorphes à la courbe X_{ν} étudiée ci-dessus (réunion de ν -axes de coordonnées).

Pour cette courbe X_{ν} , on peut calculer d'après le lemme 4.2 ii), son invariant $\delta(X_{\nu}, 0) = \nu - 1$ et en déduire $\mu(X_{\nu}, 0) = \nu - 1$, d'après l'égalité (9) du § 4.2.

Alors, la formule de Lê-Greuel ((11) § 4.4) donne pour la multiplicité de la partie divisorielle du discriminant Fitting de $p : S \rightarrow \mathbb{C}^2$:

$$e(\Delta_{div}, 0) = 2(\nu - 1). \quad (15)$$

Corollaire 4.11 (du calcul du 4.5). *Si $p : S \rightarrow \mathbb{C}^2$ est, comme ci-dessus, une projection générique d'une singularité minimale de multiplicité ν , et $p^{-1}(L)$ est une section hyperplane générale de (S, \mathcal{O}) , alors l'équation (14) donne pour le discriminant Fitting Δ_q de la restriction $q = p|_{p^{-1}(L)}$ (concentré au point 0) :*

$$\Delta_q = (\nu - 1)^2. \quad (16)$$

Alors, en reprenant la discussion de la preuve de la prop. 4.6 a), (15) donne la multiplicité d'intersection $(\Delta_{div}, L)_0$ et (16) donne $(\Delta, L)_0$.

Ainsi, suivant cette discussion, si $\nu = 3$, le discriminant Δ de la projection p est divisoriel, mais dès que $\nu > 3$, Δ a une composante immergée. Ceci achève la preuve de la proposition 4.6 iii), car une singularité minimale (S, \mathcal{O}) de multiplicité ν n'est jamais Gorenstein pour $\nu \geq 3$. (Cf. p.ex. [Ne] Ex. 3.7)

5 Cône tangent et sections hyperplanes

Dans ce paragraphe, on considère souvent un représentant S d'un germe d'espace analytique (S, O) , plongé dans un ouvert U de \mathbb{C}^N : ce plongement est déterminé par le choix d'un ensemble de générateurs de l'idéal maximal m de $\mathcal{O}_{S, O}$.

Ainsi, la *dimension de plongement* de (S, O) que l'on notera $\text{edim}(S, O)$ est le plus petit nombre de générateurs de m . D'après le lemme de Nakayama (cf. [Se-2] I A), c'est aussi la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel m/m^2 . L'espace vectoriel dual $(m/m^2)^*$ est appelé *l'espace tangent de Zariski* de (S, O) et est noté $T_O S$ (cette notion a déjà été utilisée au § 4.2)

Au § 5.1, la notion de cône tangent est d'abord définie de manière extrinsèque, i.e. dans un plongement, puis on en donne une définition intrinsèque (et surtout analytique).

Au § 5.2 (et suivants), on étudie la notion de sections hyperplanes, puis de sections hyperplanes générales, mais il s'agit surtout d'un langage plus intuitif pour parler des éléments de l'idéal maximal m de $\mathcal{O}_{S, O}$ (comparer à [B-L]).

5.1 Cône tangent

Si $S \subset \mathbb{C}^N$ est un petit représentant d'un germe (S, O) d'espace analytique, on peut définir le cône tangent à S en O comme *l'ensemble* des directions limites des droites de \mathbb{C}^N joignant un point $x \in S - \{O\}$ au point O .

Précisément, si on note \bar{l} l'élément de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1}$ correspondant à une droite l de \mathbb{C}^N passant par O , et si on note

$$\mathcal{L} = \{\bar{l} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N-1}, \bar{l} = \lim_{x_i \rightarrow O} \overline{Ox_i}, x_i \in S - \{O\}\},$$

on définit $C_{S, O}$ comme la réunion des droites de \mathbb{C}^N passant par l'origine O , et de direction dans \mathcal{L} :

$$C_{S, O} = \bigcup_{\bar{l} \in \mathcal{L}} l. \quad (17)$$

Cependant, on a besoin de considérer une structure *d'espace analytique* sur $C_{S, O}$ (non nécessairement réduit).

En fait, cette construction est une conséquence de la construction envisagée au § 3.2. Si (S, O) est un germe d'espace analytique, et m est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S, O}$, on a défini (loc. cit.) la \mathcal{O}_S -algèbre de présentation finie :

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{O}_S \oplus m t \oplus m^2 t^2 \oplus \dots \oplus m^n t^n \oplus \dots$$

On peut considérer aussi l'algèbre graduée $G(m)$ suivante :

$$G(m) = \mathcal{B}_m / m \cdot \mathcal{B}_m = \mathbb{C} \oplus m/m^2 \oplus m^2/m^3 \oplus \dots \oplus m^n/m^{n+1} \dots \quad (18)$$

On utilise alors encore la construction du Specan du § 3.2 pour définir :

Définition 5.1. On appelle *cône tangent* à un germe d'espace analytique (S, O) le germe d'espace analytique $(C_{S, O}, O)$ où si S est un petit représentant de (S, O) , l'espace analytique $C_{S, O}$ est défini comme

$$C_{S, O} = \text{Specan } G(m)$$

Le fait que l'ensemble sous-jacent à l'espace analytique « abstrait » ainsi défini coïncide avec l'ensemble décrit par (17) se déduit de la construction de l'éclatement :

Proposition 5.2. *Soit S un petit représentant d'un germe (S, O) d'espace analytique, et m l'idéal de $\mathcal{O}_{S, O}$ définissant O . Soit $e_1 : S_1 \rightarrow S$, l'éclatement de l'idéal m dans S (cf. § 3.2). Alors la fibre $(e_1)^{-1}(O)$ est isomorphe à l'espace Proj $G(m) = \text{Proj } C_{S, O}$ et est un diviseur de Cartier sur S_1 .*

Corollaire 5.3. *De la construction de l'éclatement, on déduit les deux propriétés suivantes :*

- i) *L'ensemble sous-jacent à l'espace $C_{S, O}$ est le cône décrit au (17).*
- ii) *On a l'égalité des dimensions $\dim(C_{S, O}, O) = \dim(S, O)$.*

On ajoute ici la propriété suivante :

- iii) *On a l'égalité des multiplicités en O : $e(C_{S, O}, O) = e(S, O)$.*

Preuve: (du corollaire) Le i) est une conséquence de la description de l'espace total de l'éclatement donnée à la prop. 3.11.

Le ii) est direct car S_1 et S étant de dimension d , Proj $C_{S, O}$, diviseur de Cartier sur S_1 est de dimension $d - 1$, et donc $C_{S, O}$ est de dimension d .

Le iii) provient simplement de la définition de la multiplicité à partir de la fonction de Samuel (cf. § 3.1), qui ne dépend que de l'algèbre graduée \mathcal{B}_m . \square

5.2 Notion de section hyperplane

Structure analytique pour les sections hyperplanes

Pour un représentant S plongé dans \mathbb{C}^N d'un germe d'espace analytique (S, O) , on étudie l'intersection $H \cap S$ de S avec un hyperplan H passant par O . On commence par mettre le lecteur en garde :

Remarque 5.4. On rappelle que ce que l'on appelle ici la section $H \cap S$ est l'espace analytique défini par $\mathcal{O}_{S, O}/(h)$ où h est une équation de H . En particulier, l'espace $H \cap S$ n'est pas forcément réduit.

Par exemple, si S est définie par l'équation $x^2 + y^2 + z^2$ dans \mathbb{C}^3 , et si H est l'hyperplan d'équation $h = x - iy$, alors la section $H \cap S$ est définie par la droite « double » $z^2 = 0$ dans H , donc n'est pas réduite.

On s'intéresse par la suite à des conditions permettant d'obtenir des sections réduites à partir d'un germe (S, O) réduit. Des conditions géométriques pourront assurer que la section est génériquement réduite (cf. § 5.4), mais pour obtenir des sections réduites, on doit en plus considérer des conditions de nature arithmétique, que l'on rappelle dans le § 5.2.

Conditions arithmétiques, Cohen-Macaulay

On suppose connues les propriétés de la décomposition primaire des idéaux dans un anneau noethérien (cf. [Se-2] I B ou [Ei] Chap. 3). Pour la commodité du lecteur, on rassemble ici les principales propriétés des anneaux Cohen-Macaulay (cf. [Se-2] IV B ou [Ei] Chap. 18) :

Si R est un anneau, on rappelle qu'une suite régulière de R de longueur k est une suite x_1, \dots, x_k d'éléments de R telle que :

$$\forall i, x_i \text{ est non diviseur de zéro dans } R/(x_1, \dots, x_{i-1}).$$

On rappelle qu'un anneau local noethérien (R, m) de dimension d est Cohen-Macaulay si, et seulement si, l'idéal m contient une suite régulière de longueur d . On dira qu'un germe (S, O) d'espace analytique est Cohen-Macaulay si, et seulement si, l'anneau local $\mathcal{O}_{S, O}$ l'est.

La propriété fondamentale des anneaux Cohen-Macaulay est le lemme de « pureté » suivant, que l'on énonce ici pour les germes :

Lemme 5.5. (*Lemme de pureté de Cohen-Macaulay*)

Soit (S, O) un germe d'espace analytique Cohen-Macaulay, alors

- i) (S, O) est équidimensionnel et sans composante immergée,
- ii) pour un élément h de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S, O}$, (resp. un hyperplan H passant par O d'un espace \mathbb{C}^N dans lequel (S, O) est plongé) tel que la dimension de Krull $\dim \mathcal{O}_{S, O}/(h) = \dim \mathcal{O}_{S, O} - 1$ (resp. tel que la dimension du germe $(S \cap H, O)$ égale $\dim(S, O) - 1$), alors : $h \in \mathcal{O}_{S, O}$ est non diviseur de zéro et l'anneau $\mathcal{O}_{S, O}/(h)$ est Cohen-Macaulay. (resp., compte-tenu du i), H ne contient aucune composante irréductible de (S, O) et $H \cap S$ est Cohen-Macaulay).

Plus généralement, on doit à J.P. Serre l'introduction des notions suivantes. Pour un germe (S, O) de dimension d (pour nous $d = 1, 2$) on dira que :

- (S, O) est S_k si l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S, O}$ contient une suite régulière de longueur k . (Ainsi Cohen-Macaulay correspond à S_d).
- (S, O) est R_k si le lieu singulier de (S, O) (défini par l'idéal $F_d(\Omega_{S, O})$, cf. § 4.1) est de codimension strictement supérieure à k .

On rassemble dans la proposition suivante les liens entre ces notions et les notions d'espaces réduits et de surface normale (d'après [A-K] VII, (2.2)) :

Proposition 5.6. i) Un germe (S, O) est S_1 si, et seulement si, il n'admet pas de composante immergée.

ii) Un germe (S, O) est R_0 si, et seulement si, il est génériquement réduit, i.e. si on choisit un petit représentant S de (S, O) l'anneau local en un point générique de (chaque composante irréductible de) S sera réduit.

iii) Un germe (S, O) est réduit si, et seulement si, il est S_1 (i.e. sans composante immergée) et R_0 (i.e. génériquement réduit).

iv) Un résultat plus difficile de J.P. Serre dit qu'un germe de surface (S, O) est normale si, et seulement si, il est S_2 (i.e. Cohen-Macaulay) et R_1 (i.e. à singularité isolée).

Corollaire 5.7. Avec ce langage et le lemme de pureté (lemme 5.5), si (S, O) est Cohen-Macaulay, réduit, alors une section hyperplane $(S \cap H)$ vérifiant les hypothèses du lemme de pureté ii), n'a pas de composante immergée : donc elle sera réduite si, et seulement si, elle est génériquement réduite.

Une condition géométrique pour assurer cette dernière condition sera donnée au § 5.4. En revanche, le passage d'une propriété de $S \cap H$ à une propriété de S est beaucoup plus direct, comme indiqué dans la remarque suivante, dont la preuve est un exercice facile (d'algèbre commutative) :

Remarque 5.8. Si d est un diviseur de Cartier effectif sur (S, O) (i.e. un sous espace de (S, O) défini par un élément $h \in m$ non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_{S, O}$), qui est Cohen-Macaulay (resp. réduit) alors (S, O) est Cohen-Macaulay (resp. réduit).

5.3 Sections v -superficielles

Du point de vue géométrique, on peut introduire une première condition d'incidence naturelle pour un hyperplan H :

Définition 5.9. Un hyperplan H de \mathbb{C}^N passant par O (ou l'élément h de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S, O}$ correspondant) sera dit v -superficiel pour (S, O) si H ne contient aucune composante irréductible du cône tangent $C_{S, O}$ à (S, O) (cf. § 5.1).

La terminologie est celle de [B-L] (déf-prop. 1) où la propriété v -superficiel est étudiée dans un cadre plus général. Elle est justifiée par son lien avec la notion d'éléments superficiels de P. Samuel, alors que le v désigne une condition *valuative* (cf. [B-L]). On remarque immédiatement, avec le même exemple qu'à la remarque 5.4, que cette condition ne donne pas toujours des sections réduites :

Remarque 5.10. Dans l'exemple de la remarque 5.4, la surface S est définie par l'équation homogène $x^2 + y^2 + z^2$ dans \mathbb{C}^3 donc $C_{S,O} = S$, et si H est l'hyperplan d'équation $h = x - iy$, alors H est v -superficiel pour S , et on a vu que la section $H \cap S$ est non réduite.

En revanche, ces sections v -superficielles ont un certain nombre de propriétés géométriques (exprimées en terme d'espaces réduits), et arithmétiques (exprimées en terme de multiplicités), examinées au § 5.3. On utilisera ici ces propriétés pour la preuve du lemme 6.8. On renvoie à la première partie de la thèse (Chap. 2) pour une étude plus détaillée.

Propriétés des sections v -superficielles

En terme d'espaces réduits, on a la première propriété suivante :

Lemme 5.11. *Soit S un représentant plongé dans \mathbb{C}^N d'un germe d'espace analytique (S,O) équidimensionnel. On considère un hyperplan H ne contenant aucune composante irréductible (i.e. non immergée) de S . Alors,*

i) *en notant $C_{S \cap H, O}$ le cône tangent à la section $S \cap H$, on a toujours l'inclusion ensembliste :*

$$|C_{S \cap H, O}| \subset |C_{S, O} \cap H|, \quad (19)$$

où on note entre $||$ l'espace réduit sous-jacent à un espace analytique.

ii) *Et l'inclusion (19) est une égalité si, et seulement si, l'hyperplan H est v -superficiel pour (S,O) (déf. 5.9).*

Preuve: Le i) est direct à partir de la définition ensembliste (cf. l'égalité (17)) du cône tangent. Le ii) se démontre avantageusement en utilisant l'éclatement $e_1 : S_1 \rightarrow S$ de S en O (cf. § 5.3, rem. 5.16 i). \square

En terme de multiplicités, on a la propriété suivante (on note qu'on ne suppose pas l'espace (S,O) réduit) :

Proposition 5.12. *Soit S un représentant d'un germe d'espace analytique (S,O) , équidimensionnel, plongé dans \mathbb{C}^N . On considère un hyperplan H ne contenant aucune composante irréductible de S . Alors, en terme de multiplicités :*

i) *on a toujours l'inégalité $e(S \cap H, O) \geq e(S, O)$,*

ii) *si H ne contient pas de composante immergée du germe (S,O) et si H ne contient pas de composante irréductible du cône $C_{S, O}$ (i.e. si H est v -superficiel pour (S,O)), alors on a l'égalité $e(S \cap H, O) = e(S, O)$.*

Preuve: Le i) est direct, d'après le § 3.1, grâce à l'interprétation de la multiplicité comme le degré d'une projection.

On ne démontre pas le ii) ici : on renvoie au théorème 2.2.7 du chapitre 2 de la première partie de la thèse, pour la preuve (en fait la propriété du ii) est presque une caractérisation des H tels que $e(S \cap H, O) = e(S, O)$, cf. loc. cit.). Notons que là encore la preuve se fait dans l'éclatement S_1 de (S,O) . \square

Les deux résultats précédents ont le corollaire suivant, utilisé par la suite au lemme 6.8 :

Corollaire 5.13. *Si on suppose que (S,O) et le cône tangent $C_{S,O}$ n'ont pas de composantes immergées, et si H est un hyperplan v -superficiel pour (S,O) , alors en tout point x générique sur une composante irréductible du support commun*

$$|C_{S \cap H, O}| = |C_{S, O} \cap H|, \quad (20)$$

des deux espaces analytiques $C_{S \cap H, O}$ et $C_{S, O} \cap H$, on a l'égalité des multiplicités :

$$e(C_{S \cap H, O}, x) = e(C_{S, O} \cap H, x). \quad (21)$$

Preuve: Comme H est v -superficiel, le lemme 5.11 ii) donne l'égalité (20).

Un hyperplan H v -superficiel pour (S,O) est aussi v -superficiel pour $C_{S,O}$ (cf. déf. 5.9). Les hypothèses : « (S,O) et $C_{S,O}$ n'ont pas de composantes immergées » permettent d'appliquer la prop. 5.12 ii) à $(S \cap H)$ et à $(C_{S,O} \cap H)$ pour obtenir respectivement :

$$\begin{aligned} e(S \cap H, O) &= e(S, O), \\ e(C_{S, O} \cap H, O) &= e(C_{S, O}, O). \end{aligned}$$

En rajoutant à ces équations l'égalité $e(C_{S, O}, O) = e(S, O)$ du corollaire 5.3, appliquée à S et à $S \cap H$, on obtient finalement l'égalité des multiplicités en O :

$$e(C_{S \cap H, O}, O) = e(C_{S, O} \cap H, O). \quad (22)$$

Notons pour simplifier $C_1 = C_{S \cap H, O}$ et $C_2 = C_{S, O} \cap H$. Alors pour chacun des cônes C_i , on a (presque par définition) l'égalité :

$$e(C_i, O) = \deg(C_i), \quad (23)$$

où le degré $\deg(C_i)$ est défini comme le coefficient directeur du polynôme de Hilbert de l'anneau gradué R_i définissant $C_i \subset \mathbb{C}^N$ (cf. [Se-2] II B 3). L'égalité (23) est alors conséquence directe du fait que, si on note M_i l'idéal maximal de R_i définissant le point O , et qu'on considère l'anneau local $(R_i)_{M_i} = \mathcal{O}_{C_i, O}$, la multiplicité $e(C_i, O)$ est le degré du polynôme de Hilbert de l'anneau gradué associé à $(R_i)_{M_i}$ (cf. [Se-2] II B 4), anneau gradué qui est isomorphe à R_i . (Voir aussi [HIO] App. II 4.1.8, où l'égalité (23) est montrée à partir de la définition de la multiplicité comme degré d'une projection, cf. § 3.1). Ainsi, l'égalité (22) est équivalente à l'égalité des degrés :

$$\deg(C_1) = \deg(C_2). \quad (24)$$

On peut, dans les raisonnements qui précèdent, remplacer les C_i par leurs composantes irréductibles, et obtenir ainsi l'égalité des multiplicités en O pour chaque composante irréductible de $|C_1| = |C_2|$. On raisonne donc sur une composante irréductible, i.e. on considère dans ce qui suit que l'ensemble sous-jacent aux cônes C_i ($i=1,2$) est irréductible.

Or, pour un cône irréductible C_i , le degré $\deg(C_i)$ vérifie :

$$\deg(C_i) = e(C_i, x) \cdot \deg(|C_i|), \quad (25)$$

où x est le point générique de C_i (cf. p.ex. [HIO] App. II (4.1.8), ou plus algébriquement [HIO] (1.10.1)). Des égalités (24) et (25) et de l'égalité (20) des sous-espaces réduits $|C_1| = |C_2|$ dans \mathbb{C}^N (qui donne $\deg(|C_1|) = \deg(|C_2|)$), on déduit l'égalité demandée $e(C_1, x) = e(C_2, x)$, pour les multiplicités au point générique de (la composante irréductible considérée sur) $|C_1| = |C_2|$. D'où l'égalité (21), pour toutes les composantes irréductibles. \square

Transformées strictes et faibles pour un éclatement

Comme annoncé au paragraphe précédent, les propriétés des sections hyperplanes d'une surface, et en particulier la propriété introduite à la déf. 5.9 se lisent souvent plus facilement dans l'éclatement de cette surface.

On rappelle d'abord la notion de *transformée stricte*, en se restreignant aux éclatements de points (cf. [Hk-2] Chap. 0 § 2 pour le cas général correspondant à la définition 3.5 des éclatements d'idéaux):

Théorème-Définition 5.14. *Si $e : S_1 \rightarrow S$, est l'éclatement d'un point O dans un espace analytique S , et si T est un sous-espace analytique de S contenant O , on appelle transformée stricte de T par e , l'espace analytique T' défini par l'adhérence (idéaliste dans le cas non réduit cf. rem. 3.12):*

$$T' = \overline{e^{-1}(S \setminus T)}. \quad (26)$$

On a alors la propriété fondamentale suivante pour les éclatements (on renvoie à [Hk-2] Chap. 0 § 2): la restriction $e' : T' \rightarrow T$ de e à la transformée stricte T' de T coïncide avec l'éclatement du point O dans T .

Dans ce qui suit, on étudie les éclatements de points suivants:

- l'éclatement $e_0 : \widetilde{\mathbb{C}^N} \rightarrow \mathbb{C}^N$ de \mathbb{C}^N en O (cf. § 2.3),
- l'éclatement $e_1 : S_1 \rightarrow S$ d'un représentant S d'un germe de surface normale (S, O) (cf. la définition plongée du § 2.3 et la définition 3.5, intrinsèque).

Comme premier exemple, en considérant le représentant S plongé dans \mathbb{C}^N , on voit que la première définition de l'espace total S_1 de l'éclatement e_1 de S en O , donnée au § 2.3, était en fait celle de la *transformée stricte* S_1 de S par l'éclatement e_0 de O dans \mathbb{C}^N , et cette définition coïncide avec la définition intrinsèque 3.5 d'après le thm-déf. 5.14.

On s'intéresse ici aux sections hyperplanes: pour un hyperplan H de \mathbb{C}^N passant par O , on note H_1 sa transformée stricte par e_0 dans $\widetilde{\mathbb{C}^N}$. C'est un diviseur de Cartier effectif dans $\widetilde{\mathbb{C}^N}$, et on note $H_1 \cap S_1$ le diviseur de Cartier induit sur S_1 .

Si on note \mathcal{E}_1 le diviseur exceptionnel de e_1 , i.e. le diviseur de Cartier effectif défini par l'idéal $m_{\mathcal{O}_{S_1}}$, et $(S \cap H)^*$ la transformée totale $(e_1)^*(S \cap H)$ sur S_1 , on a alors l'égalité suivante (cf. [B-L] § 1):

$$(H_1 \cap S_1) = (\widetilde{H \cap S})^* - \mathcal{E}_1 \quad (\text{différence de diviseurs de Cartier}). \quad (27)$$

Définition 5.15. Avec ces notations, le diviseur de Cartier $(H_1 \cap S_1)$ est appelé *transformée faible* par e_1 de la section hyperplane $H \cap S$ (cf. [B-L]).

La terminologie « transformée faible » est due à H. Hironaka (cf. [Hk-2] p. 142). En général, cette transformée faible est distincte de la transformée stricte $(H \cap S)'$ de la section $H \cap S$ par l'éclatement e_1 , même ensemblistement, car la transformée faible peut contenir des composantes exceptionnelles. Précisément:

Remarque 5.16. i) La condition « H est v -superficiel » (déf. 5.9) se traduit sous la forme « $H_1 \cap S_1$ ne contient aucune composante irréductible de \mathcal{E}_1 ». On en déduit dans ce cas l'égalité ensembliste $|H_1 \cap S_1| = |(H \cap S)'|$ entre les transformées faibles et strictes. En considérant les parties exceptionnelles de ces ensembles, on en déduit le critère donné au lemme 5.11 pour l'égalité dans (19). (Utiliser la prop. 5.2 et le thm-déf. 5.14).

ii) En général, l'obtention de sections hyperplanes « génériques » pour lesquelles la transformée stricte égale la transformée faible se fait en utilisant un théorème de transversalité (cf. [Kl] et [Te-81] Ch. 3, (4.3.1)): on introduira ici des conditions de transversalité à la déf. 5.17 infra.

iii) Au § 6.2, la condition : « transformée faible égale transformée stricte » sera, avec un théorème « arithmétique » (thm. de Sally, cf. loc. cit.) un argument essentiel de la preuve donnée ici que l'éclatement d'une singularité minimale est une surface *normale* (thm. 6.9).

5.4 Sections hyperplanes générales

Conditions géométriques, sections hyperplanes générales

Le but de cette section est de donner une définition de sections hyperplanes générales d'un germe de surface, à singularité non nécessairement isolée :

Ainsi on considère un représentant S d'un germe (S, O) de surface réduite, plongé dans \mathbb{C}^N , et $\Sigma \subset S$ le lieu singulier de S ($\Sigma = \{O\}$) si, et seulement si, S est à singularité isolée).

On note encore $e_1 : S_1 \rightarrow S$ l'éclatement de O , et $n : \overline{S_1} \rightarrow S_1$ la normalisation de S_1 . On note enfin $\mathcal{E}_1 = (e_1)^{-1}(O)$ le diviseur exceptionnel de e_1 et $D_1 = n^{-1}(\mathcal{E}_1)$.

Suivant une définition de G. Gonzalez-Sprinberg et M. Lejeune-Jalabert dans [G-L1] (légèrement modifiée dans l'esprit de [Sn-1] (5.8), voir aussi la remarque 5.10 de [Sn-1]), on introduit la notion suivante :

Définition 5.17. Un hyperplan H de \mathbb{C}^N contenant O sera appelé *une section hyperplane générale* de (S, O) si, et seulement si, l'hyperplan H_1 transformée stricte de H dans l'éclatement $\widetilde{\mathbb{C}^N}$ de \mathbb{C}^N en O (cf. § 5.3) coupe transversalement chaque branche analytique locale de $|\mathcal{E}_1|$ (en particulier évite les points singuliers de ces branches), en évitant aussi les images par n des points singuliers (isolés) de $\overline{S_1}$ et des points de ramification de la restriction $n_{||D_1|} : |D_1| \rightarrow |\mathcal{E}_1|$, enfin, si O n'est pas un point singulier isolé de S , la transformée stricte du lieu singulier Σ de S .

On dira aussi qu'un élément h de l'idéal maximal m de $\mathcal{O}_{S, O}$ est *général* si, dans un plongement de (S, O) , c'est l'équation d'une telle section hyperplane générale.

L'existence (et la généralité) de tels hyperplans est donnée par un théorème de transversalité (cf. [G-L1] ou [Te-81]).

Définition 5.18. Avec les notations de la déf. 5.17, on appelle *tangentes exceptionnelles* de (S, O) , l'ensemble des points de $|\mathcal{E}_1|$ que l'hyperplan H_1 doit éviter dans cette déf. 5.17.

On rappelle que pour un germe (S, O) d'espace analytique, on définit sa *dimension de plongement* $\text{edim}(S, O)$ comme la dimension de l'espace tangent de Zariski $T_O S = (m/m^2)^*$, où m désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S, O}$.

On utilisera par la suite les deux propriétés suivantes des sections hyperplanes générales :

Proposition 5.19. *Si H est une section hyperplane générale au sens de la déf. 5.17 d'un germe de surface réduite (S, O) alors :*

- i) *la section $S \cap H$ est génériquement réduite (cf. prop. 5.6 ii) pour cette notion),*
- ii) *la dimension de plongement (cf. supra) $\text{edim}(S \cap H, O)$ vérifie :*

$$\text{edim}(S \cap H, O) = \text{edim}(S, O) - 1.$$

Si on suppose en outre que (S, O) est un germe de surface réduite Cohen-Macaulay, alors d'après le corollaire 5.7, le i) devient :

- iii) *la section $S \cap H$ est réduite, Cohen-Macaulay.*

Remarque 5.20. En fait, on a une propriété (i) bis) *plus forte* que i) pour les sections hyperplanes générales : chaque composante irréductible de $H \cap C_{S, O}$ (et donc aussi de $C_{S \cap H, O}$ d'après le corollaire 5.13) a pour multiplicité en son point générique la multiplicité de la composante de $C_{S, O}$ correspondante. Le fait que cette propriété sur le cône tangent soit *plus forte* que la propriété i) (i.e. l'implique) est un phénomène général (voir la construction

de la déformation d'un germe sur son cône tangent dans [Te-73] (1.8) et la remarque (2.4.1) loc. cit.).

Remarque 5.21. Pour un germe (S,O) de dimension quelconque, on dispose aussi d'une notion de section hyperplane générale avec les propriétés i) bis) de la remarque 5.20 et ii) de la prop. 5.19.

Cas particulier des surfaces normales

Si (S,O) est un germe de surface *normale*, c'est-à-dire Cohen-Macaulay et à singularité isolée (cf. prop. 5.6 iv)), les sections hyperplanes générales de la déf. 5.17 sont reliées à la géométrie des limites d'espaces tangents développée dans [Lê-Te-88] (cf. [Sn-1] Thm. 5.8 et [Lê-98]).

Ici, on utilisera seulement (au § 7) les propriétés suivantes des sections hyperplanes générales (cf. [Sn-1]) :

Proposition 5.22. i) Si $p = (f,g) : S \rightarrow U$ est une projection générique (cf. déf. 3.1), un élément $\alpha f + \beta g$ de l'idéal maximal m est général (cf. déf. 5.17), si et seulement si, en posant $l(x,y) = \alpha x + \beta y$, la droite $l^{-1}(0)$ n'est pas dans le cône tangent au discriminant Δ_p .

ii) Si $f \in m$ est général, en choisissant $g \in m$ général tel que (f,g) soit un système de paramètres générique de (S,O) (cf. déf. 3.1), et en notant $J = \overline{(f,g)}$ l'idéal engendré par (f,g) , alors, avec les notations du § 3.2, la normalisation $n_J : \overline{S}_J \rightarrow S_J$ est une résolution simultanée faible (cf. [Te-80]) de la famille des transformées strictes sur S_J des courbes $(f + tg)^{-1}(0)$ pour t dans un petit voisinage de $0 \in \mathbb{C}$.

iii) On déduit du ii) et d'un critère de [B-G] (5.2.2) que deux sections hyperplanes générales ont le même nombre de Milnor, au sens défini au §4.2.

Remarque 5.23. Le lecteur vérifiera que tous les résultats cités jusqu'ici ont été démontrés sans utiliser l'existence d'une désingularisation pour les surfaces.

En revanche, à l'aide d'une désingularisation, on peut obtenir d'autres caractérisations (cf. [G-L1], [Sn-1] et [B-L]).

6 Propriétés des singularités minimales

Pour un germe (S,O) d'espace analytique (de dimension quelconque), on rappelle qu'on note $\text{edim}(S,O)$ sa dimension de plongement, i.e. la dimension de l'espace tangent de Zariski $T_O S = (m/m^2)^*$.

Si on suppose que (S,O) est Cohen-Macaulay, on dispose de l'inégalité suivante due à S. Abhyankar (cf. [Ab-1]), où $e(S,O)$ désigne la multiplicité du germe (S,O) (cf. déf. 3.1) :

$$e(S,O) \geq \text{edim}(S,O) - \dim(S,O) + 1. \quad (28)$$

Dans [Ko] (3.4.1) J. Kollár introduit la définition suivante :

Définition 6.1. Une singularité (S,O) d'espace analytique est dite *minimale* si elle est réduite, Cohen-Macaulay et vérifie en outre les deux conditions suivantes :

- i) l'inégalité (28) est une égalité,
- ii) le cône tangent $C_{(S,O)}$ à (S,O) (cf. § 5.1) est réduit.

Un résultat essentiel pour les anneaux locaux vérifiant l'égalité dans (28) est le théorème suivant dû à J. Sally (cf. [Sy-1]) :

Théorème 6.2. Soit (R,m) un anneau local Cohen-Macaulay vérifiant l'égalité $e(m,R) = \text{edim } R - \dim R + 1$.

Alors l'anneau gradué $G(m,R) = R/m \oplus m/m^2 \oplus \dots \oplus m^i/m^{i+1} \oplus \dots$ est Cohen-Macaulay.

Remarque 6.3. Au § 5.2, on a défini seulement la notion d'anneau local Cohen-Macaulay. Pour un anneau quelconque, on dit qu'il est Cohen-Macaulay si, et seulement si, tous ses localisés sont Cohen-Macaulay (cf. [Se-2]). Cependant ici, l'anneau $G(m,R)$ considéré est un anneau gradué avec un seul idéal homogène maximal $M = \bigoplus_{i \geq 1} m^i/m^{i+1}$. Dans ce cas, il suffit de vérifier que le localisé par M est Cohen-Macaulay (cf. [HIO] (11.11)). Géométriquement, cela signifie qu'un cône est Cohen-Macaulay si, et seulement si, il l'est à son sommet.

6.1 Singularités minimales de dimension 1

En dimension 1, les singularités minimales de courbes sont les *points ν -uples ordinaires*, comme expliqué dans le lemme suivant :

Lemme 6.4 ([Ko] (3.4.3) i). *Une singularité (C,O) de courbe réduite de multiplicité ν est minimale (cf. déf. 6.1) si, et seulement si, elle est formée de ν courbes lisses dont les espaces tangents engendrent un espace de dimension ν , (i.e. elle est isomorphe à la singularité X_ν du § 4.5).*

On appellera point ν -uple ordinaire une telle singularité de courbe.

Preuve: Soit (C,O) une singularité de courbe réduite, de composantes analytiquement irréductibles C_1, \dots, C_l . Alors, en terme de multiplicité on a :

$$e(C,O) = \sum_{i=1}^l e(C_i,O), \quad (29)$$

et en terme de dimension de plongement :

$$\text{edim}(C,O) \leq \sum_{i=1}^l \text{edim}(C_i,O), \quad (30)$$

avec égalité si, et seulement si, les espaces tangents de Zariski $T_O C_i$ des branches C_i sont en somme directe. Ainsi, si on suppose que (C,O) est minimale, l'égalité i) de la définition 6.1 donne $e(C,O) = \text{edim}(C,O)$, ce qui compte-tenu des inégalités d'Abhyankar $e(C_i,O) \geq \text{edim}(C_i,O)$ vérifiées par chaque branche, donne en particulier qu'on a l'égalité dans (30), i.e.

$$T_O C = \bigoplus_{i=1}^l T_O C_i.$$

Enfin la propriété ii) des singularités minimales (cône tangent réduit) implique que chaque branche C_i doit être lisse. Ceci donne la forme cherchée pour C , la réciproque étant évidente. \square

On dispose aussi d'une caractérisation numérique à l'aide du nombre de Milnor qui sera essentielle par la suite (cf. prop. 8.4) :

Lemme 6.5 ([B-G] (1.2.4)).

α) *Si (C,O) est un germe de courbe réduite de multiplicité ν , alors son nombre de Milnor $\mu(C,O)$ vérifie toujours les inégalités :*

$$\mu(C,O) \geq \delta(C,O) \geq \nu - 1,$$

où l'invariant $\delta(C,O)$ a été défini au § 4.2 (8).

β) *Si on a l'égalité $\mu(C,O) = \delta(C,O)$, alors on a aussi l'égalité $\mu(C,O) = \nu - 1$ et (C,O) est un point ν -uple ordinaire X_ν (cf. lem. 6.4).*

Preuve: Le α) est une application directe du lemme 4.2 ii). Avec les notations de ce lemme, et en notant $\delta = \delta(C, O)$, on a l'inégalité :

$$\delta \geq \sum_{i=1}^r \delta_i + r - 1. \quad (31)$$

Or, pour chaque branche, on a l'inégalité $\delta_i \geq \nu_i - 1$, où ν_i est la multiplicité de la branche (car dans ce cas δ_i est le nombre de lacunes du semi-groupe de la branche C_i , cf. § 4.2). On déduit donc de (31) l'inégalité :

$$\delta \geq \nu - 1, \quad (32)$$

où $\nu = \sum_{i=1}^r \nu_i$ est la multiplicité de (C, O) .

En outre l'inégalité (31) implique aussi l'inégalité $\delta \geq r - 1$. Ceci, dans l'équation $\mu = 2\delta - r + 1$ (cf. § 4.2, (9)), donne qu'on a toujours $\mu \geq \delta$, et avec (32) qu'on a toujours les inégalités du α) :

$$\mu \geq \delta \geq \nu - 1. \quad (33)$$

β) L'égalité $\mu = \delta$ dans l'équation $\mu = 2\delta - r + 1$ donne : $\delta = r - 1$. Compte-tenu de (33) et de l'inégalité $\nu \geq r$, cela force l'égalité $r = \nu$.

Mais $\delta = \nu - 1$ et $r = \nu$ forcent dans (31) à la fois que tous les δ_i sont nuls (toutes les branches sont lisses) et l'égalité dans (31), c'est-à-dire que les espaces tangents sont en somme directe (cf. lem 4.2) i.e. la conclusion du lemme. \square

Le résultat précédent permet déjà d'obtenir un résultat sur les pincesaux de courbes contenant une courbe à singularité minimale, qui sera utile au lemme 6.10 :

Proposition 6.6. *Si (S, O) est un germe de surface Cohen-Macaulay, et $f, g \in \mathcal{O}_{S, O}$ définissent un pinceau de courbes $C_t : f + tg = 0$ sur S , alors si la singularité (C_0, O) est une singularité minimale, les courbes voisines C_t pour t assez petit sont également à singularités minimales.*

Preuve: En considérant l'éclatement S_J de l'idéal $J = (f, g)$ sur S (cf. prop. 3.13), on se ramène à étudier la famille des transformées strictes Γ_t des courbes C_t sur cet espace S_J (cf. § 5.3). En effet, on a l'isomorphisme pour tout t , $\Gamma_t \simeq C_t$, avec l'avantage que la famille Γ_t est maintenant une famille (plate car S_J est Cohen Macaulay) de courbes au-dessus de \mathbb{C} (au sens du § 4.2). La proposition se déduit alors du lemme 6.7 ci-dessous, donné aussi dans [B-G] (7.2.6). \square

Lemme 6.7. *Si $\phi : (S, O) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est un germe de déformation plate d'une singularité minimale de courbe (Γ, O) , alors pour un représentant assez petit $\phi : S \rightarrow \mathbb{D}$, la fibre Γ_t pour tout $t \in \mathbb{D}$ n'a que des singularités minimales.*

Preuve: D'après le théorème 4.5 iii), et avec les notations de ce théorème, on a l'inégalité

$$\mu(\Gamma_0, O) - \mu(\Gamma_t) \geq \delta(\Gamma_0, O) - \delta(\Gamma_t).$$

D'après le lemme 6.5 α), on a pour toute singularité l'inégalité $\mu \geq \delta$, et ici, d'après l'hypothèse sur Γ_0 on a l'égalité $\mu(\Gamma_0, O) = \delta(\Gamma_0, O)$, d'où aussi l'égalité pour Γ_t . D'après le lemme 6.5 β), toutes les singularités de Γ_t sont minimales. \square

6.2 Singularités minimales de surface

Le lemme suivant démontre, en dimension 2, l'énoncé donné dans [Ko] (3.4.3), ii). (En fait, compte-tenu de la rem. 5.21, la preuve est la même en toute dimension). On souligne ici, ce qui n'apparaît pas dans [Ko], que la preuve utilise le théorème de Sally (thm. 6.2 supra).

Lemme 6.8. *Soit (S, O) une singularité de surface :*

- i) *si (D, O) est un germe de diviseur de Cartier effectif sur (S, O) présentant une singularité minimale, alors la singularité (S, O) est minimale (cf. déf. 6.1).*
- ii) *Réciproquement si (S, O) est une singularité minimale plongée dans \mathbb{C}^N et H est un hyperplan général pour (S, O) (cf. déf. 5.17), alors $(S \cap H, O)$ est une singularité minimale de courbe (i.e. un point ν -uple ordinaire).*

Preuve: On fixe un plongement de S dans un espace \mathbb{C}^r , avec $r = \text{edim}(S, O)$, de sorte que S n'est incluse dans aucun hyperplan. Alors, pour tout hyperplan H contenant O , on a les inégalités :

$$e(S \cap H, O) \geq e(S, O), \quad (34)$$

$$\text{edim}(S \cap H, O) \leq \text{edim}(S, O) - 1. \quad (35)$$

α) On considère le diviseur de Cartier (D, O) de l'énoncé comme une intersection hyperplane $(S \cap H, O)$, et on suppose que $(S \cap H, O)$ est minimale (cf. déf. 6.1). En particulier $(S \cap H, O)$ est réduite, Cohen-Macaulay, et d'après la remarque 5.8, on en déduit que (S, O) est réduit et Cohen-Macaulay. En particulier (S, O) vérifie l'inégalité d'Abhyankar (28), ce qui compte-tenu de (34) et (35) donne l'encadrement :

$$e(S \cap H, O) \geq e(S, O) \geq \text{edim}(S, O) - 1 \geq \text{edim}(S \cap H, O) \quad (36)$$

Alors, par l'hypothèse $(S \cap H, O)$ minimale, les deux termes extrêmes de (36) sont égaux, et on en déduit que l'inégalité centrale est une égalité. Donc (S, O) vérifie la propriété i) de la déf. 6.1.

Pour la propriété ii) : comme on a montré que (S, O) est Cohen-Macaulay, on peut considérer un pinceau $(S \cap H_t, O)$, avec $H_0 = H$, et $H_t = (1 - t)H_0 + tH_1$, avec H_1 un hyperplan ν -superficiel, de sorte que H_t est ν -superficiel pour $t \neq 0$. D'après la proposition 6.6, $(S \cap H_t, O)$ est aussi minimale, pour t assez petit.

Comme (S, O) vérifie l'égalité dans le théorème de Sally (6.2), $C_{S, O}$ est Cohen-Macaulay, en particulier sans composante immergée. Ainsi le corollaire 5.13 s'applique : on a l'égalité des multiplicités aux points génériques des espaces analytiques $C_{S, O} \cap H_t$ et $C_{S \cap H_t, O}$. Comme ce dernier espace est réduit, on en déduit que $C_{S, O} \cap H_t$ est génériquement réduit, et donc $C_{S, O}$ est génériquement réduit (cf. la rem. 5.20). On conclut que $C_{S, O}$ est réduit d'après la prop. 5.6 iii).

β) Réciproquement, si (S, O) est une singularité minimale, et H est un hyperplan ν -superficiel pour (S, O) (cf. § 5.3), alors on a l'égalité des multiplicités dans (34), $e(S \cap H, O) = e(S, O)$ (cf. prop. 5.12). Si en outre H est général (cf. déf. 5.17), alors la section $S \cap H$ est Cohen-Macaulay, réduite (cf. prop. 5.19 iii), et on a aussi l'égalité : $\text{edim}(S, O) - 1 = \text{edim}(S \cap H, O)$. Ainsi, la propriété i) de la déf. 6.1 se transmet de (S, O) à la section hyperplane générale $(S \cap H, O)$.

Pour la propriété ii), pour H général, d'après la propriété i) bis) de la rem. 5.20, $C_{S, O}$ réduit implique que $H \cap C_{S, O}$ et $C_{S \cap H, O}$ sont génériquement réduits. Comme $(S \cap H, O)$ vérifie la propriété i) des singularités minimales, $C_{S \cap H, O}$ n'a pas de composante immergée (théorème de Sally) et donc (cf. prop. 5.6 iii), $C_{S \cap H, O}$ est réduit. \square

De ce résultat sur les sections hyperplanes générales, et grâce aux outils du § 5, on va déduire le comportement des singularités minimales par éclatement :

Théorème 6.9. *Si (S,O) est une singularité minimale de surface normale et S_1 est l'éclatement de O sur S , alors S_1 a un nombre fini de points singuliers. Les singularités de la surface éclatée S_1 sont toutes normales, et minimales.*

Preuve: a) D'après le théorème de Sally (6.2), la courbe projective \mathcal{E}_1 qui est le $\text{Proj } C_{S,O}$ est Cohen-Macaulay, or c'est le diviseur exceptionnel de l'éclatement $e_1 : S_1 \rightarrow S$, donc c'est un diviseur de Cartier sur S_1 . On en déduit (cf. rem. 5.8) que l'espace S_1 est Cohen-Macaulay (en tout point de \mathcal{E}_1 , et évidemment aussi $S_1 - \mathcal{E}_1$ isomorphe à $S - \{O\}$ lisse). Pour montrer que la surface S_1 est normale, il suffit donc de montrer que les singularités sont isolées (cf. prop. 5.6 iv).

b) Précisément, on va montrer que tous les points du diviseur exceptionnel $\mathcal{E}_1 = \text{Proj } C_{S,O}$ qui ne correspondent pas à une *tangente exceptionnelle* de (S,O) (cf. déf. 5.18) sont non singuliers sur S_1 .

On suppose choisi un représentant S du germe (S,O) dans un ouvert de $\mathbb{C}^{\nu+1}$ avec O pour seule singularité.

Si $[l] \in \text{proj } C_{S,O}$ n'est pas une tangente exceptionnelle, et si H est un hyperplan de $\mathbb{C}^{\nu+1}$ qui intersecte $C_{S,O}$ le long de la droite l , et qui n'est pas tangent à $C_{S,O}$ le long de l , alors $S \cap H$ est une section hyperplane générale de S (cf. déf. 5.17), et d'après le lemme 6.8, $(S \cap H, O)$ est un point ν -uple ordinaire.

Avec les notations du § 5.3, si $e_1 : S_1 \rightarrow S$ est l'éclatement de S en O , et $S \cap H$ est une section hyperplane générale de (S,O) , on a les deux propriétés suivantes :

- b1) sa transformée stricte $(S \cap H)'$ est un multi-germe de courbes lisses dans S_1 .
- b2) cette transformée stricte $(S \cap H)'$ coïncide avec la transformée faible $H_1 \cap S_1$, définie au § 5.3, en particulier c'est un diviseur de Cartier.

La preuve de b1) est directe d'après le thm-déf. 5.14 : $(S \cap H)'$ est l'éclatement en O dans $S \cap H$ qui est un point ν -uple ordinaire, donc $(S \cap H)'$ est formée de ν courbes lisses disjointes.

Le résultat de b2) avait été annoncé à la remarque 5.16 iii) :

Notons $(S \cap H)^* = e_1^{-1}(S \cap H)$ la transformée totale de $S \cap H$ sur S_1 . Comme S_1 est réduite, Cohen-Macaulay (cf. a)), si H est général, la transformée faible $H_1 \cap S_1$ de $H \cap S$ est réduite et ne contient aucune composante irréductible du diviseur exceptionnel \mathcal{E}_1 .

Alors $H_1 \cap S_1$ est l'adhérence dans S_1 de $(H_1 \cap S_1) \setminus \mathcal{E}_1 = e_1^{-1}((S - \{O\}) \cap H)$ donc coïncide avec la transformée stricte $(H \cap S)'$ (cf. thm-déf. 5.14), d'où b2).

De b1) et b2) on déduit le résultat du b) : $(S \cap H)'$ est un diviseur de Cartier lisse sur S_1 qui passe par le point $[l] \in \mathcal{E}_1 \subset S_1$, donc ce point est lisse sur S_1 .

c) Il reste à montrer que les singularités de S_1 sont toutes minimales.

Au lemme 6.10 suivant, on montre que si (S,O) est minimale, la courbe projective $\mathcal{E}_1 = \text{Proj } C_{S,O}$ n'a que des singularités minimales.

Soit alors p un point singulier de S_1 (isolé d'après le b). La singularité (\mathcal{E}_1, p) est un diviseur de Cartier sur (S_1, p) qui définit une singularité minimale, cela implique la conclusion d'après le lemme 6.8 i). \square

Il reste à établir le lemme annoncé dans la preuve précédente :

Lemme 6.10. *Si (S,O) est une singularité minimale de surface, alors*

- α) *la singularité du cône tangent $(C_{S,O}, O)$ est minimale,*
- β) *la courbe $\mathcal{E}_1 = \text{Proj } C_{S,O}$ n'a que des singularités minimales.*

Preuve: α) : Dans la définition 6.1, les i) et ii) passent directement de (S,O) à $(C_{S,O},O)$. La seule chose non triviale à vérifier est la propriété Cohen-Macaulay pour $C_{S,O}$, donnée par le théorème 6.2. D'où α).

β) : La surface (S,O) étant plongée dans $\mathbb{C}^{\nu+1}$, son cône tangent $C_{S,O}$ est défini par un idéal homogène $I = (F_0, \dots, F_k)$ où les F_i sont des polynômes homogènes en les coordonnées $(x_1, \dots, x_{\nu+1})$.

On fixe un plongement de l'espace $\mathbb{C}^{\nu+1}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_{\nu+1})$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\nu+1}$ de coordonnées $(X_0, X_1, \dots, X_{\nu+1})$ en posant : $x_i = X_i/X_0$.

L'adhérence $\overline{C_{S,O}}$ de $C_{S,O}$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\nu+1}$ est aussi définie par le « même » idéal $I = (F_1, \dots, F_k)$ où dans chaque F_j , on a remplacé les x_i par les X_i correspondants pour $i = 1, \dots, \nu + 1$. La courbe à l'infini :

$$\overline{C_{S,O}} \cap \{X_0 = 0\},$$

est par définition la courbe $\mathcal{E}_1 = \text{Proj } C_{S,O}$.

Considérons maintenant une famille d'hyperplans H_t dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\nu+1}$ de la forme :

$$H_t : \sum_{i=1}^{\nu+1} a_i X_i + tX_0 = 0.$$

Alors, pour tout $t \neq 0$, on a l'isomorphisme :

$$H_t \cap \overline{C_{S,O}} \cong \mathcal{E}_1 = \text{Proj } C_{S,O}. \tag{37}$$

En effet, pour $t \neq 0$, on peut poser $\zeta_0 = \sum_{i=1}^{\nu+1} a_i X_i + tX_0$, et prendre, dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\nu+1}$, $(\zeta_0, X_1, \dots, X_{\nu+1})$ pour coordonnées. Les équations de $\overline{C_{S,O}}$ ne faisant intervenir que les variables $X_1, \dots, X_{\nu+1}$, elles sont invariantes par ce changement de coordonnées, et on obtient $H_t \cap \overline{C_{S,O}}$ comme la courbe à l'infini de $\overline{C_{S,O}}$, soit encore $\text{Proj } C_{S,O}$, d'où (37).

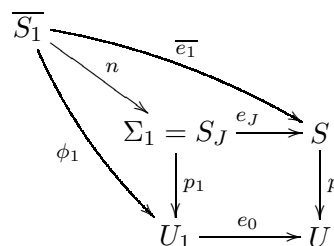
Si on suppose en plus que H_0 est une section hyperplane générale de $C_{S,O}$ (cf. déf. 5.17) alors d'après α) et le lemme 6.8 ii), la section $(H_0 \cap C_{S,O}, O)$ est une singularité minimale de courbe.

D'après la proposition 6.6 appliquée au pinceau $(H_t \cap C_{S,O})$ (sur $C_{S,O}$ Cohen-Macaulay), on en déduit que toutes les singularités de la fibre générique \mathcal{E}_1 (cf. (37)) sont minimales, d'où β). □

7 Calcul du discriminant après un éclatement

On fixe désormais une projection $p = (f,g) : S \rightarrow U \subset \mathbb{C}^2$ *générique* (cf. déf. 3.1), où U est un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^2$.

Considérons l'éclatement $e_0 : U_1 \rightarrow U$ de l'origine dans $U \subset \mathbb{C}^2$. Alors l'espace Σ_1 déduit de S par le changement de base $e_0 : U_1 \rightarrow U$ est l'éclatement S_J de $J = (f,g)$, et on peut considérer le diagramme suivant :



où, suivant la prop. 3.15, l'espace total de la normalisation n de S_J , coïncide avec celui de l'éclatement normalisé $\overline{e_1} : \overline{S_1} \rightarrow S$ de O dans S .

Sur le diagramme, on a noté $\phi_1 = p_1 \circ n$. La proposition suivante étudie le *discriminant divisoriel* (cf. lem. 4.9) de l'application ϕ_1 :

Proposition 7.1. *Le discriminant divisoriel $(\Delta_{\phi_1})_{div}$ est le sous-espace de U_1 formé de la transformée stricte $(\Delta_p)'_{div}$ de $(\Delta_p)_{div}$ par e_0 et du diviseur exceptionnel E_0 de e_0 compté avec la multiplicité $\nu - r$, où ν est la multiplicité de S en O , et r est le nombre de branches d'une section hyperplane générale (qui est donc indépendant du choix de la section hyperplane générale), ce que l'on écrira sous la forme :*

$$(\Delta_{\phi_1})_{div} = (\Delta_p)'_{div} + (\nu - r)E_0.$$

Preuve : Soient (x,y) les coordonnées dans $U \subset \mathbb{C}^2$. Soit $l(x,y) = \alpha x + \beta y$ une forme linéaire telle que $d = l^{-1}(0)$ n'est pas une droite du cône tangent à Δ_p . Avec cette hypothèse, sur U_1 , la transformée stricte d' de d par e_0 ne rencontre pas la transformée stricte Δ'_p de Δ_p .

Soit P le point d'intersection de d' et de E_0 : comme $P \notin (\Delta_p)'$, P est un point lisse du discriminant réduit $|\Delta_{\phi_1}|$: d'après la remarque 4.8, en P le discriminant Fitting Δ_{ϕ_1} est divisoriel.

Aussi la multiplicité de E_0 dans $(\Delta_{\phi_1})_{div}$ est la multiplicité d'intersection $(d' \cdot \Delta_{\phi_1})$ dans U_1 de d' avec le discriminant Fitting Δ_{ϕ_1} .

Cette multiplicité d'intersection $(d' \cdot \Delta_{\phi_1})$ est encore la multiplicité de l'espace analytique de dimension zéro $j^*(\Delta_{\phi_1})$, où $j : d' \rightarrow U_1$ est l'inclusion.

Or, d'après le lemme de changement de base 4.1 pour les discriminants Fitting, $j^*(\Delta_{\phi_1})$ est le discriminant du morphisme induit :

$$\psi = (\phi_1)|_{\phi_1^{-1}(d')} : \phi_1^{-1}(d') \rightarrow d'.$$

On écrit $\Delta_\psi = \delta_\psi P$, où $\delta_\psi \in \mathbb{N}$ est la multiplicité cherchée, et P le point d'intersection $d' \cap E_0$.

Par commutativité du diagramme ci-dessus, $(p_1)^{-1}(d')$ est aussi la transformée stricte par e_J de $p^{-1}(d) = h^{-1}(0)$ où $h = \alpha f + \beta g$. L'hypothèse sur l assure que $h \in m$ est un élément général (cf. prop. 5.22 i)). Notons $\Gamma := (p_1)^{-1}(d')$ cette transformée stricte de $h^{-1}(0)$ par e_J .

D'après la proposition 5.22 ii), $\phi_1^{-1}(d') = n^{-1}(\Gamma)$ est une réunion $C_1 \cup \dots \cup C_r$ de courbes lisses (il y a résolution simultanée faible, en particulier, n est une normalisation simultanée au voisinage de Γ , des courbes transformées strictes par e_J des éléments du pinceau $\alpha f + \beta g$).

Alors δ_ψ est la somme des δ_{ψ_i} de chaque morphisme $\psi_i = \psi|_{C_i} : C_i \rightarrow d'$. Comme les C_i et d' sont lisses, ces morphismes s'écrivent localement $t \rightarrow t^{n_i}$ et le discriminant $\delta_{\psi_i} = n_i - 1$.

En notant $\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$ la courbe transformée stricte Γ , les applications $\psi_i : C_i \rightarrow d'$ se factorisent en $n : C_i \rightarrow \Gamma_i$ et $p_1 : \Gamma_i \rightarrow d'$. Le degré de ψ_i coïncide avec celui de $p_1 : \Gamma_i \rightarrow d'$, et donc avec la multiplicité du point singulier de Γ_i par généralité de p_1 .

La courbe transformée stricte $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$ est isomorphe à $h^{-1}(0)$ (car on éclate la suite régulière (f,g) , cf. prop. 3.13).

Donc les multiplicités n_i sont les multiplicités des branches de $h^{-1}(0)$. D'après la proposition 5.12, la somme $\sum_{i=1}^r n_i$ de ces multiplicités égale la multiplicité ν de (S,O) , ainsi :

$$\delta_\psi = \sum_{i=1}^r \delta_{\psi_i} = \sum_{i=1}^r (n_i - 1) = \nu - r. \quad \square$$

8 Application au théorème de résolution

Dans cette section, nous démontrons le théorème de résolution 8.2 annoncé dans l'introduction, qui est le but de ce travail.

8.1 La paire (ν, γ)

On commence par définir ce que nous appellerons ici la *multiplicité polaire* d'une singularité de surface normale (S, O) :

Définition 8.1. Soit (S, O) une singularité de surface normale. On appellera *multiplicité polaire* de (S, O) , et on notera $\gamma(S, O)$, la multiplicité $e((\Delta_p), O)$ du discriminant d'une projection générique, qui est aussi la multiplicité du discriminant *divisoriel* introduit au lemme 4.9 (fait général pour sur la multiplicité). (On renvoie à la déf. 3.1 pour la définition d'une projection générique).

Le fait que la multiplicité ainsi définie ne dépend pas du choix de la projection générique p est une conséquence directe de la formule de Lê-Greuel (cf. lem. 4.9, voir aussi l'équation (11) § 4.3), de la caractérisation (prop. 5.22 i)) des sections hyperplanes générales, et de la constance du nombre de Milnor pour les sections hyperplanes générales (cf. prop. 5.22 iii)).

A une singularité (S, O) on associe la paire (ν, γ) formée de la multiplicité $\nu = e(S, O)$ de la surface, et de la multiplicité polaire $\gamma(S, O)$. On peut alors formuler notre théorème principal :

Théorème 8.2. i) *Au bout d'un nombre fini N_S d'éclatements normalisés à partir de (S, O) , on obtient une surface \overline{S}_f dont toutes les singularités (\overline{S}_f, O_f^i) ont des paires (ν_i, γ_i) strictement plus petites pour l'ordre lexicographique que la paire (ν, γ) correspondant à (S, O) .*

ii) *Ce nombre N_S est inférieur au nombre d'éclatements nécessaire pour obtenir une résolution plongée (cf. Introduction § 1.1 ii)) du discriminant d'une projection générique de la surface (S, O) sur \mathbb{C}^2 .*

Il est clair que l'on obtient alors le théorème de Zariski (cf. introduction § 1.3), puisqu'en un nombre fini d'étapes, on arrive à $e = 1$ ou $\gamma = 1$ ce qui, dans les deux cas, donne un germe lisse.

En effet, le cas $e(S, O) = 1$ donne (S, O) lisse pour tout germe analytique (S, O) équidimensionnel, et sans composante immergée, cf. [Sa] (ici (S, O) est normale).

Si on suppose $\gamma = 1$, en particulier le discriminant réduit est lisse et d'après le lemme 4.7, cela implique que (S, O) est lisse.

Avertissement – *Dans tout ce qui suit, on ne considère que des discriminants divisoriels, (cf. énoncé du thm.8.2) : aussi, pour simplifier les notations, on omettra le suffixe div.*

Le reste de ce § 8 est consacré à la preuve du théorème 8.2. Les notations utilisées sont celles déjà introduites depuis le § 7.

8.2 Méthode de Jung avec projections génériques

Après un éclatement normalisé, la surface \overline{S}_1 a un nombre fini de singularités, dont on sait qu'elles sont de multiplicités inférieures ou égales à ν (cf. rem. 3.16).

Pour montrer le théorème 8.2, il faut, et il suffit, de s'intéresser au cas défavorable où on a une suite d'éclatements normalisés successifs :

$$\overline{S}_f \rightarrow \overline{S}_{f-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{S}_1 \rightarrow S,$$

où sur chaque \overline{S}_i on éclate un point O_i de multiplicité ν . A cette suite correspond une suite :

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{S}_f & \longrightarrow & \overline{S}_{f-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \overline{S}_1 & \longrightarrow & S \\ \downarrow \phi_f & & \downarrow \phi_{f-1} & & & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow p \\ U_f & \xrightarrow{e_{0_{f-1}}} & U_{f-1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{e_{0_1}} & U_1 & \xrightarrow{e_0} & U \end{array}$$

où ϕ_1 et U_1 ont été construits au § 7, et où l'hypothèse $e(\overline{S}_1, O_1) = \nu$ (*) assure que la projection ϕ_1 est *générique* au voisinage de O_1 . On note aussi 0_1 l'image $\phi_1(O_1) \in U_1$. En considérant l'éclatement $e_{0_1} : U_2 \rightarrow U_1$ de ce point 0_1 dans U_1 , et le pull-back Σ_2 de \overline{S}_1 au-dessus de U_2 , on obtient comme au § 7, que la normalisation de Σ_2 coïncide avec l'éclatement normalisé \overline{S}_2 de O_1 dans S_1 , grâce à (*). Et on note encore ϕ_2 l'application composée $\overline{S}_2 \rightarrow \Sigma_2 \rightarrow U_2$. Le diagramme ci-dessus représente l'itération de ce procédé.

Ainsi, la ligne inférieure du diagramme est une suite d'éclatements de points au-dessus de $0 \in \Delta_p$. D'après la théorie des courbes planes (cf. [B-K] et § 1.1), on sait qu'il existe un entier f tel que la transformée totale de Δ_p au point 0_f soit un diviseur à croisements normaux. On prend le plus petit f possible : 0_f est l'intersection du diviseur exceptionnel E_f de l'éclatement $e_{0_{f-1}}$ et de la transformée stricte Δ' d'une branche Δ de Δ_p .

Scholie. Ainsi, on a réalisé (au moins partiellement, c'est-à-dire pour une branche Δ de Δ_p) la résolution de Jung-Hirzebruch (cf. [Ju], [Hz] et aussi [BPV] Chap. III et [Lê-We-2]) du discriminant Δ_p , mais grâce à la généralité des projections successives, à chaque étape, les normalisations des pull-back de Jung-Hirzebruch (notés ici Σ_i) sont les éclatements normalisés (notés ici \overline{S}_i) considérés par Zariski.

Alors par la proposition 7.1, le discriminant (divisoriel) de l'application $\phi_f : (\overline{S}_f, O_f) \rightarrow (U_f, 0_f)$ est formé de Δ' et de E_f compté avec multiplicité $\nu - r_{f-1}$ où r_{f-1} est le nombre de branches d'une section hyperplane générale de $(\overline{S}_{f-1}, O_{f-1})$.

Lemme 8.3. *La multiplicité $e(\Delta_{\phi_f}, 0_f)$ est inférieure à $2(\nu - 1)$.*

Preuve: En effet, Δ_{ϕ_f} est formé de deux composantes, l'une, E_f , est de multiplicité $\nu - r_{f-1} \leq \nu - 1$ et l'autre Δ' , dont le support est lisse, donc de multiplicité égale à la multiplicité de la branche Δ en un point générique, donc majorée par la multiplicité de Δ_p en un point générique, inférieure à $\nu - 1$ par le lemme 4.10. \square

8.3 Application : réduction au cas minimal

Proposition 8.4. *A l'issue du processus du § 8.2 (où tous les points O_i successifs sont de multiplicité ν), si la multiplicité $\gamma_f = e(\Delta_{\phi_f}, 0_f)$ n'est pas strictement plus petite que $\gamma = e(\Delta_p, O)$, alors la singularité (S, O) est une singularité minimale (cf. définition 6.1).*

Preuve: A l'issue de 8.2, si $e(\Delta_{\phi_f}, 0_f) \geq \gamma$, on obtient $\gamma \leq 2(\nu - 1)$ et avec le lemme 4.9 appliqué à la projection *générique* initiale $p : (S, O) \rightarrow U$, on obtient encore que $\mu + \nu - 1 \leq 2(\nu - 1)$ ou encore $\mu \leq \nu - 1$, où μ est le nombre de Milnor d'une section hyperplane générale de (S, O) .

Une telle section hyperplane générale de (S, O) est donc une courbe de multiplicité ν et de nombre de Milnor $\mu \leq \nu - 1$. D'après les lemmes 6.5 et 6.8, (S, O) est une singularité minimale. \square

8.4 Le cas des singularités minimales

D'après la proposition 8.4, il suffit désormais de montrer le théorème 8.2 pour (S, O) minimale. On reprend exactement le raisonnement du § 8.2, mais cette fois, d'après le théorème 6.9, les surfaces éclatées successives S_i sont automatiquement normales, et les singularités (S_i, O_i) sont *minimales*.

En particulier, avec les mêmes notations qu'au § 8.2, en considérant la projection $\phi_f : (S_f, O_f) \rightarrow (U_f, 0_f)$, le discriminant $(\Delta_{\phi_f}, 0_f)$ est formé de la transformée stricte d'une branche de Δ_p à support lisse, et du diviseur E_{f-1} avec multiplicité $\nu - r_{f-1}$. Mais comme (S_{f-1}, O_{f-1}) est minimale de multiplicité ν , on a l'égalité $\nu = r_{f-1}$ (lemme 6.8), donc le diviseur exceptionnel E_{f-1} n'apparaît pas. En conclusion, le discriminant $(\Delta_{\phi_f}, 0_f)$ n'est formé que de la transformée stricte Δ' d'une branche de Δ_p , dont le support $|\Delta'|$ est lisse, aussi (S_f, O_f) est un germe de surface lisse d'après le lemme 4.7. On vient donc de montrer :

Proposition 8.5. *Pour une singularité minimale (S, O) de surface normale, si $p : S \rightarrow \mathbb{C}^2$ est une projection générique de discriminant Δ_p , et si l'on est dans le cas défavorable d'une suite $S_f \rightarrow \dots \rightarrow S$ d'éclatements telle que $e(S_i, O_i) = \nu$ pour $i = 1, \dots, f-1$, alors avec les notations précédentes, le point O_f (qui est au-dessus d'un point lisse du discriminant réduit) est lisse.*

Les propositions 8.4 et 8.5 démontrent complètement le théorème 8.2. □

Remarque 8.6. On insiste sur le fait qu'obtenir une résolution plongée $\pi : U_f \rightarrow U$ du discriminant $\Delta_p \subset U$ est plus fort qu'exiger seulement que la transformée totale $\pi^{-1}(\Delta_p)$ soit un diviseur à croisement normaux, il faut aussi que la transformée stricte de Δ_p soit lisse (cf. § 1.1, ii).

A titre d'exemple, si on part d'une singularité $A_n : x^2 + y^2 + z^{n+1}$ et que $n+1 = 2p$ est pair, le discriminant de la projection générique sur le plan de coordonnées (y, z) a pour équation $y^2 + z^{2p} = (y + iz^p)(y - iz^p)$. Au bout de $p-1$ éclatements, on obtient comme transformée stricte pour ce discriminant : $(y + iz)(y - iz)$ qui est un point double ordinaire, mais on n'a pas encore résolu le discriminant : avec les notations précédentes c'est seulement l'étape $f-1$ (avec une singularité A_1 au-dessus). A l'étape $f = p$ on a résolu les singularités de Δ_p et aussi de la surface considérée.

Remarque 8.7. Pour les singularités minimales, l'égalité $\mu = \nu - 1$ du lemme 6.5 et la formule de Lê-Greuel (lemme 4.9) donnent, entre la multiplicité ν et la multiplicité polaire γ , la relation $\gamma = 2(\nu - 1)$. Il est donc clair que ν et γ baissent simultanément. (On vient de voir qu'elles baissent effectivement).

9 Perspectives

Comme souligné dans l'introduction (§ 1.4), le théorème 8.2 voudrait être un pas vers la majoration du nombre total d'éclatements normalisés nécessaires pour résoudre les singularités d'une surface. Le pas suivant demanderait de comprendre comment le discriminant d'une projection générique évolue quand, après un éclatement normalisé, la multiplicité baisse.

Par ailleurs, on a dit aussi (§ 1.4) comment le principe de Lefschetz permettait, grâce à la nature algébrique des applications considérées (éclatement et normalisation), de passer de notre démonstration (analytique et topologique) à un résultat valable pour les surfaces algébriques sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Cependant, on sait aujourd'hui que la méthode de O. Zariski donne un processus de résolution par éclatements normalisés dans le cadre algébrique très général des schémas excellents de dimension 2 (cf. [Li-1] § 2), à condition de savoir par un autre moyen que

la résolution existe (!), ce qui est démontré dans [Li-3], (voir aussi [Co] pour un exposé très proche de celui de Zariski, donnant une preuve pour les variétés algébriques sur un corps quelconque). Il serait intéressant de considérer un analogue des méthodes envisagées ici, au moins pour les variétés algébriques sur un corps de base de caractéristique positive. Dans cet esprit, le travail de A. Melle-Hernández et C.T.C Wall ([MH-Wa]), qui reprend sur les surfaces lisses des résultats topologiques sur les pinceaux de courbes de Lê D.T et C. Weber (cf. [Lê-We-1]) est un premier signe encourageant par rapport à une démarche qui nécessite bien sûr de se passer d'un invariant topologique essentiel ici : le nombre de Milnor (cf. § 4.2). A cet égard, il est instructif de comparer la preuve de [Ko] (3.4.4) et celle que, suivant une remarque de Kollár (loc. cit.), nous donnons à la proposition 6.6.

Enfin, on voudrait encore souligner le rôle joué ici par les singularités minimales. Il est frappant de constater que ce sont ces mêmes singularités qui jouent un rôle essentiel dans la preuve du théorème de résolution par modifications de Nash normalisées complétée par M. Spivakovsky (cf. [Sp-1] et l'exposé fait dans [Lê-97]). Cela va dans le sens d'une sorte de *dualité* entre ces deux processus de résolution déjà évoquée dans [Lê-98] (§ 4.3).

Nous espérons revenir sur d'autres propriétés de ces singularités dans un prochain travail (voir aussi le travail de T. de Jong et D. Van Straten dans [J-S] sur les équations et les déformations de ces singularités).

Bibliographie

L'univers, que d'autres nomment la bibliothèque.

J.L. Borges (1899-1986)

- [Ab-1] S. Abhyankar, *Local rings of high embedding dimension*, Amer. J. Math. **89** (1967), 1073-1077.
- [Ab-2] S. Abhyankar, *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*, second ed., Springer Monographs in Math., Springer Verlag, 1998.
- [AC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. **1 à 9**, Masson, (Chap. 1-4 réédition 1985, chap. 5-7 réédition 1985, chap. 8 et 9 édition 1983).
- [A-K] A. Altman, S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck duality theory*, Lect. Notes in Math. **146**, Springer Verlag, 1970.
- [BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergeb. Math. u. Grenzgebiete **4**, Springer Verlag, 1984.
- [B-M] E. Bierstone, P. Millman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing-up the maximal strata of a local invariant*, Inv. Math. **128** (1997), 207-302.
- [Boe] E. Boeger, *Einige Bemerkungen zur Theorie der ganz-algebraischen Abhängigkeit von Idealen*, Math. Ann. **185** (1970), 303-308.
- [B-L] R. Bondil, D.T. Lê, *Caractérisations des éléments superficiels d'un idéal*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **332**, Série I (2001), 717-722.
- [B-G] R.O. Buchweitz, G.M. Greuel, *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980), pp. 241-281.
- [B-K] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag, 1986.
- [Ca] A. Campillo, *Algebroid curves in positive characteristic*, Lect. Notes in Math. **813**, Springer Verlag, 1980.
- [Chn] A. Chenciner, *Courbes algébriques planes*, Publ. Math. Univ. Paris VII, No. **4**, 1978.
- [Chv] C. Chevalley, *Intersections of algebraic and algebroid varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 1-85.
- [Co] V. Cossart, *Uniformisation et désingularisation des surfaces d'après Zariski*, in Resolution of singularities (Obergrugl, 1997), 239-258, Progr. Math. **181**, Birkhäuser, 2000.
- [CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, second ed., undergraduate Texts in Math., Springer Verlag, 1997.
- [CPR] V. Cossart, O. Piltant, A.J. Reguera-López, *On isomorphisms of blowing-ups of complete ideals of a rational surface singularity*, Manuscripta Math. **98** (1999), 65-73.
- [DGP] W. Decker, G.M. Greuel, G. Pfister, *Primary decomposition : algorithms and comparisons*, in Algorithmic algebra and number theory (Heidelberg, 1997), Springer Verlag, 1999, 187-220.
- [DJGP] W. Decker, T. de Jong, G.M. Greuel, G. Pfister, *The normalization : a new algorithm, implementation and comparisons*, in Computational methods for representations of groups and algebras, Essen (1997), Progr. Math. **173**, Birkhäuser, 1999, 177-185.
- [Dr] R.N. Draper, *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Ann. **180** (1969), 175-204.

- [EGA] I, II, III, IV A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie algébrique*, Publ. Math. IHES **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1960-1967.
- [Ei] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. **150**, Springer Verlag, 1995.
- [E-H] D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Math **197**, Springer Verlag, 1999.
- [E-V] S. Encinas, O. Villamayor, *Constructive desingularization*, in Resolution of singularities, Progr. Math. **181**, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [Fi] G. Fischer, *Complex Analytic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics **538**, Springer Verlag, 1976.
- [Fl-Ma] H. Flenner, M. Manaresi, *A numerical characterization of reduction ideals*, Math. Zeitschrift **238** (2001), 205–214.
- [Fl-Vo] H. Flenner, W. Vogel, *On multiplicities of local rings*, Manuscripta Math. **78** (1993), 85-97.
- [FOV] H. Flenner, L. O’Carroll, W. Vogel, *Joins and intersections*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1999.
- [Fu] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **2**, Springer Verlag, 1984.
- [Gi] J. Giraud, *Intersection sur les surfaces normales*, in Introduction à la théorie des singularités II, Travaux en cours **37**, ed. D.T. Lê, Hermann (1988), 69-96.
- [G-L1] G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert, *Courbes lisses, cycle maximal et points infiniment voisins des singularités de surfaces*, Pub. Math. Urug. **7** (1997), 1-27.
- [G-L2] G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert, *Families of smooth curves on surface singularities and wedges*, Ann. Polon. Math. **67** (1997), no. 2, 179–190.
- [Go-Wa] S. Goto, K. Watanabe, *On graded rings I*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 179–213.
- [Gr] G.M. Greuel, *Der Gauss-Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*, Math. Ann. **214** (1975), 235–266.
- [GPS] G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR **2.0**. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2001). Disponible sur : <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [Gr-2000] G.-M. Greuel, *Computer algebra and algebraic geometry— achievements and perspectives*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 253–289.
- [GS] G. Gonzalez-Sprinberg, *Cycle maximal et invariant d’Euler local des singularités isolées de surfaces*, Topology **21**, No 4 (1982), 401-408.
- [Gu] R. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Vol. II (Local Theory), Wadsworth, 1990.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer Verlag, 1977.
- [Hau-1] H. Hauser, *Seventeen obstacles for resolution of singularities*, in Singularities (Oberwolfach, 1996), Progr. Math. **162**, Birkhäuser, 1998, 289–313.
- [Hau-2] H. Hauser, *Excellent surfaces and their taut resolution*, in Resolution of singularities (Oberurgl, 1997), Progr. Math. **181**, Birkhäuser, 2000, 341–373.
- [HIO] M. Herrmann, S. Ikeda, U. Orbanz, *Equimultiplicity and blowing-up*, Springer Verlag (1988).
- [He-Lê] J.P.G Henry, D.T. Lê, *Limites d’espaces tangents*, Séminaire Norguet 1974-75, Lect. Notes in Math. **482**, Springer Verlag.
- [H-K] J. Herzog, E. Kunz, *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay Rings*, Lect. Notes in Math. **238**, Springer Verlag, 1971.
- [Hi] D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Mathematische Annalen **36** (1890), 473-534.
- [Hk-1] H. Hironaka, *On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves*, Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto **30** (1957), 177-195.

- [Hk-2] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math. **79** (1964), 109–326.
- [H-R] H. Hironaka, H. Rossi, *On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces*, Math. Ann. **156** (1964), 313–333.
- [Hz] F. Hirzebruch, *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei Veränderlichen*, Math. Ann. **126** (1953), 1–22.
- [Ho] C. Houzel, *Géométrie analytique locale*, in Séminaire H. Cartan, 1960–1961, Notes mimeographiées de l’Inst. H. Poincaré, Paris, 1962.
- [Ii] S. Iitaka, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **76**, Springer Verlag, 1982.
- [J-S] T. De Jong, D. Van Straten, *On the deformation theory of rational singularities with reduced fundamental cycle*, J. Alg. Geom. **3** (1994), 117–172.
- [Ju] H. Jung, *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlicher x, y in der Umgebung einer Stelle $x = a, y = b$* , Jour. reine u. angew. Math. **133** (1908), 289–314.
- [Ki] D. Kirby, *A note on superficial elements of an ideal in a local ring*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **14** (1963), 21–28.
- [Kl] S. Kleiman, *On the transversality of a general translate*, Comp. Math. **28** (1974), 287–297.
- [Kl-Th] S. Kleiman, A. Thorup, *A geometric theory of the Buchsbaum-Rim multiplicity*, J. Algebra **167** (1994), 168–231.
- [Ko] J. Kollár, *Toward moduli of singular varieties*, Comp. Math. **56** (1985), 369–398.
- [Ku] E. Kunz, *The value semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 748–751.
- [La-1] H. Laufer, *Normal two-dimensional singularities*, Ann. of Math. Studies **71**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.
- [La-2] H. Laufer, *On rational singularities*, Amer. J. Math. **94** (1972), 597–608.
- [Lê-74] D.T. Lê, *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 2, 45–49.
- [Lê-81] D.T. Lê, *Limites d’espaces tangents sur les surfaces*, Nova Acta Leopoldina, N.F. **52** **240** (1981), 119–137.
- [Lê-97] D.T. Lê, *Les singularités sandwich*, in Resolution of singularities (Obergrugl, 1997), 457–483, Progr. Math. **181**, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [Lê-98] D.T. Lê, *Geometry of complex surface singularities*, in Singularities (Sapporo, 1998), 163–180, Adv. Stud. in Pures Math. **20**, 2000.
- [Lê-Ra] D.T. Lê, C.P. Ramanujam, *The invariance of Milnor’s number implies the invariance of the topological type*, Amer. J. Math. **98** (1976), 67–78.
- [Lê-Te-79] D.T. Lê, B. Teissier, *Sur la géométrie des surfaces complexes I. Tangentes exceptionnelles*, Amer. J. of Math. **101** (1979), 420–452.
- [Lê-Te-88] D.T. Lê, B. Teissier, *Limites d’espaces tangents en géométrie analytique*, Comment. Math. Helv. **63** (1988), 540–578.
- [Lê-We-1] D.T. Lê, C. Weber, *Equisingularité dans les pincesaux de germes de courbes planes et C^0 -suffisance*, L’Ens. Math. **43** (1997), 355–380.
- [Lê-We-2] D.T. Lê, C. Weber, *Résoudre est un jeu d’enfant*, à paraître dans Seminario del Instituto de Estudios con Iberoamerica y Portugal (2001).
- [LLT] D.T. Lê, M. Lejeune, B. Teissier, *Sur un critère d’équisingularité*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **271**, Série A (1970), 1065–1067.
- [LJ] M. Lejeune-Jalabert, *Linear systems with infinitely near base conditions and complete ideals in dimension two*, College of Singularity ICTP Trieste, in Singularity Theory, ed. by D.T. Lê, K. Saito, B. Teissier, World Scientific, 1991.
- [LJ-Te] Lejeune-Jalabert M., Teissier B., *Cloture intégrale des idéaux et équisingularité*, Séminaire 1973-74, Ecole Polytechnique.

- [Li-1] J. Lipman, *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. IHES **36** (1969), 195-279.
- [Li-2] J. Lipman, *Introduction to resolution of singularities*, in Algebraic geometry, Proc. Sympos. Pure Math. **29**, Humboldt State Univ., Arcata, Calif. (1974), pp. 187–230, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [Li-3] J. Lipman, *Equimultiplicity, reduction and blowing-up*, in Commutative Algebra, Analytic methods, ed. by R.N. Draper, Dekker New York (1982), 111-147.
- [Li-4] J. Lipman, *On Complete Ideals in Regular Local Rings*, in Algebraic Geometry and Commutative Algebra, vol 1, in Honor of M. Nagata, Kinokuniya, Tokyo (1987), 203-231.
- [Li-5] J. Lipman, *Proximity inequalities for complete ideals in two-dimensional regular local rings*, Contemporary Math. **159** (1994), 293-306.
- [Lo] [Lo] E. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Math. Soc. Lect. Notes Series **77**, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [Ma] H. Matsumura, *Commutative algebra*. Second edition. Mathematics Lecture Note Series, 56. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
- [MH-Wa] A. Melle-Hernandez, C.T.C. Wall, *Pencils of curves on smooth surfaces*, pre-print Univ. Liverpool (1999).
- [Mil-1] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies **51**, Princeton University Press, 1963.
- [Mil-2] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies **61**, Princeton University Press, 1968.
- [Mor] T. Mora, *La quête del saint $Gr_a(AL)$: a computational approach to local algebra*, in Applied algebra, algebraic algorithms, and error-correcting codes (Toulouse, 1989), Discrete Appl. Math. **33** (1991), 161–190. <http://www.disi.unige.it/ftp/person/MoraF/Graal.ps.gz>.
- [Mo-Ro] T. Mora, M.E. Rossi, *An algorithm for the Hilbert-Samuel function of a primary ideal*, Comm. Alg. **23** (1995), 1899–1911.
- [Mum-1] D. Mumford, *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Publ. Math. IHES **9** (1961). 291
- [Mum-2] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Lect. Notes in Math. **1358**, Springer Verlag, 1988.
- [Nag] [Nag] Nagata, M., *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, **13**, Interscience Publishers, 1962, 234 pp.
- [Nar] R. Narasimhan, *Introduction to the theory of analytic spaces*, Lect. Notes in Math. **25**, Springer Verlag, 1966.
- [Ne] A. Némethi, *Five lectures on normal surface singularities*, in Low Dimensional Topology, Budapest (1998), Bolyai Society Math. Studies **9**, Budapest, 1999, 269–351.
- [Noe] M. Noether, *Ueber die algebraischen Funktionen einer und zweier Variablen*, Gött. Nachr. (1871), 267-278.
- [N-B] M. Noether, A. Brill, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Verein. III (1892-93), 107–566.
- [Nor] D.G. Northcott, *Lessons on Rings, Modules and Multiplicities*, Cambridge University Press, 1968.
- [N-R] D.G. Northcott, D. Rees, *Reductions of ideals in local rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **50** (1954), 145–158.
- [Ns] J. Nash, *Arc structure of singularities*, in A celebration of John F. Nash, Duke Math. J. **81** (1995), no. 1, 31–38 (1996).
- [Nt] I. Newton, *The correspondence of Isaac Newton*, Vol. II (1676–1687), lettres du 13 Juin 1676 et du 24 Octobre 1676, pp. 20–42 et 110–163, Cambridge University Press, 1960.
- [Or] U. Orbanz, *Transversal parameters and tangential flatness*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **98** (1985), 37–49.
- [O-W] P. Orlik, P. Wagreich, *Isolated singularities of algebraic surfaces with \mathbb{C}^* action*, Ann. of Math. **93** (1971), 205–228.

- [O'S] D. O'Shea, *Computing limits of tangent spaces : singularities, computation and pedagogy*, in Singularity theory (Trieste 1991), 549–573, éd. Lê D.T. K. Saito, B. Teissier, World Sci. Publ., 1995.
- [Pe] D. Perrin, *Géométrie algébrique, une introduction*, InterEditions, Paris, CNRS Éditions, 1995.
- [Ph] F. Pham, “*Formules connues et dignes de l'être davantage*”, in Singularités à Cargèse, Astérisque **7-8**, S.M.F. (1972), 389-391.
- [Pu] M. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques*, Journal de Math. (1) **15** (1850), 365–480.
- [Ra] C.P. Ramanujam, *On a geometric interpretation of multiplicity*, Inventiones Math. **22** (1973), 63-67.
- [Re] D. Rees, *A-transform of local rings and a theorem on the multiplicities of ideal*, Proc. Camb. Phil. Soc. **57** (1961), 8-17.
- [RES] R. Bondil, D.T. Lê, *Résolution des singularités de surfaces par éclatements normalisés*, Deuxième partie de la thèse. A paraître dans Trends in Singularities, éd. A. Libgober et M. Tibar, series Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 2002.
- [Sa] P. Samuel, *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique*, J. Math. Pures Appl. **30** (1951), 159-275.
- [S-Z] P. Samuel, O. Zariski, *Commutative algebra*, 2 Vol., D. Van Nostrand, Princeton, 1960.
- [Se-1] [Se-1] J.P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier **6** (1955-1956), 1–42.
- [Se-2] J.P. Serre, *Algèbre locale, multiplicités*, Cours au Collège de France 1957-1958, rédigé par P. Gabriel, seconde éd., Lect. Notes in Math. **11**, Springer Verlag, 1965.
- [Se-3] J.P. Serre, *Sur les modules projectifs*, Séminaire Dubreil (1960).
- [Sha] I. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space*. Second ed. Transl. from 1988 russian ed., with notes by M. Reid. Springer Verlag, 1994.
- [Sho] V. Shokurov, *Riemann surfaces and algebraic curves*, in Algebraic Geometry I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **23**, Springer-Verlag, 1994.
- [SUV] A. Simis, B. Ulrich, W. Vasconcelos, *Codimension, multiplicity and integral extensions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **130** (2001), 237–257.
- [Sn-1] J. Snoussi, Thèse de doctorat, Université de Provence, Marseille, 1998.
- [Sn-2] J. Snoussi, *Limites d'espaces tangents à une surface normale*, Comment. Math. Helv. **73** (2001), 61-88.
- [Sp-1] M. Spivakovsky, *Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations*, Annals Math. **131** (1990), 411-491.
- [Sp-2] M. Spivakovsky, *Valuations in function fields of surfaces*, Amer. J. Math. **112** (1990), 107–156.
- [Sw] I. Swanson, Thèse : Tight closure, joint reductions, and mixed multiplicities, Purdue Univ, 1992.
- [Sy-1] J. Sally, *On the associated graded ring of a local Cohen-Macaulay ring*, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 19-21.
- [Sy-2] J. Sally, *Good embedding dimensions for Gorenstein singularities*, Math. Ann. **249** (1980), 95-106.
- [Sy-3] J. Sally, *number of generators of ideals in local rings*, Marcel Dekker, 1978.
- [Te-72] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, in Singularités à Cargèse 1972, Astérisque **7-8** (1973), 285–362.
- [Te-73] B. Teissier, Appendice, in : O Zariski, *Le problème des modules pour les branches planes*, cours donné à l'Ecole Polytechnique (1973), Hermann, 1986.
- [Te-76] B. Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, Proc. Nordic Summer School Oslo 1976, ed. by P. Holm, Nordhoff & Sjøthoff (1977), 565-677.
- [Te-77] B. Teissier, *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, Invent. Math. **40** (1977), 292.

- [Te-80] B. Teissier, *Résolution simultanée 1*, Lecture Notes in Mathematics **777**, Springer Verlag, 1980, 71-81.
- [Te-81] B. Teissier, *Variétés polaires II, Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney*, in Algebraic Geometry, Proceedings La Rabida, Lectures Notes in Mathematics **961**, Springer Verlag (1981).
- [Th] A. Thorup, *Rational equivalence on general noetherian schemes*, in Enumerative Geometry (S. Xambó-Deschamps, Ed.), Proc. Conf. Sitges 1987, Lectures Notes in Mathematics **1436**, Springer Verlag (1990), 256-297.
- [Tr] C. Traverso, *A study on algebraic algorithms : the normalization*, Conference on algebraic varieties of small dimension, Turin (1985), Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino (1986), Special Issue, 1987, 111-130.
- [Va] M. Vaquié, *Valuations*, in Resolution of singularities (Obergrugl, 1997), 539-590, Progr. Math., 181, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [Vas-1] W. Vasconcelos, *Arithmetic of blowup algebras*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **195**, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [Vas-2] W. Vasconcelos, *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry*, Algorithms and computation in math. **2**, Springer Verlag, 1998.
- [Wk] R. Walker, *Reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. **36** (1935), 336-365.
- [Za-1] O. Zariski, *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties*, Amer. J. Math. **61** (1939), 249-294.
- [Za-2] O. Zariski, *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. **40** (1939), 639-689.
- [Za-3] O. Zariski, *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. **43** (1942), 583-593.
- [Za-4] O. Zariski, *A new proof of the total embedded resolution theorem for algebraic surfaces (based on the theory of quasi-ordinary singularities)*, Amer. J. Math. **100** (1978), 411-442.
- [Za-5] O. Zariski, *Studies in equisingularity II*, Amer. J. Math. **87** (1965), 972-1006.

Résumé

On doit à P. Samuel la définition moderne de la multiplicité $e(I, R)$ d'un idéal m -primaire I dans un anneau local (R, m) , à partir de ce que l'on appelle son polynôme de Hilbert-Samuel, ainsi que l'introduction d'éléments $f \in I$ dits *superficiels* vérifiant la propriété $e(I/(f), R/(f)) = e(I, R)$.

Le premier chapitre de cette thèse s'intéresse à une formulation géométrique de la notion d'élément superficiel dans l'éclatement de $\text{Spec } R$ le long de I (non nécessairement m -primaire), comme une propriété de la *transformée faible* de f . On y donne un glossaire entre les propriétés formulées dans le langage de l'algèbre commutative et les propriétés géométriques, et on utilise ensuite des méthodes géométriques pour donner une nouvelle caractérisation des éléments superficiels équivalente à un théorème de D. Kirby.

Dans le deuxième chapitre, on introduit la notion d'élément v -superficiel, qui est un affaiblissement naturel de la notion d'élément superficiel. On montre, suivant Flenner et Vogel, le lien exact existant entre cette notion géométrique et la conservation de la multiplicité en passant de I à $I/(f)$, si I est m -primaire. On introduit aussi la notion d'élément v^0 -superficiel qui est une condition géométrique sur un élément $f \in I$ équivalente au fait de pouvoir compléter f en une suite définissant une *réduction* de l'idéal I . Dans le cas où I est m -primaire ces deux notions coïncident, ce qui donne par exemple très simplement le théorème célèbre de D. Rees reliant multiplicité et clôture intégrale. On illustre aussi le comportement de ces notions pour les idéaux non m -primaires.

Dans le troisième chapitre, on se restreint au cas des anneaux locaux de surfaces complexes normales. On étudie alors l'équisingularité dans un idéal m -primaire I au sens de la constance du nombre de Milnor défini pour toute courbe complexe réduite par Buchweitz et Greuel. L'arsenal technique du chapitre 2, et des propriétés de résolution simultanée faible permettent de caractériser géométriquement les éléments de I de nombre de Milnor minimum : le résultat principal est que la condition sur le nombre de Milnor entraîne la v -superficialité. Ce résultat est à rapprocher d'un théorème de B. Teissier dans un contexte différent (« μ constant » entraîne « μ^* constant » pour les sections hyperplanes d'une hypersurface).

La deuxième partie de la thèse illustre comment appliquer les propriétés des familles de courbes sur une surface dans l'esprit de ce qui précède à l'étude de la résolution des singularités des surfaces : on y donne une méthode nouvelle pour comprendre la résolution des surfaces par éclatements normalisés, en se ramenant à l'étude de propriétés des singularités *minimales* au sens de Kollár.

Mots clefs : Première partie : élément superficiel, v -superficiel, éléments général, multiplicité, réduction, nombre de Milnor, équisingularité. Deuxième partie : singularités des surfaces, résolutions des singularités, singularités minimales, multiplicité, multiplicité polaire, discriminants.

Abstract

P. Samuel defined the multiplicity $e(I, R)$ of an m -primary ideal I in a local ring (R, m) as the leading coefficient of what is now called its Hilbert-Samuel polynomial, and introduced so-called *superficial elements* $f \in I$ with the property that $e(I/(f), R/(f)) = e(I, R)$.

The first chapter of the present thesis is concerned with a geometric characterization of superficial elements, expressed on the blow-up of $\text{Spec } R$ along I as a property of the *weak transform* of f . We also give a glossary between known algebraic properties and their geometric counterparts, and we use geometric methods to get a new characterization of superficial elements which turns out to be equivalent to a theorem by D. Kirby.

In chapter 2, we weaken the definition of superficial elements into the concept of *v -superficial elements*. If I is m -primary, a theorem by Flenner and Vogel describes how these v -superficial elements behave with respect to multiplicity. We also introduce the notion of v^0 -superficial element which characterizes the elements $f \in I$ that one can complete into a sequence yielding a *reduction* of I . In the case of m -primary ideals these two notions coincide, and this gives an easy proof of a celebrated theorem by D. Rees. We also exemplify the case of non m -primary ideals.

The third chapter focuses on the case of the local rings of normal complex surface singularities. We then study the equisingularity condition in an m -primary ideal I given by the minimality of the Milnor number defined by Buchweitz and Greuel for any reduced complex curve. The tools of chapter 2 and properties of weak simultaneous resolutions allow to characterize geometrically the elements with minimum Milnor number. The main result is that these elements are v -superficial. This may be compared with a theorem of B. Teissier (μ constant implies μ^* constant for the hyperplane sections of a hypersurface).

The second part of the thesis illustrates how one may apply the study of families of curves on a surface singularity to the problem of resolving this singularity. We give a new approach to the resolution by normalized blow-ups, in which the *minimal singularities* (in the sense of Kollár) play a central role.

Math. Subject Classification : Part I, chapter 1,2 : 13H15, 14B05; chapter 3 : 14J17, 32S05, 32S15. Part II : 32S25, 32S45.