

Géométrie des fractions continues

Romain Bondil*

5 novembre 2012

*A deux jeunes retraités du lycée Joffre :
F. Jaboeuf et P. Meunier.*

Résumé

Ce texte présente l'algorithme de développement d'un nombre réel α en fraction continue comme conséquence de la recherche des points à coordonnées entières approchant le mieux la droite $D : y = \alpha x$. On en déduit des preuves très simples de propriétés usuelles ou moins usuelles de ces développements en fractions continues.

Mots-clefs — *Fractions continues, approximation diophantienne, enveloppe convexe.*

1 Le lien mystérieux entre fractions continues et approximation diophantienne

1.1 Présentation de l'approximation diophantienne

De manière standard, on appelle *approximation diophantienne* d'un réel α l'étude de l'écart $|\alpha - \frac{p}{q}|$ suivant la valeur du couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Fixons désormais un $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

Il est immédiat que pour chaque valeur de q fixée, il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$ minimisant cette distance, sauf si α est exactement au milieu d'un intervalle $[p/q, (p+1)/q]$ (en particulier dans ce cas α est rationnel) : il suffit de dessiner l'échelle $\frac{1}{q}$, et de prendre le barreau le plus proche de α , qui est donc à distance inférieure à la moitié de la distance entre les barreaux, autrement dit, pour ce choix de p , on a :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}.$$

On remarque cependant que certains dénominateurs q sont bien meilleurs que d'autres pour obtenir une approximation de α . Ainsi pour $\alpha = \pi$, avec $q = 7$, on obtient grâce à la fraction $\frac{22}{7}$ une approximation de π "anormalement" bonne, compte-tenu de la petite taille du dénominateur : on peut comparer $|\pi - \frac{31}{10}| = 0,041\dots$ avec $|\pi - \frac{22}{7}| = 0,0012\dots$ et un peu plus d'expérimentation numérique montre que le cas de $\frac{22}{7}$ est vraiment exceptionnel parmi les fractions de "petits dénominateurs" : ainsi par exemple (en prenant chaque fois la fraction donnant la meilleure approximation pour le dénominateur choisi) :

$$0,02 < \left| \pi - \frac{19}{6} \right| < 0,03, \text{ et } 0,01 < \left| \pi - \frac{25}{8} \right| < 0,02 \quad \text{alors que} \quad 0,001 < \left| \pi - \frac{22}{7} \right| < 0,002.$$

Le même phénomène se reproduit avec les fractions de dénominateur à trois chiffres : le dénominateur $q = 113$ fournit une approximation de π à 10^{-7} près, contre 10^{-3} pour les autres dénominateurs proches.

*Lycée Joffre, Montpellier, en remerciant l'Université Montpellier II pour son soutien, Email : romain.bondil@math.univ-montp2.fr

1.2 Les fractions continues, indépendamment...

Il est bien connu que ces fractions exceptionnelles, appelées *fractions de meilleure approximation* de α , et qui seront précisément définies au § 1.3, sont obtenues à partir du *développement en fraction continue* de α .

Or, le processus de développement en fraction continue est un processus *naturel*, relevant a priori d'une idée *bien distincte* de celle de l'approximation diophantienne, qu'on appelle¹ *anthyphérèse*.

Pour les Grecs, notre nombre réel positif α est (penser à π) moins un nombre qu'une longueur. Pour mesurer α , les grecs, qui n'ont pas de règle graduée, procèdent ainsi : on dispose d'une baguette en bois (ou plus commodément d'un fil) de longueur α et on voit combien de fois un autre fil de référence, de longueur 1 disons, "rentre" dans le premier, ce qui nous donne un entier a_0 . Ensuite, on considère la différence restante (ou reste) entre les fils et on voit combien de fois ce reste "rentre" dans le fil étalon, ce qui nous donne un second entier a_1 , et encore un reste en général. En prenant comme nouvel étalon le premier reste, on considère combien de fois le second reste rentre dans le premier, ce qui donne un entier a_2 et on continue ce processus.

Bien sûr ce procédé ressemble à l'algorithme d'Euclide, dans le cas particulier de longueurs rationnelles, mais sa portée est plus générale.

En notation moderne, nous écrirons bien sûr, en notant $E(x)$ la partie entière d'un réel x et $\{x\} = x - E(x)$ sa partie fractionnaire :

- $a_0 = E(\alpha)$ et si α est un entier, on s'arrête.
- Sinon, on définit α_1 en posant $\alpha - a_0 = \frac{1}{\alpha_1}$ et $a_1 = E(\alpha_1)$.

On construit une suite (α_k) par l'algorithme suivant (fini ou infini). Si on a défini $\alpha_1, \dots, \alpha_k$:

- si α_k n'est pas un entier, on pose $\alpha_k - E(\alpha_k) = \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ autrement dit $\alpha_{k+1} = 1/\{\alpha_k\}$.
- si α_k est un entier, on arrête l'algorithme.

On pose alors pour tout $k \geq 1$, $a_k = E(\alpha_k)$ et par commodité, on posera $\alpha_0 = \alpha$, ce qui rend la formule précédente valable pour $k = 0$.

A chaque étape k , on a :

- une écriture "exacte" de α de la forme : $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}}}}}$ (E)

- une "approximation" de α par le nombre rationnel $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}$, qu'on écrit

sous forme irréductible $\frac{p_k}{q_k}$. Ces différentes fractions irréductibles $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k \geq 0}$ (en nombre fini si, et seulement si, α est rationnel) sont appelées les *réduites* du développement de α .

A chaque étape, le nombre réel α_k est appelé k -ième *quotient complet*, et le nombre entier a_k est appelé k -ième *quotient incomplet*.

Notation : A la fin de l'article, on utilisera la notation condensée $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \alpha_k]$ pour écrire l'égalité (E).

1.3 Le résultat précis

Il faut d'abord préciser la notion de *fraction de meilleure approximation* qui est restée vague au § 1.1. Une définition naturelle est la suivante :

1. si Michèle Audin ne nous regarde pas... voir le site image des maths...

Définition 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Une fraction $\frac{p}{q}$ avec $(q, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ est dite fraction de meilleure approximation de première espèce de α si, et seulement si, toute autre fraction ayant un dénominateur inférieur ou égal à q diffère de α d'une quantité strictement plus grande, autrement dit, si, et seulement si : $\forall (q', p') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\left[q' \leq q \text{ et } \frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'} \right] \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right| > \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

Cependant, pour étudier les écarts $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{|q\alpha - p|}{|q|}$, il est intéressant de pondérer la mesure de ces écarts par la taille de leur dénominateur, ce qui revient à ne considérer que les numérateurs et donne la :

Définition 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Un couple $(q, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ définit une fraction p/q de meilleure approximation de seconde espèce de α si, et seulement si : $\forall (q', p') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$:

$$\left[q' \leq q \text{ et } \frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'} \right] \Rightarrow |q'\alpha - p'| > |q\alpha - p|.$$

N.B. 1. La définition 2 porte sur le couple (q, p) et non sur la fraction p/q . Mais si $p \neq 0$, seuls des couples (q, p) avec q et p premiers entre eux peuvent convenir. En rajoutant cette contrainte, on a identification entre couples et fractions, ce qui justifie de parler de la fraction p/q de meilleure approximation de deuxième espèce. En pratique, on va voir qu'il est plus commode de travailler sur les couples, écrits dans l'ordre (q, p) , pour la traduction géométrique donnée à la définition 3.

N.B. 2. L'essentiel de ces notes s'occupe des meilleures approximations de seconde espèce, d'où la convention :

Dans toute la suite, on parlera simplement des fractions p/q de meilleure approximation pour désigner celles de deuxième espèce données à la définition 2.

Remarque : Toute meilleure approximation de seconde espèce est une meilleure approximation de première espèce. On verra au § 6.2, théorème 3, que la réciproque n'est pas vraie.

Preuve de la remarque : Soit $(q, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Notons $S = \{(q', p') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, q' \leq q, p'/q' \neq p/q\}$.

Si le couple (q, p) est une meilleure approximation de seconde espèce de α , alors on a, pour tout $(q', p') \in S$, $|q'\alpha - p'| > |q\alpha - p|$, et donc a fortiori, comme $0 < q' \leq q$, on a $\frac{|q'\alpha - p'|}{q'} \geq \frac{|q\alpha - p|}{q}$ et donc $\left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right| > \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$. \square

Le théorème bien connu² évoqué au début du § 1.2 est alors le suivant :

Théorème 1 (Théorème de meilleure approximation). Soit $\alpha > 0$. Notons $\{\alpha\}$ la partie fractionnaire de α , autrement dit $\{\alpha\} = \alpha - E(\alpha)$. Notons $(p_k/q_k)_{k \geq 0}$ les réduites du développement de α en fraction continue définies au §1.2.

Alors l'ensemble des fractions non nulles de meilleure approximation de α est exactement :

- (i) l'ensemble des réduites p_k/q_k pour $k \geq 0$, si $\{\alpha\} < 1/2$,
- (ii) l'ensemble des réduites p_k/q_k pour $k \geq 1$, si $\{\alpha\} > 1/2$.

Scholie : a) dans le cas (ii) du théorème, la première réduite donne $p_0/q_0 = E(\alpha)$ qui n'est pas une fraction de meilleure approximation, mais dans ce cas l'algorithme des fractions continues donne que $\alpha_1 = \frac{1}{\{\alpha\}} < 2$ et donc $a_1 = E(\alpha_1) = 1$, donc $p_1/q_1 = E(\alpha) + 1$, qui est bien la meilleure approximation entière de α .

b) On a laissé de côté le cas où $\{\alpha\} = 1/2$, qui est très simple, puisque $\alpha = p_1/q_1$ lui-même est sa seule fraction de meilleure approximation.

c) L'équivalence donnée par ce théorème est aussi une raison de la préférence pour les approximations de deuxième espèce par rapport aux approximations de première espèce. (Pour les approximations de première espèce, cf. § 6.2).

2. qui serait dû à Huygens, cf. § 6

1.4 La démarche proposée ici

Le but de ces notes est de présenter une preuve très simple du théorème de meilleure approximation, qui est de nature géométrique. Les preuves usuelles reposent sur le *calcul* préalable des formes des réduites par récurrence, alors qu'ici, on va mettre en évidence géométriquement ce qui fait que les deux processus (algorithme des fractions continues et recherche de meilleures approximations successives) coïncident. Les références historiques et bibliographiques sont détaillées dans la dernière section (§ 6).

2 Algorithme géométrique pour la meilleure approximation

2.1 Formulation géométrique de la définition 2

N.B. La remarque suivante, bien que formulée en terme de distance euclidienne, est purement affine. Ce sera d'ailleurs le cas pour toutes nos constructions.

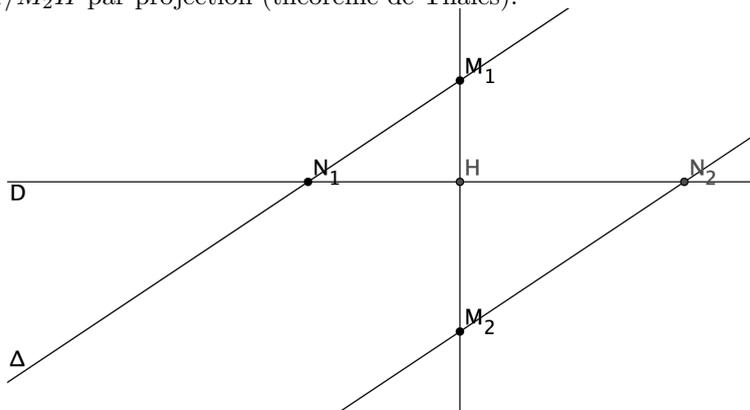
Remarque : Soient D une droite du plan et M_1, M_2 deux points du plan, extérieurs à D .

Soit Δ une droite quelconque du plan et soit $d_{\Delta}(M_i, D)$ la distance de M_i à D mesurée parallèlement à Δ .

Alors le rapport $d_{\Delta}(M_1, D)/d_{\Delta}(M_2, D)$ est indépendant de la droite Δ .

Autrement dit, pour savoir si M_1 est plus proche de D que M_2 , on peut mesurer leur écart le long de n'importe quelle direction.

Preuve – Quitte à faire agir une translation de vecteur parallèle à D sur le point M_2 , on peut se ramener à la figure ci-dessous. Le rapport $d_{\Delta}(M_1, D)/d_{\Delta}(M_2, D) = M_1N_1/M_2N_2$ est alors égal à M_1H/M_2H par projection (théorème de Thalès). \square



On considère un nombre $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et la droite $D : y = \alpha x$ dans \mathbb{R}^2 . On travaillera en fait dans le premier quadrant $(\mathbb{R}^+)^2$. On note (q, p) les coordonnées d'un point de \mathbb{N}^2 .

Pour un point M on note $d(M, D)$ la distance euclidienne entre M et D . Comme le nombre $|q\alpha - p|$ représente la distance verticale entre (q, p) et la droite $D : y = \alpha x$, il est plus naturel de reformuler la définition 2 comme suit :

Définition 3. Un point $(q, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $q > 1$ est un point entier de meilleure approximation de la droite $D : y = \alpha x$ si, et seulement si, pour tout point $(q', p') \in (\mathbb{N}^*)^2$, tel que $q' \leq q$ on a $d(M', D) \geq d(M, D)$, avec égalité si, et seulement si, $(q', p') = (q, p)$.

Cette définition est la traduction exacte de la définition 2, sachant que, via la remarque ci-dessus, il est équivalent de considérer la distance verticale ou la distance euclidienne.

On notera \mathcal{M} l'ensemble des points entiers des meilleure approximation de D . Par définition, les abscisses des points de \mathcal{M} sont deux à deux distinctes et on dira aussi que deux points de meilleure approximation $(q, p) \in \mathcal{M}$ et $(q', p') \in \mathcal{M}$ sont successifs si $q < q'$ et s'il n'y a pas de point de \mathcal{M} d'abscisse $q'' \in]q, q'[,$

2.2 Cônes délimitant des zones de meilleure approximation

Hypothèses : On se place dans \mathbb{R}^2 , et on considère toujours une droite $D : y = \alpha x$ avec $\alpha > 0$ fixé. Les éléments de \mathbb{R}^2 seront tantôt vus comme des points, tantôt comme des vecteurs.

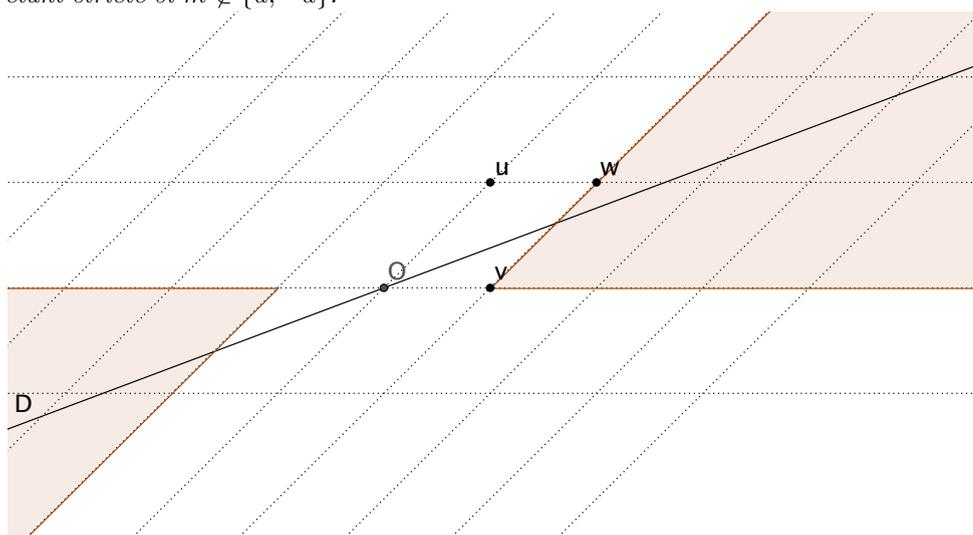
Lemme : Soient u et v deux points de $(\mathbb{R}^+)^2$, extérieurs à D , situés de part et d'autre de D , tels que v soit strictement plus proche de D que u .

Notons $K = (v + \mathbb{R}^+u + \mathbb{R}^+v)$ le cône positif de sommet v engendré par les vecteurs u et v , et $-K$ l'image de K par la symétrie de centre l'origine. Notons enfin \mathcal{R} le réseau $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$.

Alors :

(i) En excluant l'origine, qui est sur D , les points v et $-v$ sont strictement plus proches de D que tous les autres points de $\mathcal{R} \setminus (K \cup (-K))$.

(ii) En outre, les points u et $-u$ sont les points du réseau \mathcal{R} , à l'extérieur de $K \cup (-K) \cup \{0\}$, les plus proches de la droite D , en ce sens que pour tout $m \in \mathcal{R} \setminus (K \cup (-K) \cup \{0\})$, $d(m, D) \geq d(u, D)$, l'inégalité étant stricte si $m \notin \{u, -u\}$.



Preuve – Notons $w = u + v$. L'hypothèse selon laquelle v est strictement plus proche de D que u signifie que la droite D sort du parallélogramme $Ouvw$ en un point du côté $]v, w[$, comme représenté sur la figure.

Nous laissons le lecteur contempler les faits suivants : pour tout point $m \in \mathcal{R} \setminus (K \cup (-K) \cup \{0\})$,

(i) en regardant dans la direction $\mathbb{R}v : d_{\mathbb{R}v}(m, D) > \|v\| = d_{\mathbb{R}v}(v, D)$,

(ii) en regardant dans la direction $\mathbb{R}u$, si $m \notin \{-u, u\}$, $d_{\mathbb{R}u}(m, D) > \|u\| = d_{\mathbb{R}u}(u, D)$. \square

On replace maintenant ce résultat dans le contexte, qui nous intéresse par la suite, de deux points du premier quadrant, engendrant le réseau \mathbb{Z}^2 :

Corollaire : Soient $\alpha > 0$ et $D : y = \alpha x$. Soient u et v deux points de \mathbb{N}^2 extérieurs à D , situés de part et d'autre de D , tels que v soit strictement plus proche de D que u et tels que, en outre, $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}^2$.

On suppose enfin que l'abscisse de v est strictement plus grande que l'abscisse de u et que ces abscisses sont strictement positives.

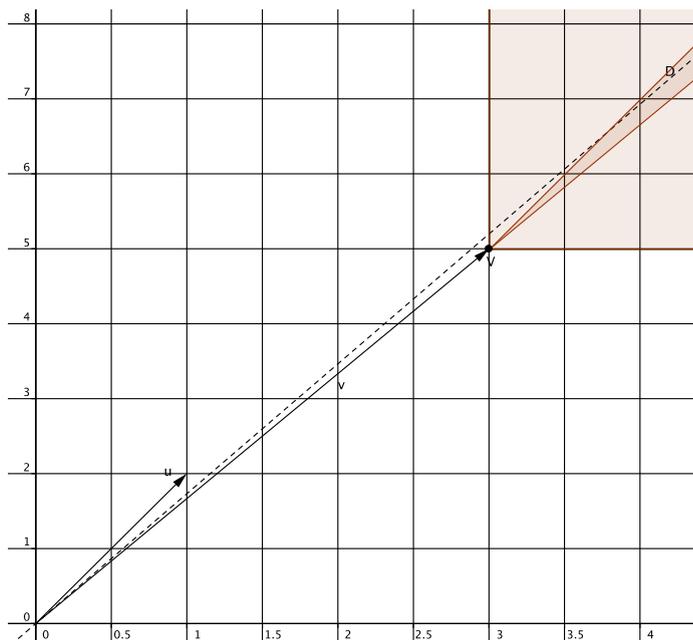
Alors u et v sont deux points successifs de l'ensemble \mathcal{M} des points entiers de meilleure approximation de D , introduit à la définition 3.

Preuve – Notons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les deux vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^2 .

(i) Comme u et v sont dans \mathbb{N}^2 , on est sûr que le cône $K = v + \mathbb{R}^+u + \mathbb{R}^+v$ est inclus dans le cône (quadrant) $v + \mathbb{R}^+e_1 + \mathbb{R}^+e_2$. En outre comme ni u ni v ne sont des vecteurs verticaux, la demi-droite verticale $v + \mathbb{R}^+e_2$ est hors de K .

Dans ce cas, le lemme précédent (i) montre que v est un point entier de meilleure approximation de D .

Sur la figure ci-dessous, la droite D est en pointillés. Comme, en repère orthonormé, un couple de vecteurs (u, v) de déterminant ± 1 conduit rapidement à des parallélogrammes très aplatis, on a choisi de représenter la figure dans un repère orthogonal non normé, ce qui n'est pas un problème car les questions étudiées ici, à condition de les reformuler en terme de quotient d'écart à la droite D , sont de nature affine et non euclidienne, cf. le N.B. au début du § 2.1.



(ii) Par le (ii) du lemme, on sait que pour tout point m de \mathbb{Z}^2 privé de $K \cup (-K) \cup \{0\}$, $d(m, D) \geq d(u, D)$ avec égalité seulement pour u et $-u$. Comme $-K$ ne rencontre pas le premier quadrant $(\mathbb{R}^+)^2$, on en déduit bien que u est aussi un point entier de meilleure approximation de D et qu'il n'y a pas de point entier de meilleure approximation "entre u et v ". \square

2.3 La construction géométrique clé

Hypothèses : On se place dans \mathbb{R}^2 , et on considère toujours une droite $D : y = \alpha x$ avec $\alpha > 0$ fixé. On considère deux vecteurs u et v à coordonnées entières positives, vérifiant presque toutes les hypothèses du corollaire du § 2.2. Précisément, on suppose que (u, v) engendre le réseau \mathbb{Z}^2 autrement dit : $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}^2$, que les points u et v sont (strictement) de part et d'autre de la droite D , et que le point v est *strictement plus proche de D* que u .

Construction : Notons $w = u + v$. L'hypothèse précédente entraîne que la droite D coupe le côté $]v, w[$ en un point S .

On note aussi T le point d'intersection de la droite (uw) avec D .

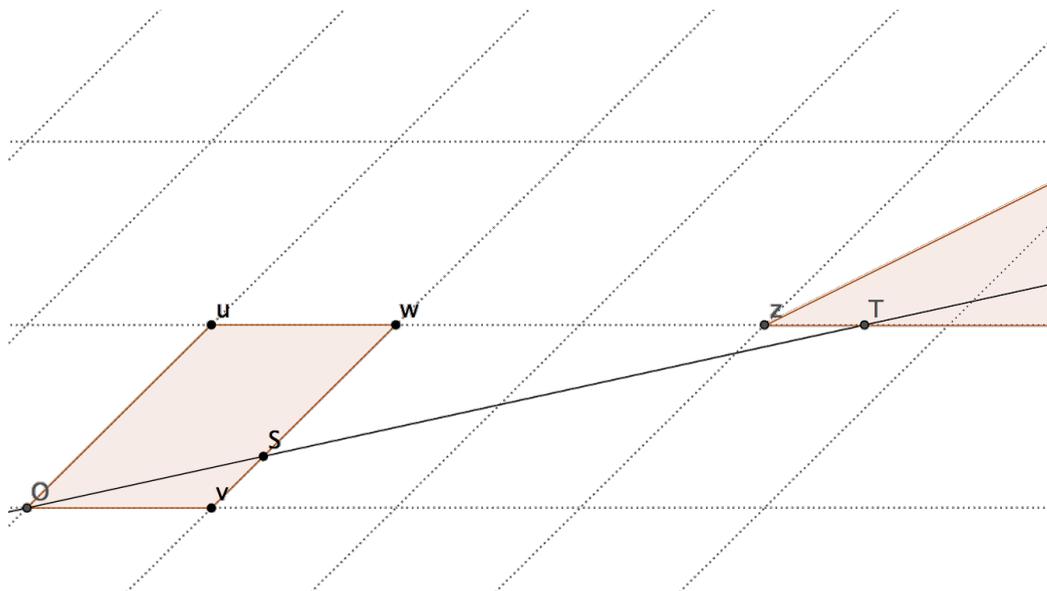
Il existe alors $t \in]0, 1[$ tel que $S = tu + v$ et on a donc aussi, par le théorème de Thalès, $T = u + \frac{1}{t}v$. On peut dès lors poser $z = u + E(\frac{1}{t})v$, où E désigne la partie entière.

Notation – On note $z = C(u, v)$ le point z ainsi construit. *Géométriquement*, z s'obtient de manière naturelle en partant du point u , en faisant des translations successives de vecteur v , et en s'arrêtant au dernier point qui est du même côté de D que u .

Propriété de $z = C(u, v)$:

- (i) En comparant les distances parallèlement à $\mathbb{R}v$, z est strictement plus proche de D que v .
- (ii) Par la formule $z = u + E(\frac{1}{t})v$, on voit que le déterminant dans la base (u, v) du couple (v, z) vaut -1 , donc (v, z) est encore une base du réseau \mathbb{Z}^2 .
- (iii) Si en outre le vecteur v n'est pas vertical, le couple (v, z) vérifie toutes les hypothèses du corollaire du § 2.2 et donc v et z sont deux points successifs de l'ensemble \mathcal{M} des points entiers de meilleure approximation de la droite D .

Dans la figure ci-dessous, on a choisi par lisibilité de ne pas représenter les axes de coordonnées et de dessiner v horizontal.



2.4 Algorithme donnant les points de meilleure approximation

2.4.1 Description

On considère toujours une droite $D : y = \alpha x$, avec $\alpha > 0$, dans le plan \mathbb{R}^2 , et on va construire, dans le premier quadrant \mathbb{N}^2 , l'ensemble \mathcal{M} des points entiers de meilleure approximation de D (au sens de la déf. 3) par l'algorithme géométrique suivant. On utilise la notation $z = C(u, v)$ introduite au § 2.3.

• **Initialisation :** On considère les points initiaux $m_{-2} = (1, 0)$ et $m_{-1} = (0, 1)$.

• **Première étape (particulière) :** Si D est strictement plus proche de m_{-1} que de m_{-2} , on construit $m_0 = C(m_{-2}, m_{-1})$. Ceci correspond au cas où $\alpha > 1$.

Si m_{-2} est strictement plus proche de D que m_{-1} , on considère $m_0 = m_{-2}$. Ceci correspond au cas où $\alpha < 1$.

Dans les deux cas, on a : $m_0 = (1, a_0)$ où $a_0 = E(\alpha)$, et m_0 est strictement plus proche de D que m_{-1} .

(Dans le cas trivial où $\alpha = 1$, on limite la construction du § 2.3 à la construction de $m_{-1} + m_{-2} = (1, 1)$, on prend alors $m_0 = m_{-1} + m_{-2} = (1, 1)$ et arrêt de l'algorithme).

• **Itération :** On suppose que, pour un $k \in \mathbb{N}$, on a construit des points m_k et m_{k-1} dans \mathbb{N}^2 qui sont de part et d'autre de la droite D , avec les propriétés suivantes : d'une part $m_k \mathbb{Z} + m_{k-1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ et d'autre part m_k est strictement plus proche de D que m_{k-1} .

Si $m_k \in D$ on arrête l'algorithme.

Sinon, on construit $m_{k+1} = C(m_{k-1}, m_k)$. Par les propriétés données à la fin du § 2.3, le nouveau couple (m_k, m_{k+1}) a toutes les propriétés requises pour l'itération. \square

2.4.2 Résultat de l'algorithme

(i) **Cas particulier du premier point m_0 :** suivant la définition 3, le point $m_0 = (1, E(\alpha))$ n'est un point entier de meilleure approximation de D que si $\{\alpha\} < 1/2$.

Mais, si $\{\alpha\} > 1/2$ alors, par la construction de $m_1 = C(m_{-1}, m_0)$, on obtient le point $m_1 = (1, E(\alpha) + 1)$ qui est le point entier de meilleure approximation, pour l'abscisse 1.

(ii) **Cas des points m_k d'abscisse strictement plus grande que 1 :**

Propriété : *En ne considérant que les points d'abscisse strictement plus grande que 1, l'ensemble des points m_k coïncide exactement avec l'ensemble \mathcal{M} des points entiers de meilleure approximation de D introduit à la définition 3.*

Preuve – • Si $\{\alpha\} < 1/2$, on considère le couple $(u, v) = (m_{-1}, m_0)$ où $m_0 = (1, a_0)$. On construit $m_1 = C(m_{-1}, m_0)$ et comme m_0 n'est pas vertical, la propriété du § 2.3 (iii) nous dit que (m_0, m_1) sont des points de meilleure approximation successifs de D . Ainsi m_1 est le premier point de meilleure approximation d'abscisse strictement plus grande que 1.

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $k > 1$, comme le vecteur m_{k-2} n'est pas vertical, les deux points m_{k-1}, m_k sont des points successifs de \mathcal{M} .

• Si $\{\alpha\} > 1/2$ même raisonnement mais avec m_2 comme premier point de \mathcal{M} d'abscisse strictement plus grande que 1. □

2.5 Synthèse

Il est utile, pour la suite, de reprendre les résultats précédents sur la forme d'une *caractérisation* pour *chaque* point de meilleure approximation.

Propriété : *Soit $\alpha > 0$ et $D : y = \alpha x$. Soit $u = (q, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $q > 1$, qui n'est pas sur D .*

(C1) *u est un point entier de meilleure approximation de D si, et seulement si, il existe un $v \in \mathbb{N}^2$ vérifiant les conditions suivantes :*

- *v est situé de l'autre côté de D par rapport à u (ou sur D éventuellement³),*
- *v est d'abscisse strictement plus grande que celle de u ,*
- *$|\det(u, v)| = 1$ autrement dit $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}^2$,*
- *et v est strictement plus proche de D que u .*

(C2) *Dans ce cas, en notant $u = m_k$ comme au § 2.4, v est le point m_{k+1} .*

En outre, à partir de $u = m_k$ et $v = m_{k+1}$, on sait construire le point m_{k+2} qui les suit par la construction clé du § 2.3.

3 Traduction algébrique : fraction continue

Dans tout ce paragraphe, on fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on note, pour tout $k \geq -2$, $m_k = (Q_k, P_k) \in \mathbb{N}^2$ les points construits par l'algorithme géométrique du § 2.4.1.

Le but de cette section est de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fractions P_k/Q_k , dont on va voir tout de suite qu'elles sont irréductibles, sont exactement les *réduites* p_k/q_k du développement en fraction continue de α , introduite au § 1.2., autrement dit que pour tout $k \geq 0$, $p_k = P_k$ et $q_k = Q_k$, cela sera fait au § 3.3. L'utilisation de majuscules pour les coordonnées de m_k permet de distinguer ces objets a priori.

3.1 Une remarque sur le déterminant

Par la propriété (ii) du § 2.3, on sait que pour $m_k = C(m_{k-1}, m_{k-2})$, on a l'égalité :

$$\det(m_{k-1}, m_k) = -\det(m_{k-2}, m_{k-1}),$$

en notant \det le déterminant dans la base canonique. Comme, au départ de notre algorithme, $(m_{-2}, m_{-1}) = (e_1, e_2)$ est la base canonique, on en déduit par récurrence immédiate la :

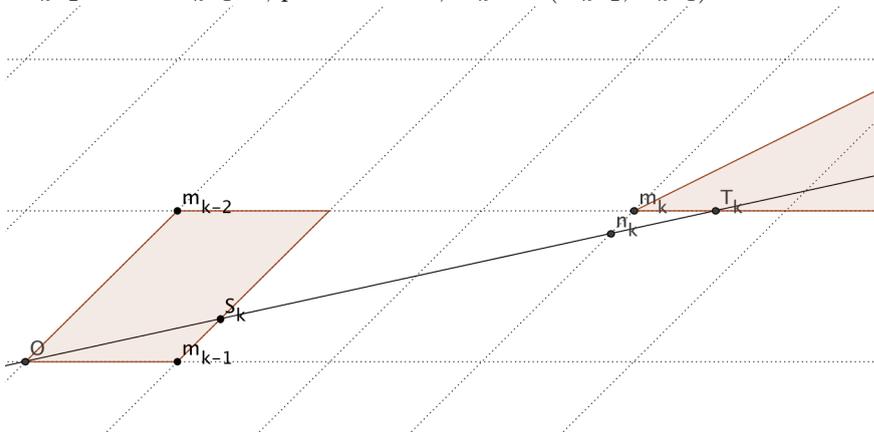
Remarque : *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(m_{k-1}, m_k) = (-1)^{k-1}$.*

En coordonnées, on obtient que $\begin{vmatrix} Q_{k-1} & Q_k \\ P_{k-1} & P_k \end{vmatrix} = (-1)^{k-1}$, en particulier une relation de Bézout qui donne que Q_k et P_k sont premiers entre eux. Ainsi les fractions P_k/Q_k sont irréductibles.

3. ceci ne se produit que pour α rationnel et u étant alors l'avant dernier point de meilleure approximation

3.2 Identification des quotients complets

Notation – On adapte les notations (et la figure) utilisées au § 2.3, pour $z = C(u, v)$ au cas où $u = m_{k-2}$ et $v = m_{k-1}$ et, par définition, $m_k = C(m_{k-2}, m_{k-1})$.



On définit $t_k \in]0, 1[$ tel que $S_k := t_k m_{k-2} + m_{k-1}$ soit le point où la droite D sort du parallélogramme défini par les vecteurs m_{k-2} et m_{k-1} , et, par la construction du § 2.3 en notant $\theta_k = 1/t_k$, on a :

$$m_k = m_{k-2} + E(\theta_k)m_{k-1}. \quad (1)$$

Remarque : En posant $\theta_0 = \alpha$, la relation (1) est valable pour tout $k \geq 0$. Le point marqué n_k sur la figure n'intervient pas ici mais sera utile au § 5.1.

Propriété : (i) La suite $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ coïncide avec la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des quotients complets du développement en fraction continue de α , définie au § 1.2.

(ii) En outre, on peut voir géométriquement les quotients complets α_k comme suit :

$$\forall k \geq 1, \alpha_k = \frac{d(m_{k-2}, D)}{d(m_{k-1}, D)}.$$

Preuve de la propriété : En considérant les distances parallèlement à la droite $\Delta = \mathbb{R}m_{k-2}$, et par définition de $S_k = t_k m_{k-2} + m_{k-1}$, on a :

$$\frac{d_{\Delta}(m_{k-2}, D)}{d_{\Delta}(m_{k-1}, D)} = \frac{Om_{k-2}}{S_k m_{k-1}} = \frac{1}{t_k} = \theta_k.$$

Notons pour simplifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d_k pour $d(m_k, D)$. D'après la remarque du § 2.1, l'équation précédente donne la relation :

$$\theta_k = \frac{d_{k-2}}{d_{k-1}}. \quad (2)$$

D'autre part, comme par construction $m_k = m_{k-2} + E(\theta_k)m_{k-1}$ (égalité (1) ci-dessus), en considérant cette fois les distances parallèlement à $\Delta' = \mathbb{R}m_{k-1}$, on a l'égalité : $d_{\Delta'}(m_{k-2}, D) = d(m_{k-2}, T_k) = d(m_{k-2}, m_k) + d_{\Delta'}(m_k, D)$, donc : $d_{\Delta'}(m_{k-2}, D) = E(\theta_k)d_{\Delta'}(m_{k-1}, D) + d_{\Delta'}(m_k, D)$.

Autrement dit, en divisant cette relation par $d_{\Delta'}(m_{k-1}, D)$ et compte-tenu de la remarque du § 2.1 :

$$\frac{d_{k-2}}{d_{k-1}} = E(\theta_k) + \frac{d_k}{d_{k-1}}. \quad (3)$$

En comparant (2) et (3), on en déduit la relation de récurrence :

$$\theta_k = E(\theta_k) + \frac{1}{\theta_{k+1}}. \quad (4)$$

La formule (4), valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, et l'initialisation $\theta_0 = \alpha = \alpha_0$ mentionnée à la remarque ci-dessus, comparées à la définition des quotients complets dans le développement en fraction continue au § 1.2 montrent la propriété du (i) : $\forall k \in \mathbb{N}, \alpha_k = \theta_k$.

L'égalité (2) montre alors le (ii). \square

Corollaire : *La suite (m_k) des points entiers de meilleure approximation de $D : y = \alpha x$ vérifie la relation de récurrence $\forall k \in \mathbb{N}, m_k = m_{k-2} + a_k m_{k-1}$ où les (a_k) sont les entiers apparaissant dans le développement en fraction continue $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_k, \dots]$ (cf. § 1.2).*

Preuve : La relation (1) et l'égalité $\alpha_k = \theta_k$ de la propriété donnent bien la relation $m_k = m_{k-2} + E(\alpha_k)m_{k-1}$. Or par définition $a_k = E(\alpha_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où le corollaire. \square

3.3 Identification des réduites

Propriété : *Soit $\alpha > 0$. En notant $m_k = (Q_k, P_k)$ la suite de points construite par l'algorithme géométrique du § 2.4.1, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $(Q_k, P_k) = (q_k, p_k)$ où p_k/q_k est l'écriture irréductible de la k -ième réduite du développement de α en fraction continue.*

Preuve de la propriété : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit D_k la droite (Om_k) qui est donc de pente P_k/Q_k .

Lemme : *L'algorithme géométrique du § 2.4.1 donne exactement les mêmes points de meilleure approximation (m_0, \dots, m_k) pour la droite $D_k = (Om_k)$ que pour la droite $D : y = \alpha x$.*

Application du lemme à la preuve de la propriété : Notons $D_k : y = \alpha' x$ la droite (Om_k) , de sorte que $\alpha' = P_k/Q_k$.

Le lemme précédent dit que la suite (m_0, m_1, \dots, m_k) des points de meilleure approximation de D est aussi celle de D' . Le corollaire du § 3.2 dit alors que le développement en fraction continue de α et α' est le même jusqu'au rang k . Mais comme l'algorithme géométrique s'arrête en m_k pour D' , on a l'égalité : $P_k/Q_k = \alpha' = [a_0, a_1, \dots, a_k]$. \square

Preuve du lemme : En exercice ici, elle est donnée au § 5.1. \square

3.4 Où le théorème d'approximation diophantienne devient évident

Soit $\alpha > 0$. Par les propriétés du § 2.4.2, les points $m_k = (Q_k, P_k)$ sont exactement les points de meilleure approximation de $D : y = \alpha x$, à une éventuelle exception triviale près (pour $k = 0$), ce qui revient au même que de dire que les fractions (irréductibles) P_k/Q_k sont exactement les fractions de meilleure approximation de α (cf. déf. 2 et déf. 3).

Par la propriété du § 3.3, ces couples (Q_k, P_k) coïncident exactement avec les couples (q_k, p_k) définissant les réduites du développement en fraction continue de α .

Ceci achève de démontrer le théorème 1, et nous l'espérons, permet somme toute de le considérer comme une conséquence facile de la figure clé du § 2.3. \square

4 Géométrisation du folklore sur les fractions continues

4.1 Quelques évidences : des formules inoubliables

(i) La plupart des manuels sur les fractions continues commencent par les définitions du § 1.2 puis *parachutent les formules* :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_k = p_{k-2} + a_k p_{k-1}, \\ q_k = q_{k-2} + a_k q_{k-1}, \end{cases}$$

en les *vérifiant* par récurrence par le calcul.

On aura compris ici que ces formules sont seulement la traduction en coordonnées de l'algorithme géométrique qui construit : $m_k = m_{k-2} + a_k m_{k-1}$ où a_k , qui est géométriquement le dernier entier l tel que $m_{k-2} + l m_{k-1}$ "reste du côté de m_{k-2} ", a été identifié au § 3.2 au terme d'ordre k du développement en fraction continue. Même l'initialisation $(q_{-2}, p_{-2}) = (1, 0)$ et $(q_{-1}, p_{-1}) = (0, 1)$ est géométriquement naturelle.

N.B. – Bien sûr, une dérivation purement algébrique de ces formules est nécessaire si, en sens inverse, *on part* d'une suite (a_k) et qu'on cherche à donner une formule de récurrence pour les $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$. Dans ce cas, on peut quand même éviter de "parachuter" les formules en comprenant le problème en terme de compositions d'homographies et donc de produits matriciels (cf. p.ex. [Fa] p. 50 et le (iii) ci-dessous).

(ii) Par ailleurs on a déjà dit au 3.1 que la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N}, q_{k-1}p_k - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$$

ne s'oublie pas si l'on pense en terme de déterminants.

(iii) Au (ii) de la propriété du § 3.2, on a obtenu l'interprétation géométrique suivante du quotient complet α_r :

$$\alpha_r = \frac{d(m_{r-2}, D)}{d(m_{r-1}, D)}.$$

En considérant plutôt le quotient des distances verticales (suivant la remarque du § 2.1), on obtient, compte tenu du fait que les points m_{r-1} et m_{r-2} sont de part et d'autre de D , la relation :

$$\alpha_r = \frac{q_{r-2}\alpha - p_{r-2}}{p_{r-1} - \alpha q_{r-1}}, \quad (5)$$

qui est aussi une relation importante du folklore des fractions continues.

On retiendra aussi la relation en sens inverse :

$$\alpha = \frac{p_{r-1}\alpha_r + p_{r-2}}{q_{r-1}\alpha_r + q_{r-2}}, \quad (6)$$

qui met mieux en valeur l'homographie associée à la matrice $\begin{pmatrix} p_{r-1} & p_{r-2} \\ q_{r-1} & q_{r-2} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Ce sujet est poursuivi dans le paragraphe suivant.

4.2 Applications plus frappante encore pour l'équivalence unimodulaire

Définition – On dit que deux réels α et β sont *unimodulairement équivalents* si, et seulement si, il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ (i.e. de déterminant ± 1), telle que :

$$\beta = \frac{a\alpha + a'}{b\alpha + b'}.$$

On a vu explicitement au (iii) du § 4.1 comment, pour $\alpha > 0$, tous les quotients complets α_r sont unimodulairement équivalents à α . Plus étonnante a priori est la réciproque :

Lemme d'unicité : Soient α et ζ deux réels, avec $\zeta > 1$. On suppose qu'il existe des entiers a, a', b, b' tels que $b > b' > 0$ et $ab' - a'b = \pm 1$ et :

$$\alpha = \frac{a\zeta + a'}{b\zeta + b'}.$$

Alors il existe un entier r tel que $a = p_{r-1}$, $a' = p_{r-2}$, $b = q_{r-1}$ et $b' = q_r$, où pour tout i , p_i/q_i désigne la i -ième réduite du développement en fraction continue de α , et $\zeta = \alpha_r$, le r -ième quotient complet.

Preuve : De notre point de vue géométrique, c'est immédiat grâce à la synthèse du § 2.5. En effet, en posant $u = (b', a')$, $v = (b, a)$ et $T = (b\zeta + b', a\zeta + a')$, les points u, v, T sont, par rapport à D : $y = \alpha x$, exactement dans la configuration de la figure-clé du § 2.3, page 7. On vérifie ci-dessous les hypothèses de la synthèse du § 2.5, ce qui permet de conclure que $u = m_{r-2}$, $v = m_{r-1}$ et $T = m_{r-2} + \alpha_r m_{r-1}$.

Précisément : • le fait que T s'obtienne comme $u + \zeta v$ avec $\zeta > 0$ entraîne bien que (u, v) sont de part et d'autre de D ,

- l'hypothèse $b' < b$ dit bien que l'abscisse de u est inférieure à celle de v ,
- $|\det(u, v)| = 1$ est explicitement une hypothèse du lemme ici.
- l'hypothèse $\zeta > 1$ permet de voir que v est strictement plus proche de D que u .

On pourra comparer aux démonstrations arithmétiques dans [Fa] p. 58 ou [H-W] Thm. 172 (celle dans [R-S] p. 5 est inexacte par omissions). \square

L'étude plus fine des développements en fractions continues fait intervenir la définition suivante :

Définition : Soit α et β deux nombres réels. Soient $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_r, \dots]$ et $\beta = [b_0, b_1, \dots, b_s, \dots]$ leurs développements en fraction continue, suivant la notation donnée à la fin du § 1.2. On dira que α et β ont *même développement en fraction continue à partir d'un certain rang* si, et seulement si, il existe un entier r et un entier s tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_{r+i} = b_{s+i}$.

La caractérisation suivante est très classique, mais les preuves classiques, au moins pour un sens, sont souvent assez longues (cf. les références infra).

Propriété Deux nombres irrationnels α et β ont même développement en fraction continue à partir d'un certain rang *si, et seulement si, ils sont unimodulairement équivalents*.

Preuve : Le sens \Rightarrow est facile : en effet, il suffit (puisqu'il s'agit d'une relation d'équivalence) de montrer que pour $\alpha = [a_0, \dots, a_n, \dots]$ et $r > 0$, α et son r -ième quotient complet $\alpha_r = [a_r, a_{r+1}, \dots]$ sont unimodulairement équivalents. Or ceci a déjà été dit au début de ce § 4.2.

Le sens \Leftarrow ressemble au lemme d'unicité ci-dessus, sauf qu'on abandonne les hypothèses $b > b' > 0$. On laisse la preuve de cette propriété comme exercice d'application du point de vue géométrique introduit ici, en renvoyant à [I] p. 702 pour la solution.

On pourra comparer avec les preuves dans [H-W] thm. 175, [R-S] p. 6-8, [Fa] p. 60. \square

4.3 Cas du théorème de meilleure approximation de Legendre

On a appelé *théorème de meilleure approximation diophantienne* le théorème 1 du § 1.3, qui était en tout cas connu de Huygens. On appelle aujourd'hui souvent du même nom le théorème suivant (bien postérieur puisque dû à Legendre) :

Théorème 2 (Théorème de meilleure approximation diophantienne de Legendre). *Soit α un nombre irrationnel.*

(i) *Supposons que $k \geq 1$. Alors l'une au moins des deux inégalités suivantes est vraie :*

$$\left| \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2} \quad \text{ou} \quad \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{2q_k^2}.$$

(ii) *Réciproquement, si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$ alors il existe un entier k tel que $(a, b) = (p_k, q_k)$ où p_k/q_k est une réduite du développement de α en fraction continue.*

Le (i) du théorème est assez facile, très proche de la majoration la plus évidente de $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right|$ comme rappelé au 4.3.1.

Il est plaisant (et peu courant dans les manuels à l'exception de [Ki]) de voir comment déduire le (ii), qui est le résultat de Legendre proprement dit, du théorème 1.

4.3.1 Commentaire sur le (i) du théorème 2

Ce point (i) est assez facile, et il ne faut surtout pas suivre ici la longue preuve de [S] p. 217.

La formule $|p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k| = 1$ (cf. 4.1 (ii)), divisée par $q_k q_{k+1}$, donne que $\left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}}$ et comme α est entre les deux fractions $\frac{p_k}{q_k}$ et $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$, on en déduit l'inégalité bien connue :

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1} q_k^2} \quad (\dagger)$$

la dernière inégalité venant de la relation de récurrence $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} > a_{k+1}q_k$.

Ceci suffit si $a_{k+1} \geq 2$, mais sinon, on peut écrire :

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| + \left| \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}} < \frac{1}{2q_k^2} + \frac{1}{2q_{k-1}^2},$$

avec l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $1/q_k^2$ et $1/q_{k-1}^2$ qui est stricte car, à part éventuellement si $k = 1$, on est sûr que $q_{k-1} < q_k$. (Cf. [H-W] p. 193 pour ce cas particulier). \square

4.3.2 Comment on peut déduire le (ii) du théorème 2 du théorème 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$. Pour montrer que a/b est une réduite de α , il suffit par le théorème 1 de montrer que a/b est une fraction de meilleure approximation de α .

Supposons qu'on ait un autre couple $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $c/d \neq a/b$ et $|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b}$.

On veut montrer que $d > b$.

Or en divisant l'inégalité précédente par d , on sait que : $|\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{2bd}$.

$$\text{Ainsi, } \left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| \leq \left| \alpha - \frac{a}{b} \right| + \left| \alpha - \frac{c}{d} \right| < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bd}.$$

D'autre part, puisque, par hypothèse $a/b \neq c/d$, on sait que $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| = \frac{|ad - bc|}{bd} \geq \frac{1}{bd}$ puisque le numérateur est un entier non nul.

Ainsi, on obtient que : $\frac{1}{bd} < \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2bd}$ ce qui montre que $d > b$. \square

4.3.3 A propos des preuves plus standard du (ii) du théorème 2

On déduit souvent ce théorème 2 du lemme d'unicité du § 4.2, cf. [H-W] thm. 184.

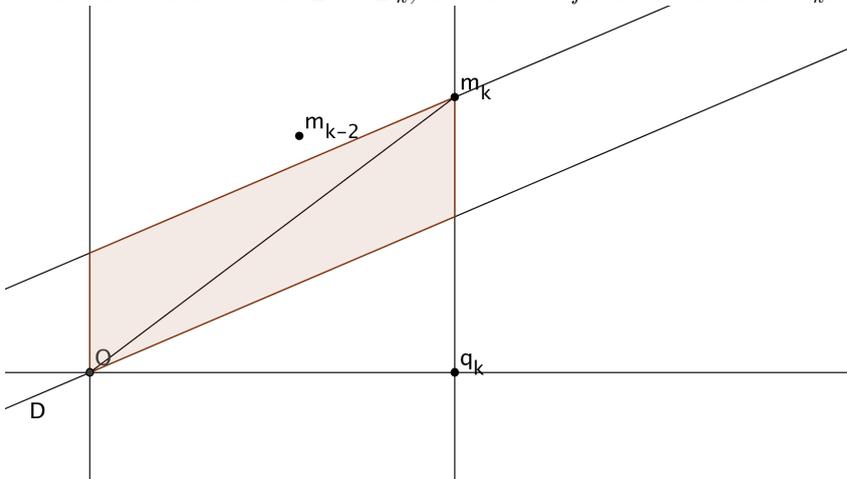
5 Le point de vue de Klein

5.1 Une remarque facile

Remarque – Soient $\alpha > 0$ et $D : y = \alpha x$. Soit $m_k = (q_k, p_k)$ un point entier de meilleure approximation de D (par le théorème 1, il est équivalent de dire : soit p_k/q_k réduite du développement en fraction continue de α). Soit D_k la droite (Om_k) .

Par définition d'un point entier de meilleure approximation (cf. déf. 3) il n'y pas de points de \mathbb{N}^2 dans la bande ouverte délimitée par la droite D , sa parallèle passant par m_k , jusqu'à l'abscisse q_k (bande grisée sur la figure ci-dessous).

Comme la droite D_k porte une "diagonale" dans cette bande, il n'y a pas de point entier strictement entre les deux droites D et D_k , d'abscisse inférieure à celle de m_k .



Application de cette remarque à la preuve du lemme laissé en exercice au § 3.3 :

Vu la construction des points m_k jusqu'à une certaine abscisse q (cf. § 2.4.1), ces points ne dépendent que de la donnée des points de \mathbb{N}^2 situés au-dessus et en-dessous de D , jusqu'à l'abscisse q : autrement dit, si une droite D' partage \mathbb{N}^2 de la même façon que D jusqu'à l'abscisse q , les points entiers de meilleure approximation de D' seront les mêmes que ceux de D jusqu'à cette abscisse.

Par la remarque précédente, c'est le cas pour la droite $D' = (Om_k)$. \square

5.2 Un résultat plus précis

Lemme : *Pour tout $k \geq 1$, il n'y a pas de point à coordonnées entières entre le segment $[m_{k-2}, m_k]$ et la droite D .*

Ce lemme est plus précis que la remarque précédente, car par exemple si k est impair, m_k et m_{k-2} sont au dessus de la droite D , mais m_{k-2} est aussi au-dessus de la parallèle à D passant par m_k , comme indiqué à la figure ci-dessus.

Preuve du lemme – A partir de la construction clef la figure du 3.2, il s'agit de voir qu'il n'y pas de points entiers (i.e. de points du réseau) strictement à l'intérieur du trapèze $[0, m_{k-2}, m_k, n_k]$. \square

Soit $D : y = \alpha x$. Notons pour simplifier E^- l'ensemble des points entiers $(q, p) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui sont en-dessous de D (ou sur D éventuellement). Notons E^+ pour ceux qui sont au-dessus (ou sur D).

Notons $m_k = (q_k, p_k)$ la suite des points entiers de meilleure approximation.

On sait que pour tout k pair (resp. impair) les points m_k sont dans E^- (resp. dans E^+). On a alors la :

Propriété : *Avec les notations précédentes, pour tout $k \geq 0$ pair, la droite (m_{k-2}, m_k) est au-dessus de l'ensemble E^- .*

De même si k est impair, (m_{k-2}, m_k) est au-dessous de l'ensemble E^+ .

Preuve – Le lemme précédent donne la propriété pour les *segments*. Il s'agit de la prolonger aux *droites*.

Or par construction la pente du segment $[m_{k-2}, m_k]$ est la pente du vecteur m_{k-1} i.e. p_{k-1}/q_{k-1} .

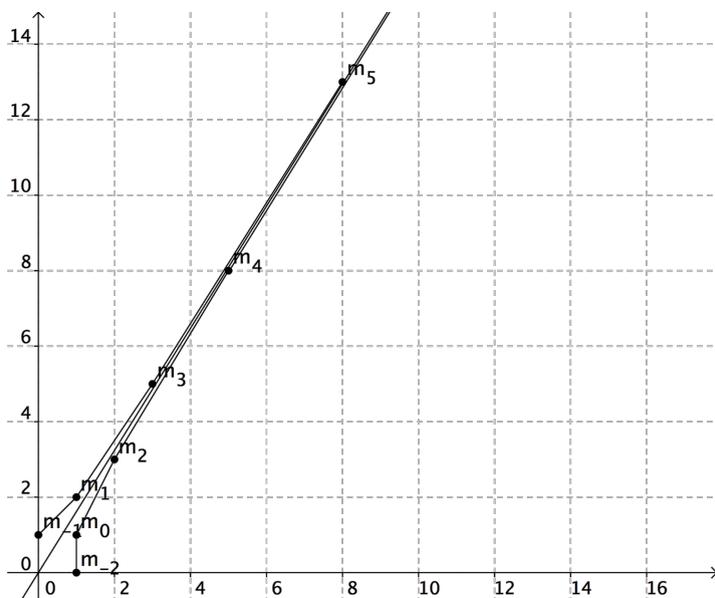
Ainsi la suite des pentes des segments $[m_{2k-2}, m_{2k}]$ est décroissante, ce qui montre la propriété pour les indices pairs, et celle des segments $[m_{2k-1}, m_{2k+1}]$ est croissante, ce qui montre la propriété pour les indices impairs. \square

Remarque : Une preuve algébrique rapide de cette propriété se trouve dans [T] p. 7.

Corollaire (Smith, Klein) – *Les points $m_k = (q_k, p_k)$, donnant les réduites du développement en fraction continue d'un nombre $\alpha > 0$, sont, pour k pair, exactement les points extrémaux de l'enveloppe convexe de l'ensemble E^- des points à coordonnées entières sous la droite $D : y = \alpha x$.*

(De même pour k impair avec E^+).

La figure suivante donne une illustration pour le nombre d'or ϕ , dont le développement en fraction continue est $[1, 1, \dots, 1, \dots]$, ce qui donne pour les couples (q_k, p_k) les relations de récurrence : $p_k = p_{k-1} + p_{k-2}$ et $q_k = q_{k-1} + q_{k-2}$ et donc deux suites de Fibonacci "décalées".



6 Motivations, références bibliographiques et historiques

6.1 Motivation et sources

L'approche dite de Klein pour les fractions continues m'a été enseignée par B. Teissier. Je dois à P. Popescu-Pampu la référence [S] où est exposé l'algorithme géométrique. Mais le point de vue de Stark n'est pas complètement satisfaisant car il introduit au départ l'algorithme géométrique, qui bien sûr donne des points approchant de mieux en mieux la droite, mais pour lequel il n'est pas clair qu'on ait les points de *meilleure* approximation. Il prouve ce fait a posteriori algébriquement après le *calcul* de la forme algébrique des réduites.

La motivation initiale de ces notes était donc de justifier la nécessité de cet algorithme par la recherche a priori des points entiers de meilleure approximation. La construction clé du § 2.3 contient à elle-seule l'essentiel : le lien, donné par le théorème de Thalès, entre l'idée d'anthypérèse et la construction du prochain point de meilleure approximation.

Dans une certaine mesure, c'était aussi une façon de géométriser la démarche du chapitre 1 de [D].

Cependant, après que je lui ai montré un brouillon de ce projet, P. Popescu-Pampu m'a fait connaître la référence [I], qui le réalisait déjà. Le § 2 est donc assez proche de [I] mais les cônes considérés ici ne sont pas les mêmes que dans [I], ce qui simplifie notablement l'exposé, ainsi que la formulation choisie ici pour le lemme-clé du § 2.2, qui permet aussi de comprendre par exemple le lemme 4.3.3.

Pour ce qui est des théorèmes : il semble bien que le théorème 1 ait été trouvé par Huygens pour la mise au point de son modèle de système solaire avec des engrenages : une bonne référence sur ce sujet est [R-S] p. 59. Ceci est confirmé par A. Weil dans [W] p. 120. Pour le théorème 2, il est attribué à Legendre, cf. [L], mais le lien entre les deux théorèmes n'est pas souvent fait.

6.2 Variante donnée par Fowler et fractions intermédiaires

Une autre référence utile est le chapitre 9 du livre [Fo], aussi bien pour l'algorithme de Stark, que pour l'étude du procédé d'anthypérèse, qui est au centre de ce livre.

Enfin, suivant Fowler ([Fo] chap. 9, p. 328), le point de vue géométrique pour l'algorithme des fractions continues, souvent attribué à F. Klein, serait dû avant Klein à Smith dans [Sm].

L'algorithme donné par Fowler, qu'il appelle algorithme (sic) de Parménide, a ceci d'intéressant qu'il est fondé de manière beaucoup plus élémentaire encore sur l'itération de l'addition de deux vecteurs : on considère la même initialisation, avec les points $m_{-2} = (1, 0)$ et $m_{-1} = (0, 1)$. Pour l'itération, à partir de deux points M et N qui sont de part et d'autre de D , on calcule la somme

$R = M + N$ qui est plus proche de D que le point M ou N qui est du même côté que R . On pose alors $M :=$ le point parmi M et N qui n'est pas du même côté que D et $N := R$ (cf. [Fo] p. 323).

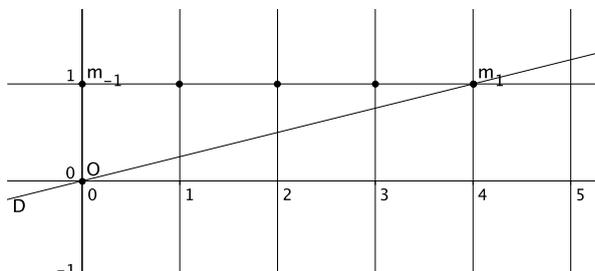
Par rapport à l'algorithme décrit au § 2.4.1, cela revient à considérer tous les points de la forme $m_{k-2} + im_{k-1}$ pour $i \in \llbracket 0, a_k \rrbracket$. Ces points sont exactement les points entiers sur les segments $[m_{k-2}, m_k]$.

Définition – Ces points supplémentaires s'écrivent $(q_{k-1} + iq_k, p_{k-1} + ip_k)$ et seront appelés *points intermédiaires*, les quotients correspondants $\frac{p_{k-1} + ip_k}{q_{k-1} + iq_k}$ s'appellent *fractions intermédiaires*.

Ces points intermédiaires interviennent implicitement dans un certain nombre de résultats sur les fractions continues, et très explicitement dans le théorème suivant :

Théorème 3. *Toute meilleure approximation de première espèce (cf. déf. 1) d'un nombre réel $\alpha > 0$ est donnée ou bien par une réduite ou bien par une fraction intermédiaire $\frac{p_{k-1} + ip_k}{q_{k-1} + iq_k}$ pour $i \leq a_{k+1}$ et $k \geq 0$.*

On renvoie à [Ki] p. 22 pour la preuve.



A titre d'exemple, on a représenté ici le cas particulier de $D : y = 1/4 \cdot x$, où parmi les points intermédiaires sur le segment $[m_{-1}, m_1]$, on peut vérifier (par le calcul) que le point $(3, 1)$ donne, avec la fraction $1/3$, une fraction de meilleure approximation *de première espèce* de $1/4$. Hélas, je ne connais pas de moyen de discriminer géométriquement, parmi ces points, ceux qui donnent effectivement de telles approximations.

Généralisations diverses : Le point de vue géométrique sur les fractions continues se prête bien à des généralisations en dimension supérieure. On pourra consulter [PP] et les références qui s'y trouvent, sur ce sujet.

Remerciements – Outre B. Teissier et P. Popescu-Pampu déjà cités, j'ai le plaisir de remercier ceux qui ont lu différentes versions de ce travail : A. Albalat, J.P. Mohsen, et surtout C. Boubel, dont les remarques ont permis d'améliorer grandement cet exposé.

Références

- [D] R. Descombes, *Éléments de théorie des nombres*, P.U.F., 1986.
- [Fa] A. Faisant, *L'équation diophantienne du second degré*, Hermann, 1991.
- [Fo] D. Fowler, *The mathematics of Plato's Academy*, Clarendon, 1987.
- [H] C. Huygens, *Descriptio automati planetarii*, publié en 1704, mais, suivant Weil, composé entre 1680 et 1687.
- [H-W] G. Hardy et E. Wright, *Introduction à la théorie des nombres*, traduction de F. Sauvageot, Vuibert-Springer, 2007.
- [I] M. Irwin, *Geometry of continued fractions*, Amer. Math. Monthly, Vol. 98, No. 8 (Oct., 1989), pp. 696–703.
- [Ki] A. Khinchin, *Continued fractions*, Dover, 1964.
- [K1] F. Klein, *Sur un représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire*, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 15 (1896), 327–331. Disponible sur numdam.

- [K2] F. Klein, Elementary mathematics from an advanced standpoint, Arithmetic, Algebra, Analysis, Dover 2004.
- [L] A.-M. Legendre, Théorie des nombres, Firmin Didot, Paris, 1830. Disponible sur [google books](#).
- [PP] P. Popescu-Pampu, Le cerf volant d'une constellation, à paraître dans l'Enseignement mathématique.
- [R-S] A. Rockett, P. Szűsz, Continued fractions, World scientific, 1992.
- [Sm] H. Smith, Note on continued fractions, Messenger of mathematics, Ser. II, vol. vi (1876), 1-14, réédité dans : Collected Papers II, 135-147.
- [S] H. Stark, An introduction to number theory, M.I.T. Press, 1987.
- [T] B. Teissier, Continued fractions, JAMS Seminar at Yamaguchi 93. Disponible sur : <http://www.math.jussieu.fr/teissier/old-papers.html>
- [W] A. Weil, Number theory, an approach through history : from Hammurapi to Legendre, Birkhäuser, 1983.