Angles principaux entre deux sous-espaces d'un espace euclidien.

R. Bondil[1] , C. Boubel[2]

1 Un exercice sur les déterminants de matrices orthogonales

L'exercice suivant, posé sur le forum de l'u.p.s, semble a posteriori assez classique (on le trouvera par exemple dans le beau livre de J.D. Eiden [1] Ex. 4.2.) :

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ *qu'on décompose par bloc sous la forme* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *où* $A \in M_m(\mathbb{R})$ *et* $D \in M_{n-m}(\mathbb{R})$. *Montrer que* $|\det(A)| = |\det(D)|$ *et, plus précisément, que* $\det(A)\det(M) = \det(D)$.

Ce résultat découle immédiatement du résultat suivant, dit des compléments de Schur (appelée aussi relation de Jacobi dans [1]) :

Pour une matrice quelconque $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, *avec* $A \in M_m(\mathbb{R})$ *et* $D \in M_{n-m}(\mathbb{R})$, *si on décompose* M^{-1} *en blocs de la même taille que* M, *sous la forme* $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, *alors* $\det(A) = \det(M)\det(D')$.

Le résultat de Schur, qui n'a donc rien d'euclidien, se déduit très rapidement d'une décomposition $L.U$ par blocs et l'exercice est vite fini.

Ce qui suit voudrait pourtant retrouver l'égalité $|\det(A)| = |\det(D)|$ à l'aide d'arguments euclidiens. Cela sera fait au § 4, grâce à des angles qu'on appellera ici *angles principaux* entre les sous-espaces naturellement associés à ces sous-matrices. On introduit et explique les propriétés de ces angles au § 2 : si E est un espace euclidien, ces angles sont des *invariants complets* pour l'action de $O(E)$ sur les couples de sous-espaces de E. Le § 3 généralise, à cette famille d'angles principaux, le fait que « des angles à côtés perpendiculaires sont égaux », ce qui est ce dont on a besoin pour résoudre l'exercice initial.

Lors de la première rédaction de ces notes, nous ne connaissions pas de référence pour l'introduction de ces angles principaux, même si elle paraît assez naturelle. A posteriori, nous avons pu trouver la construction de ces angles dans l'exercice VII.13 de [2], où elle est appliquée simplement aux symétries orthogonales échangeant deux sous-espaces.

2 Le problème de l'action de $O(E)$ sur les couples de s.e.v.

2.1 Introduction

Soient D et D' deux droites vectorielles d'un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ et Δ et Δ' deux autres droites vectorielles de E. A quelle condition géométrique simple sur (D, D') et (Δ, Δ') existe-t-il une isométrie $f \in O(E)$ telle que $f(D) = \Delta$ et $f(D') = \Delta'$?

La réponse est bien connue : si on fixe un vecteur directeur unitaire e_D de D et un vecteur directeur unitaire $e_{D'}$ de D' tel que $(e_D|e_{D'}) \geq 0$, et de même sur Δ et Δ', il est facile de voir qu'une C.N.S est l'égalité des produits scalaires : $(e_D|e_{D'}) = (e_\Delta|e_{\Delta'})$.

Si on définit l'angle géométrique : $\widehat{(D, D')} = \arccos(e_D|e_{D'}) \in [0, \pi/2]$, la C.N.S. précédente se réécrit :

$$\widehat{(D, D')} = \widehat{(\Delta, \Delta')} \quad (\dagger)$$

On se pose maintenant la même question pour des s.e.v. de dimensions quelconques dans E. Précisément, on considère deux s.e.v. F et F' (qui n'ont pas forcément la même dimension) dans

1. enseignant en MPSI au lycée Joffre, Montpellier : `romain.bondil @ ac-montpellier.fr`
2. maître de conférence à l'I.U.T. Robert Schumann, université de Strasbourg : `charles.boubel@ unistra.fr`

un espace euclidien $(E,(\cdot|\cdot))$. On considère aussi $\widetilde{F}$ de même dimension que F et $\widetilde{F}'$ de même dimension que F'.

Définition : On dira que (F,F') et $(\widetilde{F},\widetilde{F}')$ sont conjugués pour l'action de $O(E)$ si, et seulement si, il existe $f \in O(E)$ tel que $\widetilde{F} = f(F)$ et $\widetilde{F}' = f(F')$.

On cherche à caractériser cette propriété de conjugaison *numériquement* comme on l'a fait avec (†) : on va voir que c'est possible à l'aide d'une famille d'angles que nous appellerons *angles principaux.*

2.2 Les angles principaux entre deux sous-espaces d'un espace euclidien

Motivation : On veut définir une famille d'angles qui code la position relative de deux s.e.v. F et F' (qui n'ont pas forcément la même dimension) dans un espace euclidien $(E,(\cdot|\cdot))$.

Essentielles pour définir ces angles sont les deux applications p_F (resp. $p_{F'}$) de projection orthogonale sur F (resp. sur F') vues en restriction à l'autre sous-espace F' (resp. F).

Précisément, l'héroïne de ce texte sera l'application $q : F' \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x,F^\perp)^2 = (x|p_F(x))$ avec sa soeur $q' : F \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x,F'^\perp)^2 = (x|p_{F'}(x))$. Si l'on connaît cette notion, on peut dire que q et q' sont des formes quadratiques, mais cette notion n'étant pas au programme de classe préparatoire, nous ne l'utiliserons pas.

2.2.1 Première idée de la définition des angles principaux

Comme p_F est un projecteur orthogonal, en considérant l'endomorphisme symétrique $u = p_{F'} \circ p_{F|F'} \in \mathcal{L}(F')$, l'application q définie ci-dessus s'écrit pour tout $x \in F'$, $q(x) = (x|u(x))$. De même on définit $u' = p_F \circ p_{F'|F} \in \mathcal{L}(F)$ et pour tout $x \in F$, $q'(x) = (x\ |u'(x))$.

L'endomorphisme u (resp. u') étant symétrique, il est diagonalisable dans une b.o.n. de F' (resp. de F).

Les valeurs propres des u (resp. de u') sont aussi appelées « valeurs propres de q » (resp. de q').

En outre, par propriété des projecteurs orthogonaux, toutes ces valeurs propres sont comprises entre 0 et 1.

Idée de définition : On note $1 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{d'} \geq 0$ les valeurs propres de u, répétées autant de fois que leur multiplicité géométrique, dans F' de dimension d'.

En notant, pour tout $i = 1,\ldots,d'$, θ_i l'unique angle dans $[0,\pi/2]$ tel que $\cos(\theta_i) = \sqrt{\lambda_i}$, on voudrait dire (on va voir pourquoi !) que $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_{d'}$ sont les *angles principaux* entre F et F'.

La motivation de cette définition : répondre au problème de l'introduction 2.1.

Le problème de cette définition : Elle n'est pas symétrique si on échange F et F' : déjà parce qu'on a $d' = \dim(F')$ angles principaux mais que si on échangeait les rôles de F et F' on aurait d angles principaux, avec des valeurs qui ne sont pas calculées de la même façon !

Une note plus optimiste : On va voir qu'en enlevant les angles égaux à $\pi/2$ (correspondant à la valeur propre 0), on résout ce problème, non seulement de nombre de valeurs propres, mais aussi d'égalité des valeurs propres non nulles de u et de u'. [3].

2.2.2 Problème réduit : où l'on enlève les parties qui se coupent en angle droit

Soient F et F' deux s.e.v. de dimensions quelconques dans un espace euclidien $(E,(\cdot|\cdot))$. Soient $I := F \cap F'^\perp$, $I' := F' \cap F^\perp$, H et H' tels que $F = I \overset{\perp}{\oplus} H$ et $F' = I' \overset{\perp}{\oplus} H'$. Alors :

$$F + F' = (I \overset{\perp}{\oplus} I') \overset{\perp}{\oplus} (H + H') \text{ et } (p_{F'})_{|H} : H \xrightarrow{\simeq} H' \text{ est bijective.} \tag{1}$$

L'injectivité de $(p_{F'})_{|H}$ est évidente par définition de $I = \ker\big((p_{F'})_{|F}\big)$. Sa bijectivité vient alors de l'égalité des dimensions $\dim H = \dim H'$ donnée par l'injectivité de $(p_F)_{|H'}$ en sens contraire.

En introduisant les mêmes notations pour un second couple $(\widetilde{F},\widetilde{F}')$, on en déduit la :

3. On reprendra les angles égaux à $\pi/2$ plus tard à la définition du § 2.4.

Propriété : deux couples (F, F') et $(\widetilde{F}, \widetilde{F}')$ de s.e.v. de E sont conjugués pour l'action de $O(E)$ (cf. définition du § 2.1) si et seulement si :

(i) les dimensions des décompositions (1) associées à (F, F') et $(\widetilde{F}, \widetilde{F}')$ coïncident,

(ii) les couples (H, H') et $(\widetilde{H}, \widetilde{H}')$ sont conjugués.

Conséquence (problème de conjugaison réduit) : on s'intéressera désormais au problème de conjugaison *réduit* où (F, F') (resp. $(\widetilde{F}, \widetilde{F}')$) jouent les rôles de (H, H') et $(\widetilde{H}, \widetilde{H}')$ dans la proposition précédente. Autrement dit : on supposera que F, F', $\widetilde{F}$, $\widetilde{F}'$ sont des s.e.v. *tous de même dimension* d d'un espace euclidien E et tels que : $F \cap F'^{\perp} = \{0\}$ et $\widetilde{F} \cap \widetilde{F}'^{\perp} = \{0\}$, ce qui, par ce qui précède donne symétriquement $F' \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $\widetilde{F}' \cap \widetilde{F}^{\perp} = \{0\}$.

On cherche toujours une C.N.S pour qu'il existe $u \in O(E)$ telle que $u(F) = \widetilde{F}$ et $u(F') = \widetilde{F}'$.

2.2.3 Où l'on définit les angles principaux dans le cas réduit :

Le (ii) de la propriété du § 2.2.2 nous conduit à définir les angles principaux seulement pour les s.e.v. H et H' de la propriété, qu'on rebaptise ici F et F' dans la définition [4] qui suit :

Propriété-définition : Soit F et F' deux s.e.v *de même dimension* d dans un espace euclidien $(E, (\cdot \mid \cdot))$, tels que $F \cap F'^{\perp} = \{0\}$.

D'après le paragraphe précédent, cette condition est alors symétrique entre F et F', c'est-à-dire qu'on a aussi $F' \cap F^{\perp} = \{0\}$ et la projection $(p_{F'})_{|F} : F \longrightarrow F'$ est un isomorphisme.

On note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d > 0$ les valeurs propres de u répétées suivant leurs multiplicités.

Alors ces valeurs propres sont aussi les valeurs propres de u' avec les mêmes multiplicités.

Les angles $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_d < \pi/2$ définis par : $\cos^2(\theta_i) = \lambda_i$ seront appelés les *angles principaux* entre F et F'.

Démonstration de la propriété : Soit $i \in [\![1, d]\!]$ et soit e'_i un vecteur propre associé à λ_i. Par définition $u(e'_i) = \lambda_i e'_i$ c'est-à-dire :

$$p'_F(p_F(e'_i)) = \lambda_i e'_i \quad (*).$$

En appliquant p_F à cette égalité $(*)$, on obtient $(p_F \circ p_{F'})(p_F(e'_i)) = \lambda_i p_F(e'_i)$.

A la condition que $p_F(e'_i)$ soit non nul, ceci montre bien que $p_F(e'_i)$ est un vecteur propre de u' pour la même valeur propre λ_i. Mais si on avait $p_F(e'_i) = 0$ alors dans $(*)$ le premier membre serait nul ce qui donnerait $\lambda_i = 0$, ce que nous avons exclu.

Mieux, en notant $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé à une valeur propre λ pour u et de même pour u', on sait alors que p_F réalise une injection de $E_\lambda(u)$ dans $E_\lambda(u')$. On considère symétriquement $p_{F'}$: $E_\lambda(u') \to E_\lambda(u)$, qui donne aussi une injection linéaire entre ces deux s.e.v. ce qui montre l'égalité des dimensions $\dim(E_\lambda(u)) = \dim(E_\lambda(u'))$ et finit de prouver la propriété. □

2.3 Les angles principaux résolvent le problème de la conjugaison

La construction faite pour la définition des angles principaux au § 2.2.3 montre directement que si deux couples (F, F') et $(\widetilde{F}, \widetilde{F}')$ sont conjugués par l'action de $O(E)$ alors ils ont les mêmes angles principaux. On va montrer ici, dans le cadre du problème réduit, que la réciproque est vraie.

2.3.1 Décomposition de F et F' associée aux angles principaux

On garde les notations et hypothèses de la définition des angles principaux au § 2.2.3, c'est-à-dire celle du problème réduit : F et F' ont même dimension et $F \cap F'^{\perp} = \{0\}$.

Début de la construction : on note $\lambda = \lambda_1$ la plus grande valeur propre de u et $e' = e'_1$ un vecteur propre unitaire associé à λ. On remarque d'abord que $\|p_F(e')\| = \sqrt{\lambda}$ et on définit e comme le vecteur unitaire tel que $p_F(e') = \sqrt{\lambda}e$. L'importance géométrique de $\lambda = \lambda_1$ se voit dans la propriété 1 suivante :

4. encore une fois voir le § 2.4 pour une définition plus générale

Propriété 1 : Considérons S (resp. S') la sphère unité de F (resp. de F'), et l'application :

$$d \,:\, S \times S' \to \mathbb{R},\ (x, x') \mapsto \|x - x'\|.$$

Alors $\|e - e'\|$ réalise le minimum de d sur $S \times S'$ et e est vecteur propre de q' (c'est-à-dire de u') pour la même valeur propre maximale λ.

Démonstration de la propriété 1 : par définition de q, pour tout $x \in F'$,

$$q(x) = d(x, F^{\perp}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_d x_d^2,$$

où $(x_1, \ldots, x_d)$ sont les coordonnées de x dans une b.o.n. de diagonalisation de u. Donc sur S', la fonction q atteint bien son maximum en $e'_1 = e'$.

Comme pour tout $x \in E$, $d(x, F)^2 + d(x, F^{\perp})^2 = \|x\|^2$, la fonction

$$q'_{|S'} \,:\, x \in S' \mapsto d(x, F)^2 = 1 - d(x, F^{\perp})^2,$$

atteint son minimum en $x = e'$ en prenant la valeur $d(e', p_F(e'))^2$.

Si on introduit la fonction

$$\theta : x \in S' \mapsto (\widehat{x, p_F(x)}),$$

alors :

$$d(e', p_F(e'))^2 = \sin^2(\widehat{e', p_F(e')}) = \sin^2(\theta(e')). \tag{2}$$

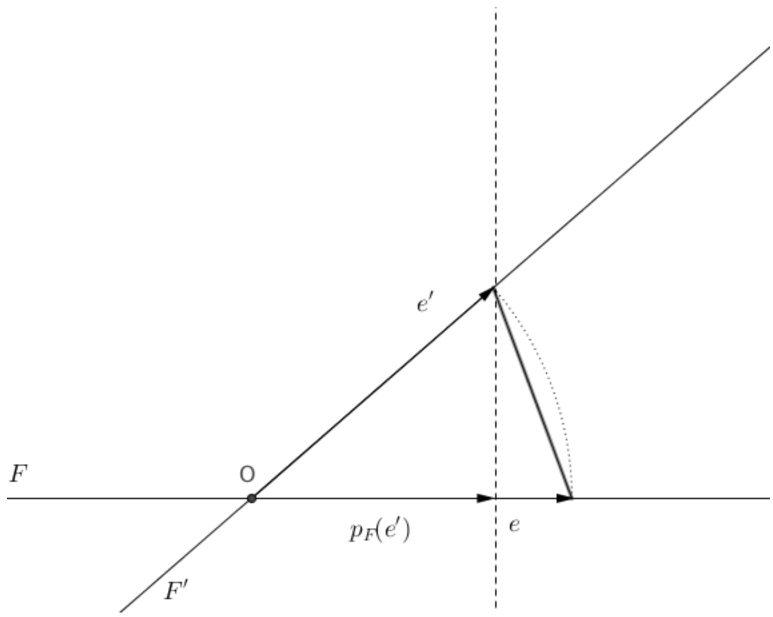


FIGURE 1 – Illustration, dans le cas $\lambda \neq 1$

Ainsi ce minimum de distance correspond à un minimum $\theta_1 = \theta(e')$ de la fonction angle θ.

Or, par propriété de la projection orthogonale,

$$\forall\, x \in S',\ \theta(x) = (\widehat{x, p_F(x)}) = \min_{y \in S}(\widehat{x, y}).$$

On obtient alors une écriture importante de cet angle minimum sous la forme :

$$\theta_1 = \min_{(x,y) \in S' \times S}(\widehat{x, y}) \tag{3}$$

L'intérêt de cette expression de θ_1 est que les sphères S et S' y jouent des rôles *symétriques*.

Ainsi la fonction $\theta' : x \mapsto (\widehat{x, p_{F'}(x)})$ définie sur S atteint la même valeur minimum θ_1 au point e ce qui, en remontant le raisonnement précédent, démontre que e est vecteur propre de q' (c'est-à-dire de u') pour sa valeur propre maximale λ. $\square$

Propriété 2 : Avec les notations ci-dessus, on note $F_e := e^{\perp} \cap F$. Alors : $p_{F'}(e) \perp F_e$.

De même, si on note $F'_{e'} := e'^{\perp} \cap F'$. Alors : $p_F(e') \perp F'_{e'}$.

Démonstration de la propriété 2 : l'essentiel a été fait à la propriété 1 qui a montré la symétrie des rôles de e et e'. En effet, en définissant e tel que $p_F(e') = \sqrt{\lambda}e$, on a montré que le vecteur e est aussi propre pour q' pour la valeur propre λ, et que $p_{F'}(e) = \sqrt{\lambda}e'$.

Alors, pour tout $x \in F_e$:

$$(p_{F'}(e)|x) = (p_F(p_{F'}(e)) + p_{F^{\perp}}(p_{F'}(e)|x) = (p_F(p_{F'}(e))|x) = \lambda(e|x) = 0,$$

la deuxième égalité venant bien sûr de ce que $x \perp F^{\perp}$.

La seconde affirmation de l'énoncé est immédiate par symétrie des rôles. □

La propriété 2 permet la mise en oeuvre d'une récurrence :

Itération de la construction : on revient aux notations initiales $e = e_1$ et $e' = e'_1$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e'_1)$. Si $e_1 = e'_1$ c'est-à-dire si $\lambda_1 = 1$, alors E_1 est une droite. Sinon E_1 est un plan qui admet une base orthonormée (e'_1, e''_1) telle que $e_1 = \cos(\theta_1)e'_1 + \sin(\theta_1)e''_1$ où $\cos(\theta_1) = (e_1|e'_1)$ et $\sin(\theta_1) > 0$. La figure 1 dessine ce plan.

On note ici $E_1^{\perp}$ l'orthogonal de E_1 dans $F + F'$. Alors la propriété 2 dit que :

$$E_1^{\perp} = ({e'_1}^{\perp} \cap F) + (e_1^{\perp} \cap F').$$

Ceci permet d'itérer la construction précédente : on considère λ_2 la plus grande valeur propre de u restreinte à $e'^{\perp} \cap F'$, on fabrique un couple (e'_2, e_2) analogue, et on note encore $E_2 = \mathrm{Vect}(e'_2, e_2)$.

Notons que si $\dim(F \cap F') = s$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 1$ et $E_1, \ldots, E_s$ sont des droites telles que $F \cap F' = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_s$. Ensuite, pour $i > s$, les E_i sont des plans $\mathrm{Vect}(e_i, e'_i)$.

Conclusion de la construction : on obtient ainsi une décomposition de $F + F'$ en une somme directe orthogonale de la forme suivante :

$$F + F' = (E_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_s) \overset{\perp}{\oplus} E_{s+1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_d = (F \cap F') \overset{\perp}{\oplus} E_{s+1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_d$$

avec $E_i = \mathrm{Vect}(e'_i, e_i) = \mathrm{Vect}(e'_i, e''_i)$ tels que :
- pour $i = 1, \ldots, s$, $e_i = e'_i$ et $\theta_i = 0$: il se peut bien sûr que cette partie de la somme soit nulle, ce qui correspond au cas où $F \cap F' = \{0\}$.
- pour tout $i = s+1, \ldots, d$, $\theta_i \neq 0$, et $e_i = \cos(\theta_i)e'_i + \sin(\theta_i)e''_i$
- la famille $(e'_i)_{i=1,\ldots d}$ (resp. $(e_i)_{i=1,\ldots,d}$) est une b.o.n. de F' (resp. de F) formée de vecteurs propres pour u (resp. pour u').

On écrira donc cette décomposition sous la forme :

$$F + F' = (F \cap F') \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(e_{s+1}, e'_{s+1}) \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(e_d, e'_d) \tag{4}$$

Visualisation : $F + F'$ se décompose en plans deux à deux orthogonaux et en $F \cap F'$, et dans chacun des plans on a le dessin de la figure 1, avec $p_F(e'_i) = \cos(\theta_i)e_i$.

2.3.2 Application de la décomposition du 2.3.1 au problème de l'action de $O(E)$

Soient deux couples (F, F') et $(\widetilde{F}, \widetilde{F}')$ vérifiant les hypothèse du problème réduit (cf. § 2.2.2) qui ont les mêmes angles principaux.

On considère la b.o.n. $((e_i)_{i=1,\ldots,s}, (e'_i, e''_i)_{i=s+1,\ldots,d})$, de $F+F'$ construite au paragraphe précédent (cf. fin du § 2.3.1) et son analogue $((\widetilde{e}_i)_{i=1,\ldots,s}, (\widetilde{e}'_i, \widetilde{e}''_i)_{i=s+1,\ldots,d})$ pour $\widetilde{F} + \widetilde{F}'$.

L'application linéaire f envoyant les e'_i sur les $\widetilde{e}'_i$ et les e''_i sur les $\widetilde{e}''_i$ est orthogonale par construction, et vérifie bien que $f(F) = \widetilde{F}$ et $f(F') = \widetilde{F}'$.

Conclusion : on a bien montré que les angles principaux resolvent le problème de la conjugaison de deux paires de sous-espaces, posé au § 2.1.

2.4 Définition plus complète des angles principaux pour deux sous-espaces de même dimension

On suppose ici seulement que F et F' sont deux sous-espaces vectoriels de E, de même dimension.

La décomposition du § 2.2.2 donne que :

$$F = (F \cap F'^{\perp}) \overset{\perp}{\oplus} H, \quad \text{et} \quad F' = (F' \cap F^{\perp}) \overset{\perp}{\oplus} H', \text{avec } (p_{F'})_{|H} : H \xrightarrow{\simeq} H'. \tag{5}$$

On a défini au § 2.2.3, les angles principaux entre H et H'.

Définition des angles principaux entre F et F' : Comme ici, en plus, $\dim(F) = \dim(F')$, on sait donc par (5) que $\dim(F \cap F'^{\perp}) = \dim(F' \cap F^{\perp})$: on va noter r cette dimension commune à $(F \cap F'^{\perp})$ et $(F' \cap F^{\perp})$, qui peut être nulle.

En notant toujours $d = \dim(F) = \dim(F')$, on définit alors les angles principaux entre F et F' comme la suite :

$$0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_{d-r} < \theta_{d-r+1} = \cdots = \theta_d = \pi/2$$

où $\theta_1 \le \cdots \le \theta_{d-r}$ sont les angles principaux entre H et H' comme défini au § 2.2.3.

3 Comparaison des angles principaux entre (F, F') et $(F^{\perp}, F'^{\perp})$

Dans ce paragraphe, on va montrer une propriété généralisant le fait, bien connu en géométrie élémentaire, que « des angles à côtés perpendiculaires sont égaux ».

Cadre de travail et synthèses des résultats précédents : Soit F et F' deux sous-espaces vectoriels de même dimension d'un espace euclidien E. On suppose pour simplifier que $F \cap F'^{\perp} = \{0\}$, ce qui équivaut à $F' \cap F^{\perp} = \{0\}$ (c'est le cadre « réduit », cf. aussi § 2.4).

On sait alors (cf. conclusion du § 2.3.1, égalité (4)), qu'on peut alors décomposer $F + F'$ en une somme directe orthogonale :

$$F + F' = (F \cap F') \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(e_{s+1}, e'_{s+1}) \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(e_d, e'_d) \quad \text{(rappel de (4))},$$

où $s = \dim(F \cap F')$, et pour chaque $i \in [\![s+1, d]\!]$, dans le plan $E_i = \mathrm{Vect}(e_i, e'_i)$, on a : $p_F(e'_i) = \cos(\theta_i) e_i$ avec $0 < \theta_{s+1} \le \cdots \le \theta_d < \pi/2$, les angles principaux non nuls entre F et F'.

Propriété (sur les angles à cotés perpendiculaires) : Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on note $G = F^{\perp}$ et $G' = F'^{\perp}$. Dans chaque plan $E_i = \mathrm{Vect}(e_i, e'_i)$ on considère une base (g_i, g'_i) déduite de (e_i, e'_i) par une rotation d'angle $\pi/2$ comme sur la figure ci-dessous. Alors :

a) $g_i \in G$, et $g'_i \in G'$;

b) on obtient la décomposition :

$$G + G' = (G \cap G') \overset{\perp}{\oplus} E_{s+1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_d, \tag{6}$$

avec les *mêmes* plans E_i que dans $F + F'$;

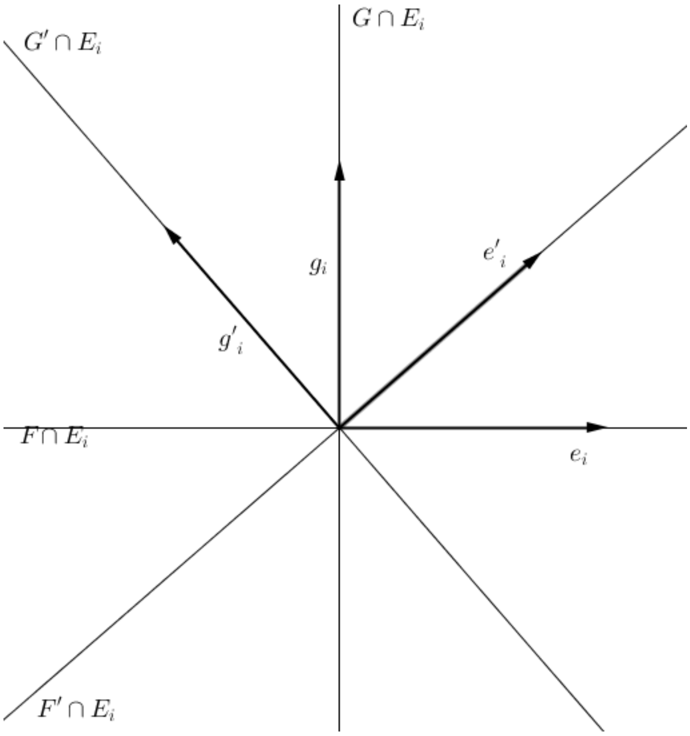
c) on en déduit que les angles principaux non nuls entre G et G' sont exactement les mêmes qu'entre F et F' à savoir $\theta_{s+1} \le \theta_{s+2} \le \cdots \le \theta_d$.

Démonstration de la propriété : Soit i dans $[\![s+1, d]\!]$. Par définition, le vecteur g_i est orthogonal à e_i et comme $g_i \in E_i$, ce vecteur g_i est orthogonal à tous les autres termes de la somme dans (4), ce qui montre : $g_i \in F^{\perp} = G$. De même $g'_i \in G'$ et donc $E_i \subset G + G'$.

Pour montrer (6), en notant $S = E_{s+1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_d$, il suffit donc de montrer que :

$$S \perp (G \cap G'), \tag{7}$$

$$\dim(S) + \dim(G \cap G') = \dim(G + G'). \tag{8}$$



Pour (7), il suffit de penser que $G \cap G' = F^\perp \cap F'^\perp = (F + F')^\perp$. Comme $S \subset F + F'$, on en déduit (7).

Pour (8), on sait par (4) que :

$$\dim(F + F') = \dim(F \cap F') + \dim(S). \tag{9}$$

Or $\dim(G\cap G') = \dim(F^\perp \cap F'^\perp) = \mathrm{codim}(F+F')$ et $\dim(G+G') = \dim(F^\perp + F'^\perp) = \mathrm{codim}(F\cap F')$. Ces égalités dans (9) donnent (8).

Pour le c) : on vient de fabriquer, dans E_i, une base (g_i, g'_i) dont les propriétés sont exactement les mêmes que celle de (e_i, e'_i), mais vis-à-vis de $G = F^\perp$ et $G' = F'^\perp$: notamment l'orthogonal dans $G + G'$ de chaque E_i est $G_i + G'_i$ où $G_i = g_i^\perp \cap G$ et $G'_i = (g'_i)^\perp \cap G'$.

On en déduit que $(g_i)_{i=s+1,d}$ et $(g'_i)_{i=s+1,d}$ (complétées chacune par une b.o.n. de $G \cap G'$) sont des bases diagonalisantes pour les endomorphismes $v = p_{G'} \circ p_{G|G'}$ et $v' = p_G \circ p_{G'|G}$.

Donc les *angles principaux* entre G et G' sont les angles $(\widehat{g_i, g'_i})$, qui sont bien sûr égaux aux $(\widehat{e_i, e'_i})$ c'est-à-dire les angles principaux de (F, F'). □

4 Application à l'exercice sur les déterminants

On reprend les hypothèses de l'exercice cité au § 1 en prenant le point de vue des endomorphismes.

Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$, qu'on écrit dans une b.o.n. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sous la forme d'une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où $A \in M_m(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-m}(\mathbb{R})$. On note $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ et $F' = f(F) = \mathrm{Vect}(f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_m))$.

On a défini au § 2.4 les angles principaux $0 \le \theta_1 \le \dots \le \theta_m \le \dfrac{\pi}{2}$ entre F et F' où ici $m = \dim(F) = \dim(F')$.

Avec cette définition, on peut formuler la :

Propriété 1 : $|\det(A)| = \cos(\theta_1) \dots \cos(\theta_m)$.

Démonstration de la propriété 1 : Le déterminant de la matrice A est le déterminant de l'endomorphisme $p_F \circ f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

• **1er cas :** $F \cap F'^{\perp} \neq \{0\}$. Dans ce cas $\ker(A) \neq \{0\}$ et donc $\det(A) = 0$ et d'autre part $\theta_m = \pi/2$ donc l'égalité de l'énoncé est bien vérifiée.

• **2eme cas :** $F \cap F'^{\perp} = \{0\}$. Dans ce cas, comme au § 2.3, on va noter $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ (resp. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$) des b.o.n. de F' (resp. de F) diagonalisant $u = p_{F'} \circ p_{F|F'}$ (resp. $u' = p_F \circ p_{F'|F}$) : ce qu'il faut avoir compris de ce § 2.3, est qu'on pouvait prendre pour e_i le vecteur unitaire normalisé déduit de $p_F(e'_i)$, et qu'alors $p_F(e'_i) = \sqrt{\lambda_i}.e_i = \cos(\theta_i).e_i$.

On considère l'image $(f(e_1), \ldots, f(e_m))$: c'est une base orthonormée de F', donc en notant $v \in \mathcal{L}(F')$ l'endomorphisme qui envoie chaque $f(e_i)$ sur e'_i, on sait que $v \in O(F')$.

Alors $v \circ f_{|F}$ envoie chaque e_i sur e'_i et $p_F \circ v \circ f_{|F}$ envoie chaque e_i sur $p_F(e'_i) = \cos(\theta_i)e_i$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F \circ v \circ f_{|F}) = \mathrm{diag}(\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_m))$.

Comme $v \in O(F')$, $|\det(v)| = 1$, et donc $|\det(p_F \circ f_{|F})| = |\mathrm{diag}(\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_m))|$. □

Propriété 2 : on déduit de la propriété 1 que $|\det(A)| = |\det(D)|$ (ce qui résout l'exercice cité).

Démonstration de la propriété 2 : en gardant les notations données au début de ce § 4, on note $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ et $G' = f(G)$.

L'essentiel est que $G = F^{\perp}$ et comme $f \in O(E)$, on a aussi $G' = F'^{\perp}$.

• **1er cas :** $F \cap F'^{\perp} \neq \{0\}$**.** On a vu à la propriété 1 que cette condition équivaut à $\det(A) = 0$.

Mais on a vu aussi, que les deux conditions $F \cap F'^{\perp} \neq \{0\}$ et $F' \cap F^{\perp} \neq \{0\}$ sont équivalentes car $\dim(F) = \dim(F')$ (cf. § 2.2.2).

Autrement dit $F \cap F'^{\perp} \neq \{0\}$ et donc $G'^{\perp} \cap G \neq \{0\}$, ce qui, en appliquant la propriété 1 à la matrice D, équivaut à $\det(D) = 0$.

• **2ème cas :** $F \cap F'^{\perp} = \{0\}$**.** On se retrouve exactement dans les hypothèses de la propriété du § 3. Autrement dit, on sait alors que G et G' ont exactement la même suite d'angles principaux que F et F', à part des angles plats. Mais les angles plats, de cosinus 1, ne changent pas la valeur du produit $\cos(\theta_1) \ldots \cos(\theta_m)$. Ainsi la propriété 1 permet de conclure que $|\det(D)| = |\det(A)|$. □

Références

[1] J.D. Eiden, Le jardin d'Eiden, une année de colles en Math. Spé. MP*, Calvage et Mounet.

[2] R. Goblot, Algèbre linéaire, collection Mathématiques à l'université, Ellipses.